

Chapitre 4

Dérivation

4.1 Définition

4.1.1 Nombre dérivé

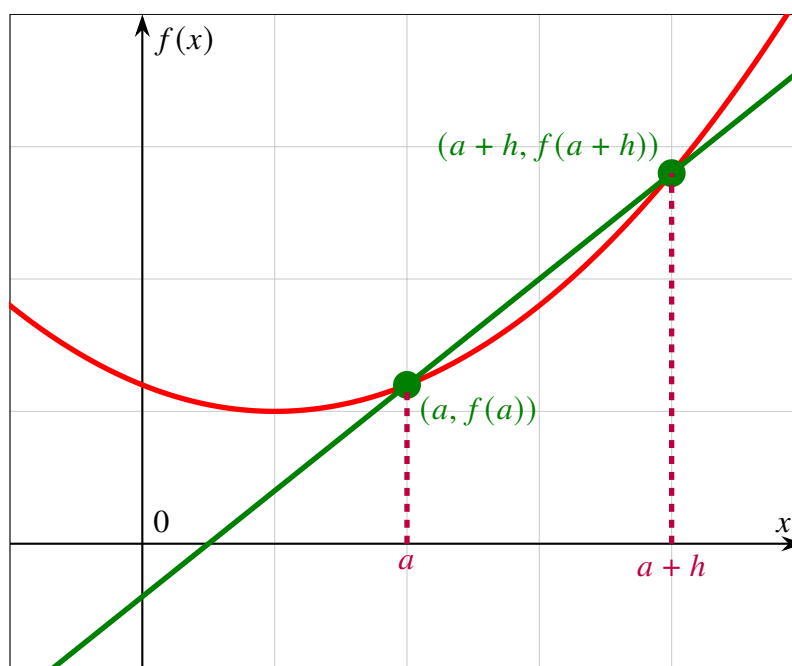
Definition 4.1 - Taux d'accroissement

Soient f une fonction, et $a \in \mathcal{D}_f$. On appelle **taux d'accroissement de f en a** qui dépend d'un paramètre h le nombre

$$T_a^f(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Remarque 4.2.

Le taux d'accroissement est le coefficient directeur de la droite qui passe par les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(a+h, f(a+h))$.

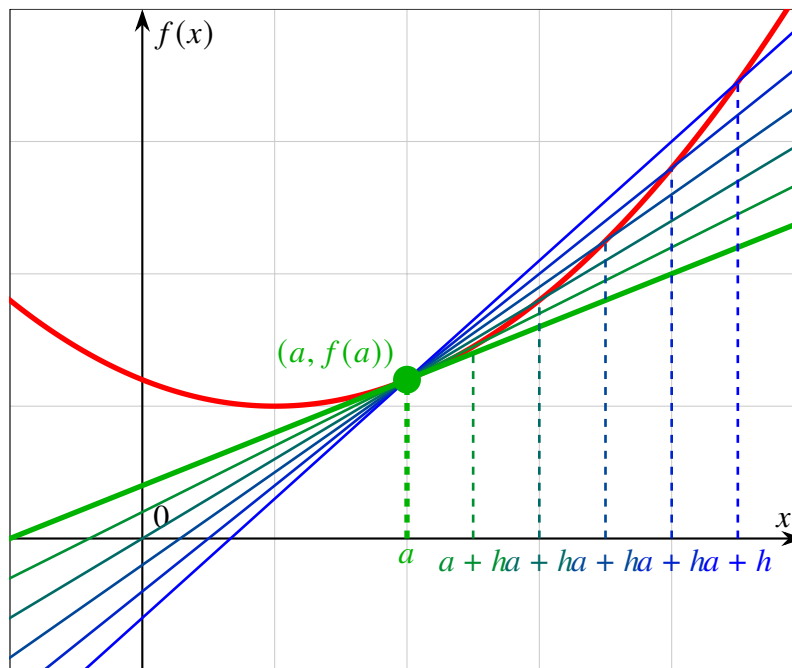


Definition 4.3 -

Soient f une fonction et $a \in \mathcal{D}_f$. Si le taux d'accroissement $T_a^f(h)$ tend vers un réel ℓ lorsque h tend vers 0, alors on dit que la fonction f **est dérivable en a** . On note alors $f'(a)$ ce réel ℓ et on l'appelle **nombre dérivé de f en a** .

Remarque 4.4.

Le nombre dérivé de f en a est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f en a .



Exemple 4.5.

- i) Pour $f(x) = x^2$, définie sur $\mathbb{R}$, calculer le taux d'accroissement en $a = 2$ ainsi que le nombre dérivé.

-
- ii) Pour $f(x) = x^2 + 3x + 2$, définie sur $\mathbb{R}$, calculer le taux d'accroissement en $a = -1$ ainsi que le nombre dérivé.

4.1.2 Fonction dérivée

Definition 4.6 - Fonction dérivée

Soit f une fonction et D un intervalle (ou une réunion d'intervalles) de $\mathbb{R}$. f est dite **dérivable sur D** si elle est dérivable en tout point $a \in D$.

La fonction qui à $x \in D$ associe le nombre dérivé de f en x est appelée **fonction dérivée de f** . On la note f' .

Exemple 4.7.

- i) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

ii) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x + 2$. Calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

4.2 Dérivées usuelles

Théorème 4.8 - Dérivabilité de la fonction racine carrée

- i) La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa fonction dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- ii) f n'est pas dérivable en 0.

Démonstration

■

Théorème 4.9 - Dérivabilité de la fonction inverse

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa fonction dérivée est la fonction $f' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

Démonstration

Théorème 4.10 - Table des dérivées usuelles

Pour chacune des fonctions f , on note $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition, f' sa dérivée et D l'ensemble sur lequel f est dérivable. On a alors

$\mathcal{D}_f$	f	D	f'
$\mathbb{R}$	$x \mapsto k$ (constante, $k \in \mathbb{R}$)	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 1$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 2x$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$)	$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$
$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$
$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$)	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$
$[0, +\infty[$	$x \mapsto \sqrt{x}$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Exemple 4.11.

Calculer les dérivées des fonctions suivantes:

i) $f(x) = \frac{1}{x^3}$

ii) $f(x) = x^{2027}$

iii) $f(x) = 171$

4.3 Opérations sur les dérivées

4.3.1 Opérations élémentaires

Théorème 4.12 - Dérivée d'un produit

Soient u et v deux fonctions définies sur un même domaine $\mathcal{D}$ et dérivables sur un domaine D . Alors le produit de fonctions uv est dérivable sur D et sa dérivée est donnée par:

$$(uv)' = uv' + u'v.$$

Démonstration

■

Théorème 4.13 - Opérations sur les dérivées

Soient u et v deux fonctions dérivables sur D et $k \in \mathbb{R}$. Alors $ku, u+v, uv$ sont dérivables sur D . De plus, si v ne s'annule pas sur D , alors $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur D et on a

Fonction	Dérivée
ku	$(ku)' = ku'$
$u + v$	$(u + v)' = u' + v'$
uv	$(uv)' = uv' + u'v$
$\frac{1}{v}$	$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemple 4.14.

Calculer les dérivées des fonctions suivantes:

i) $f(x) = \frac{5x + 2}{x^2 - 3x + 2}$ sur $]2, +\infty[$.

ii) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2}$ sur $\mathbb{R}$.

iii) $f(x) = (x + 1)(3x - 4)$

iv) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$.

4.3.2 Composition avec une fonction affine

Théorème 4.15 - Dérivée de la composée d'une fonction avec une fonction affine

Soient f une fonction dérivable sur un domaine E de $\mathbb{R}$, a et b deux nombres réels. Soit D tel que pour tout $x \in D$, $ax + b \in E$.

Soit la fonction g définie sur D telle que pour tout $x \in D$, $g(x) = f(ax + b)$. Alors g est dérivable sur D et, pour tout $x \in D$,

$$g'(x) = af'(ax + b).$$

Exemple 4.16.

Calculer les dérivées des fonctions suivantes:

i) $f(x) = \sqrt{3x + 9}$ sur $] -3, +\infty[$

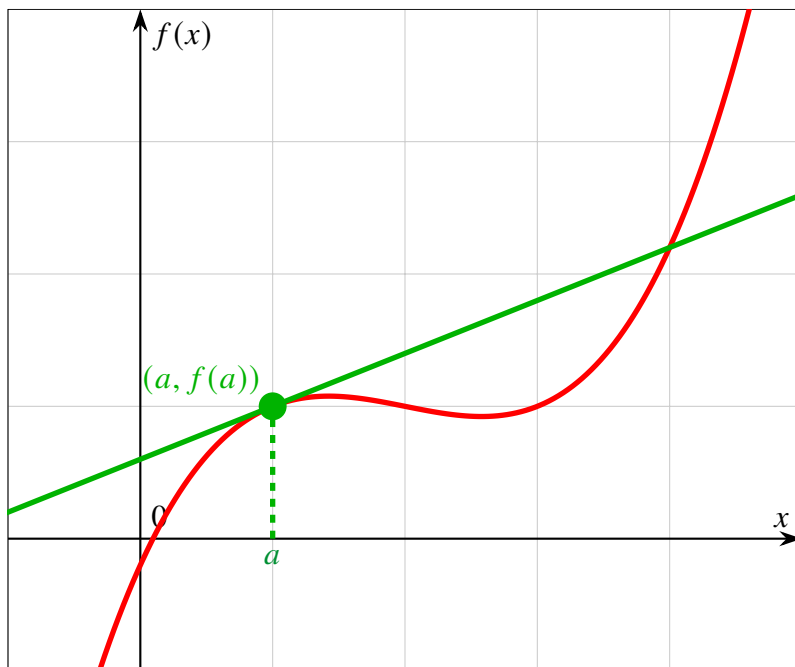
ii) $f(x) = (5x + 3)^{2026}$ sur $\mathbb{R}$.

iii) $f(x) = \frac{1}{(2x+5)^4}$ sur $\left]-\frac{5}{2}, +\infty\right[$

4.4 Tangente à la courbe représentative d'une fonction

Propriété 4.17 - Tangente à la courbe représentative d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un domaine D . Alors pour tout $a \in D$, la courbe représentative de f admet une tangente au point $(a, f(a))$ de coefficient directeur $f'(a)$.



Théorème 4.18 - Équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un domaine D . Alors pour tout $a \in D$, la courbe représentative de f admet une tangente, qui est une droite d'équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Remarque 4.19.

L'équation réduite est $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a$

Démonstration

■

Exemple 4.20.

Déterminer l'équation réduite des tangentes pour les fonctions suivantes aux points d'abscisse a .

i) $f(x) = x + 3$ en $a = 2$

ii) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ en $a = 0$.

4.5 Variations de fonctions

4.5.1 Sens de variation d'une fonction

Théorème 4.21 - Lien entre dérivée et sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur D .

- i) Si f' est (strictement) positive sur D , alors f est (strictement) croissante sur D .
- ii) Si f' est (strictement) négative sur D , alors f est (strictement) décroissante sur D .
- iii) Si f' est nulle sur D alors f est constante sur D .

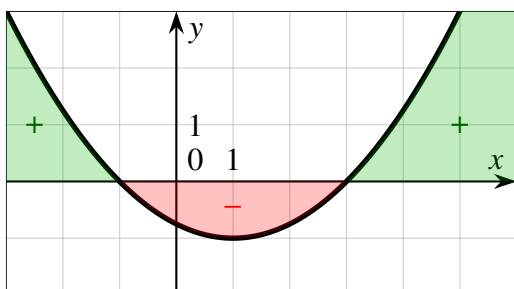


Figure 4.1: Signe de $f'(x)$

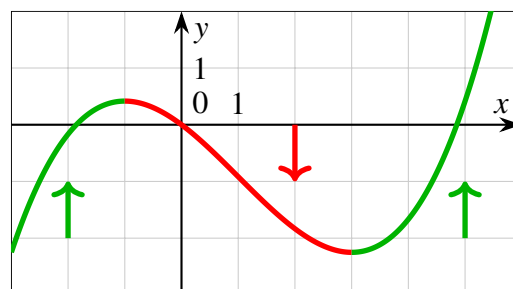


Figure 4.2: Variation de $f(x)$

Méthode 4.22 -

Pour connaître le tableau de variations de f en connaissant sa dérivée, il suffit d'établir le tableau de signe de f' .

Exemple 4.23.

i) Etablir le tableau de variations de $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1$ sur $[0, 3]$.

ii) Etablir le tableau de variations de $f(x) = x^2 + x + 1$ sur $[-2, 2]$.

4.5.2 Extrema d'une fonction

Théorème 4.24 - Extremum d'une fonction

Soient f une fonction dérivable sur D et $a \in D$.

- i) Si la dérivée de f s'annule en a en changeant de signe, alors f admet un **extremum local** en a .
- ii) Si la dérivée de f est positive avant a , s'annule en a et est négative après a , alors f admet un **maximum local** en a .
- iii) Si la dérivée de f est négative avant a , s'annule en a et est positive après a , alors f admet un **minimum local** en a .

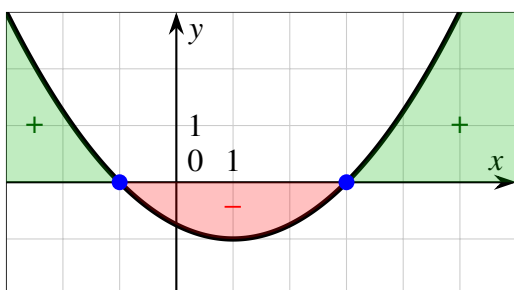


Figure 4.3: Signe de $f'(x)$ et annulation

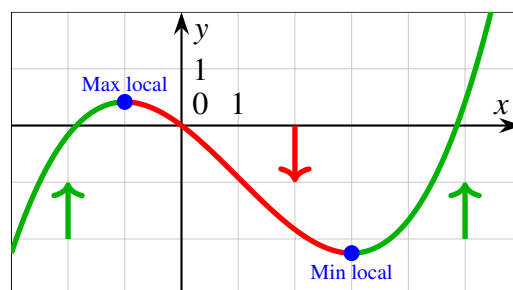


Figure 4.4: Variation de $f(x)$ et extrema

Exemple 4.25.

- i) Déterminer les extrema de la fonction $f(x) = x^2 + x + 1$ sur $[-2, 2]$.

ii) Déterminer les extrema de la fonction $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1$ sur $[0, 3]$.

△ Attention !!! -

Pour avoir un extremum, il faut que **la dérivée s'annule en changeant de signe**. Une annulation seule ne suffit pas pour avoir un extremum.

Exemple 4.26.

Avec la fonction cube: $f(x) = x^3$, montrer que la dérivée s'annule en 0. On donne le graphe de f . Que remarque-t-on ?

