

Chapitre 1

Ensembles de Nombres et Calcul Numérique

1.1 Ensembles de nombres

1.1.1 Entiers

Definition 1.1 - Ensemble des entiers naturels

L'ensemble de nombres $\{0, 1, 2, \dots\}$ est appelé ensemble des entiers naturels. On le note $\mathbb{N}$.

Definition 1.2 - Ensemble des entiers relatifs

L'ensemble de nombres $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ est appelé ensemble des entiers relatifs. On le note $\mathbb{Z}$.

Propriété 1.3 - Inclusion

Les entiers naturels sont également des entiers relatifs. On dit que l'ensemble des entiers naturels fait partie (ou est inclus) dans l'ensemble des entiers relatifs.

Exemple 1.4.

Parmi les nombres suivants: -100, -5, 0, 12, 18, lesquels sont des entiers naturels ou relatifs ?

1.1.2 Nombres décimaux, rationnels et réels

Definition 1.5 - Nombres décimaux

L'ensemble des nombres de la forme $\frac{a}{10^p}$ où a est un entier relatif et p est un entier naturel est appelé ensemble des nombres décimaux. On le note $\mathbb{D}$.

Remarque 1.6.

Les nombres décimaux sont les nombres ayant un nombre fini de chiffres après la virgule.

Exemple 1.7.

Donner des exemples de nombres décimaux.

Definition 1.8 - Nombres rationnels

L'ensemble des nombres de la forme $\frac{a}{b}$ avec a un entier relatif et b un entier naturel non nul est appelé ensemble des nombres rationnels. On le note $\mathbb{Q}$.

Propriété 1.9 - Inclusion

Tout nombre décimal est rationnel.

Exemple 1.10.

Donner des exemples de nombres rationnels.

Théorème 1.11 - Un tiers

$\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

Démonstration

■

Définition 1.12 - Nombres réels

Tous les nombres connus sont appelés nombres réels. On note cet ensemble $\mathbb{R}$. Les nombres réels qui ne sont pas rationnels sont appelés irrationnels.

Exemple 1.13.

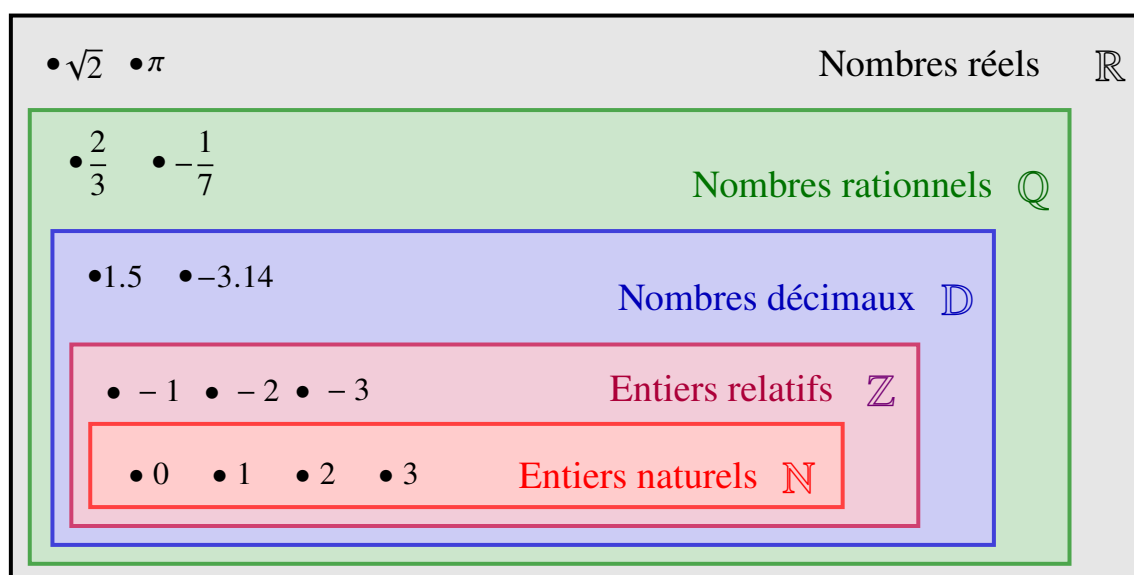
Donner des exemples de nombres réels

1.1.3 Relation entre les ensembles de nombres

Théorème 1.14 - Inclusion

On a les propriétés suivantes

- i) Tout entier naturel est un entier relatif.
- ii) Tout entier relatif est un nombre décimal.
- iii) Tout nombre décimal est un nombre rationnel.
- iv) Tout nombre rationnel est un nombre réel.



1.2 Calculs avec les signes et les parenthèses

1.2.1 Ordre de priorité pour les opérations

Propriété 1.15 - Ordre de priorité pour les opérations

L'ordre de priorité pour les opérations est le suivant:

- i) Parenthèses.
- ii) Exposants.
- iii) Multiplications et Divisions (de gauche à droite).
- iv) Additions et Soustractions (de gauche à droite).

Méthode 1.16 - PEMDAS

Ce moyen mnémotechnique permet de retenir l'ordre des opérations: **P**arenthèses, **E**xposants, **M**ultiplications et **D**ivisions, **A**dditions et **S**oustractions.

Exemple 1.17.

i) $2^2 \times (3 + 4) =$

ii) $2^2 \times 3 + 4 =$

1.2.2 Addition et soustraction de réels

Propriété 1.18 - Additionner et soustraire des réels

Si a et b sont deux nombres réels, alors

i) $a + (-b) = a - b.$

ii) $a + (-b) = a - b.$

iii) $(-a) + b = -a + b.$

iv) $(-a) + (-b) = -a - b = -(a + b).$

Remarque 1.19.

En particulier, pour tout réel a , $-(-a) = a.$

Exemple 1.20.

i) $1 + (-3) =$

ii) $(-6) + (-5) =$

iii) $-(-9) =$

1.2.3 Règle des signes

Propriété 1.21 - Multiplier et diviser des réels: Règle des signes

Si a et b sont deux nombres réels, alors

i) $a \times b = +(a \times b)$.

ii) $(-a) \times b = -(a \times b)$.

iii) $a \times (-b) = -(a \times b)$.

iv) $(-a) \times (-b) = +(a \times b)$.

Si a et b sont deux nombres réels avec b non nul, alors

i) $a \div b = +(a \div b)$.

ii) $(-a) \div b = -(a \div b)$.

iii) $a \div (-b) = -(a \div b)$.

iv) $(-a) \div (-b) = +(a \div b)$.

Méthode 1.22 - Règle des signes: tableau

On retiendra les deux tableaux suivants:

$\times$	+	-
+	+	-
-	-	+

$\div$	+	-
+	+	-
-	-	+

Remarque 1.23.

Pour tout réel a , on a $0 \times a = a \times 0 = 0$.

Exemple 1.24.

i) $(-3) \times 7 =$

ii) $1 \times 8 =$

iii) $(-2) \times (-6) =$

Propriété 1.25 - Positivité d'un carré

Le carré d'un nombre réel est toujours positif.

1.3 Calcul fractionnaire

1.3.1 Fraction, règle des signes et simplification

Definition 1.26 - Fraction

Soient a et b deux nombres réels, avec b non nul. On appelle fraction de a sur b et on note $\frac{a}{b}$ le réel donné par

$$\frac{a}{b} = a \div b.$$

a est le numérateur, b est le dénominateur.

Exemple 1.27.

i) $\frac{1}{2} =$

ii) $\frac{9}{4} =$

Propriété 1.28 - Règle des signes sur les fractions

Soient a et b deux nombres réels avec b non nul. On a

i) $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}.$

ii) $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}.$

Exemple 1.29.

i) $\frac{-1}{3} =$

ii) $\frac{-5}{-2} =$

Propriété 1.30 - Simplification de fractions

Soient a , b et k des nombres réels, avec b et k non nuls. On a alors

$$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}.$$

Exemple 1.31.

i) $\frac{30}{36} =$

ii) $\frac{-64}{8} =$

1.3.2 Addition et multiplication de fractions

Propriété 1.32 - Addition de fractions

Soient a, b, c et d quatre nombres réels, avec b et d non nuls. On a

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Méthode 1.33 - Dénominateur commun

Pour additionner deux fractions, on le met d'abord sous un dénominateur commun, puis ensuite on les additionne. On simplifie si besoin en dernier.

Exemple 1.34.

i) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} =$

ii) $\frac{1}{\pi^2 + 1} + \frac{1}{\pi^2 + 2} =$

△ Attention !!! -

Pour additionner deux fractions, on ne doit pas additionner numérateurs et dénominateurs. En général:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \neq \frac{a + b}{c + d}.$$

Exemple 1.35.

On a $\frac{1+3}{2+4} = \frac{3}{8}$, tandis que $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$. Ces deux fractions ne sont pas égales.

Propriété 1.36 - Multiplication de fractions

Soient a, b, c et d quatre nombres réels, avec b et d non nuls. On a

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

De plus, si a est non nul, alors $\frac{b}{a}$ est l'inverse de $\frac{a}{b}$, autrement dit

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1.$$

Méthode 1.37 -

Pour multiplier deux fractions entre elles, il suffit de multiplier les numérateurs et les dénominateurs entre eux. On simplifie si besoin en tout dernier.

Exemple 1.38.

$$\frac{5}{-6} \times \frac{3}{4} =$$

1.3.3 Division de fractions

Propriété 1.39 - Divisions de fractions

Soient a, b, c et d quatre nombres réels, avec b et c non nuls. On a

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Méthode 1.40 -

Diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse. On simplifie si besoin en tout dernier.

Exemple 1.41.

$$\frac{\frac{9}{10}}{\frac{5}{4}} =$$

1.4 Calcul sur les puissances entières relatives

1.4.1 Puissance relative d'un réel

Definition 1.42 - Puissance entière positive d'un nombre

Soit a un nombre réel et p un entier naturel. On appelle puissance p de a et on note a^p le nombre donné par

$$a^p = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0 \\ \underbrace{a \times \cdots \times a}_{p \text{ fois}} & \text{si } p > 0 \end{cases}$$

Exemple 1.43.

i) $3^3 =$

ii) $(-2)^2 =$

iii) $(-1)^0 =$

iv) $1.5^2 =$

Definition 1.44 - Puissance entière relative d'un nombre

Soit a un nombre réel non nul et p en entier relatif. On appelle puissance p de a et on note a^p le nombre donné par

$$a^p = \begin{cases} a^p & \text{si } p > 0 \\ 1 & \text{si } p = 0 \\ \frac{1}{a^{-p}} & \text{si } p < 0 \end{cases}$$

Remarque 1.45.

De cette manière, on se ramène à un calcul de puissance entière, puis il suffit de faire une inversion.

△ Attention !!! - Division par zéro

Pour une puissance négative de a , il est important que a soit non nul. En effet, on ne peut jamais diviser par 0.

Exemple 1.46.

i) $2^{-3} =$

ii) $(-3)^{-3} =$

1.4.2 Règles de calcul

Propriété 1.47 - Règles de calcul sur les puissances entières relatives

Soient a et b deux nombres réels non nuls et m, n deux nombres entiers relatifs. On a

$$\text{i)} \quad a^{m+n} = a^m \times a^n.$$

$$\text{ii)} \quad \frac{1}{a^m} = a^{-m}.$$

$$\text{iii)} \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

$$\text{iv)} \quad (a \times b)^m = a^m \times b^m.$$

$$\text{v)} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

$$\text{vi)} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m.$$

Exemple 1.48.

$$\text{i)} \quad 5^{2+1} =$$

$$\text{ii)} \quad (-1)^{14} =$$

$$\text{iii)} \quad 6^3 = (2 \times 3)^3 =$$

$$\text{iv)} \quad \left(-\frac{\pi}{2}\right)^4 =$$

$$\text{v)} \quad \text{Si } x \text{ est un réel quelconque, alors on a } (3x)^4 =$$

1.5 Calcul sur les racines carrées

1.5.1 Définition et premières propriétés

Définition 1.49 - Racine carrée d'un réel

Soit a un réel positif. On appelle racine carrée de a le réel positif b tel $b^2 = a$. On note $b = \sqrt{a}$.

Remarque 1.50.

On dit qu'un entier naturel est un carré parfait si sa racine carrée est elle-même un entier naturel. Les premiers carrés parfaits sont 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100...

Exemple 1.51.

3 est la racine carrée de 9.

Remarque 1.52.

Un carré étant toujours positif, un réel strictement négatif ne possède donc jamais de racine carrée.

Propriété 1.53 - Opposé de la racine carrée

Si a est un réel positif, alors $(-\sqrt{a})^2 = a$.

Démonstration

$$(-\sqrt{a})^2 = (-1)^2 \cdot \sqrt{a}^2 = \sqrt{a}^2 = a \text{ par définition de la racine carrée.}$$

Propriété 1.54 - Racine carrée d'un carré

Soit a un nombre réel. On a alors

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Démonstration

Dans le cas où $a > 0$ et $a = 0$, on obtient le résultat en utilisant la définition de la racine carrée car a est positif.

Si $a < 0$, alors on a $-a > 0$ et $(-a)^2 = (-1)^2 \cdot a^2 = a^2$. Le réel positif de carré a^2 est donc $-a$, c'est la racine carrée.

1.5.2 Produit et quotient de racines carrées

Propriété 1.55 - Multiplication et division de racines carrées

Soient a et b deux nombres réels positifs avec b non nul. On a

$$\text{i) } \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}, \quad \text{ii) } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad \text{iii) } \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{b}.$$

Exemple 1.56.

$$\text{i) } \sqrt{\frac{9}{4}} =$$

$$\text{ii) } \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$\text{iii) Si } x \text{ est un réel positif, alors } \sqrt{9x^2} =$$

Méthode 1.57 - Simplification de racines carrées

En pratique, on cherchera à faire apparaître des carrés dans le produit puis à simplifier le plus possible, de façon à avoir le nombre le plus petit possible sous la racine carrée.

Exemple 1.58.

i) $\sqrt{8} =$

ii) $\sqrt{80} =$

iii) $\sqrt{12\pi^2} =$

△ Attention !!! - Racine carrée et multiplication

La racine carrée d'une somme n'est, en général, pas égale à la somme des racines carrées, autrement dit, si a et b sont deux réels positifs:

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Exemple 1.59.

i) $\sqrt{4^2 + 3^2} =$

ii) $\sqrt{4^2} + \sqrt{3^2} =$