

Chapitre 4

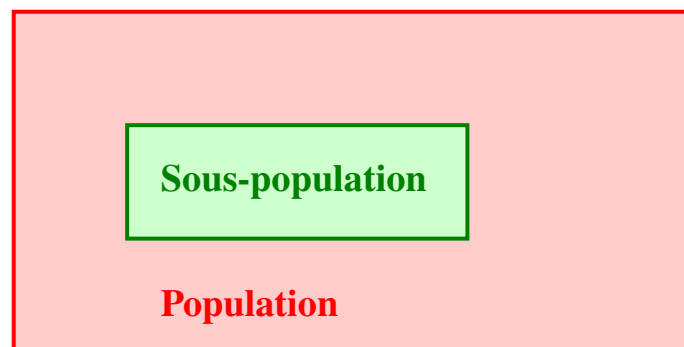
Proportions et Évolutions

4.1 Proportion, pourcentage d'une sous-population dans une population

4.1.1 Population et sous-population

Definition 4.1 - Population et sous-population

Une population est un ensemble d'objets ou d'individus étudiés. Une sous-population est une partie de la population possédant les mêmes caractéristiques.



Exemple 4.2.

- i) Dans un lycée (population formée par les élèves), on étudie le nombre d'élèves suivant l'option maths. La sous-population est constituée des élèves suivant l'option maths.
- ii) Dans une population de koalas, on étudie une sous-population dont la taille est inférieure à 75 centimètres.

4.1.2 Proportion et pourcentage

Definition 4.3 - Proportion et pourcentage

Si on a:

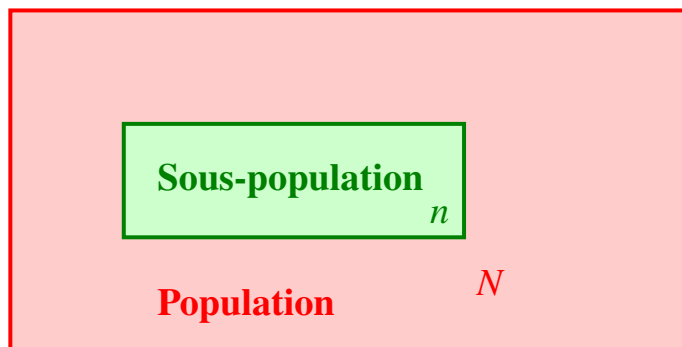
- i) Une population de taille N (où N désigne un entier naturel non nul).
- ii) Une sous-population donnée de taille n (où n désigne un entier naturel non nul et inférieur ou égal à N).

Alors la proportion de la sous-population (que l'on note p) correspond au rapport entre la taille de la sous-population divisé par la taille de la population, autrement dit:

$$p = \frac{n}{N}.$$

Le pourcentage, lui, est donné par

$$p = 100 \times \frac{n}{N} \%$$



$$p = \frac{n}{N} = 100 \times \frac{n}{N} \%$$

Remarque 4.4.

On a donc

$$\text{Proportion de la sous-population} = \frac{\text{Taille de la sous-population}}{\text{Taille de la population}}.$$

En terme de pourcentage, cela donne:

$$\text{Pourcentage de la sous-population} = 100 \times \frac{\text{Taille de la sous-population}}{\text{Taille de la population}} \%.$$

Exemple 4.5.

- i) Dans un lycée de 1200 élèves, 300 suivent l'option maths. Déterminer la proportion et le pourcentage d'élèves suivant l'option maths.

- ii) En Australie vivent 80 000 koalas. 90% d'entre eux mesurent moins de 75 centimètres. Déterminer la proportion de koalas mesurant moins de 75 centimètres. En déduire le nombre de koalas mesurant moins de 75 centimètres.

4.2 Pourcentage de pourcentage

Propriété 4.6 - Proportion de proportion , pourcentage de pourcentage

On considère:

- i) Une population A de taille N (où N est un entier naturel non nul).
- ii) Une sous-population B_1 de taille n_1 (où n_1 est un entier naturel non nul et inférieur ou égal à N).
- iii) Une sous-population B_2 de la sous-population (ou sous-sous-population) de taille n_2 (où n_2 est un entier naturel non nul et inférieur ou égal à n_1).

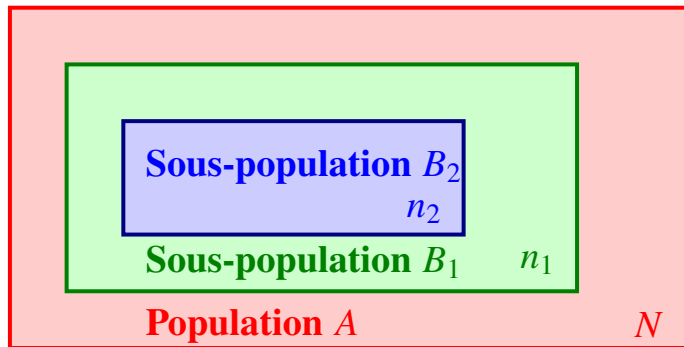
Notons p_1 la proportion de la sous-population B_1 dans la population A et p_2 la proportion de la sous-population B_2 dans la sous-population B_1 .

Alors, la proportion de la sous-population B_2 dans la population A , que l'on note p , est donnée par

$$p = p_1 \times p_2.$$

En terme de pourcentage, on a donc

$$p = 100 \times p_1 \times p_2\%.$$



$$p = \frac{n_2}{N} = 100 \times \frac{n_2}{N} \%$$

$$p = \frac{n_1}{N} \times \frac{n_2}{n_1} = 100 \times \frac{n_2}{N} \%$$

$$p = 100 \times p_1 \times p_2 \%$$

Méthode 4.7 - Expression en pourcentage

Même si l'on connaît p_1 et/ou p_2 sous forme de pourcentage, on doit les convertir sous forme de proportions (division par 100) pour obtenir p .

Concrètement, pour effectuer nos multiplications et/ou divisions, on devra toujours passer par les proportions, puis ensuite revenir aux pourcentages si on nous demande un pourcentage.

Exemple 4.8.

- i) Dans un lycée de 1200 élèves, on compte 40% de filles. Parmi les filles, 60% suivent l'option maths. Quelle est la proportion de filles suivant l'option maths ?

- ii) Dans un refuge pour animaux, on compte 300 chiens. On sait qu'il existe 27 chiens guides qui sont des labradors. 90% des chiens guides étant des labradors, on veut connaître la proportion de chiens guide dans le refuge.

4.3 Évolutions, évolutions successives et réciproques

4.3.1 Pourcentage et coefficient multiplicatif

Propriété 4.9 - Pourcentage et evolution

Soit T un nombre réel.

- i) Augmenter un nombre positif de T % revient à le multiplier par $1 + \frac{T}{100}$.
- ii) Diminuer un nombre positif de T % revient à le multiplier par $1 - \frac{T}{100}$.

Les valeurs utilisées pour la multiplication sont appelés **coefficients multiplicatifs**.

Exemple 4.10.

- i) Ajouter 25 % à un nombre revient à le multiplier par 1.25.
- ii) Retirer 7% à un nombre revient à le multiplier par 0.93.
- iii) Entre 2000 et 2010, la population de la Californie a augmenté de 10 %. En 2000, la population était de 34 millions d'habitants. Quelle était la population en 2010 ?
- iv) En 2025, une entreprise vendait un modèle d'ordinateur portable à 400€. Entre 2025 et 2026, l'entreprise a diminué le prix de vente de cet ordinateur portable de 8 %. On cherche à calculer le prix du modèle d'ordinateur portable en 2026.

4.3.2 Taux de variation

Definition 4.11 - Taux de variation

Soient deux nombres réels strictement positifs x_1 et x_2 . Le taux de variation entre x_1 et x_2 , que l'on note t , est donné par

$$t = \frac{x_2 - x_1}{x_1}.$$

Propriété 4.12 - Augmentation et diminution

Soient deux nombres réels strictement positifs x_1 et x_2 . On considère le taux de variation t entre x_1 et x_2 .

- i) Si $t > 0$, alors on a une augmentation.
- ii) Si $t < 0$, alors on a une diminution.

Méthode 4.13 -

Le taux de variation entre une valeur de départ et une valeur d'arrivée est donné par

$$\text{taux de variation} = \frac{\text{Valeur d'arrivée} - \text{Valeur de départ}}{\text{Valeur de départ}}$$

△ Attention !!! - Taux de variation vs pourcentage

Le taux de variation n'est pas un pourcentage. Pour obtenir l'évolution en terme de pourcentage, il faut multiplier ce taux de variation par 100.

Exemple 4.14.

- i) La population de Rennes est passée de 210 000 habitants en 2010 à 220 500 habitants en 2020. On veut connaître le taux de variation de la population de cette ville entre 2010 et 2020.

- ii) En 2024, une usine a produit 800 avions. En 2025, la production est passée à 704 avions. On veut calculer le taux de variation de la production d'avions entre 2024 et 2025.

Propriété 4.15 - Taux d'évolution et pourcentage

Soient deux nombres réels strictement positifs x_1 et x_2 . On considère le taux de variation t entre x_1 et x_2 .

- i) Si $t < 0$, x_1 est diminué de $100 \times (-t)$ % si et seulement si le taux de variation entre x_1 et x_2 est t .
- ii) Si $t > 0$, x_1 est augmenté de $100 \times t$ % si et seulement si le taux de variation entre x_1 et x_2 est t .

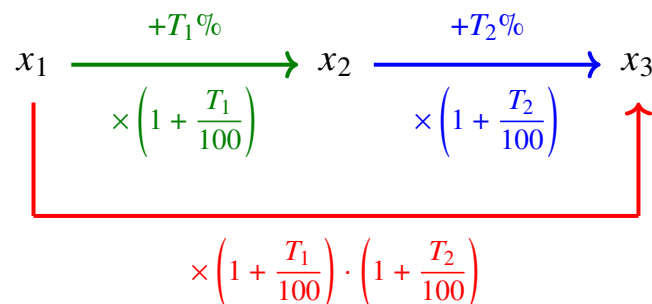
4.3.3 Évolutions successives

Propriété 4.16 - Evolutions successives

Soient x_1 , x_2 et x_3 trois nombres réels strictement positifs. On considère que:

- i) x_1 évolue de T_1 % (où T_1 est un nombre réel, positif ou négatif) pour atteindre x_2 .
- ii) x_2 évolue de T_2 % (où T_2 est un nombre réel, positif ou négatif) pour atteindre x_3 .

Alors x_1 est multiplié par $\left(1 + \frac{T_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{T_2}{100}\right)$ pour atteindre x_3 .



Méthode 4.17 - Revenir aux coefficients multiplicatifs

Il faut toujours passer par les coefficients multiplicatifs. Ainsi, si l'évolution est donnée en pourcentage, il faut passer aux coefficients multiplicatifs, puis multiplier les deux coefficients multiplicatifs obtenus.

On obtient le coefficient multiplicatif global, que l'on note c . Pour obtenir le pourcentage d'évolution, on calcule $100 \times (c - 1)$.

Exemple 4.18.

Une boulangerie a augmenté ses ventes de 10 % entre 2023 et 2024, puis a diminué ses ventes de 8 % entre 2024 et 2025. Calculer le taux de variation entre 2023 et 2025.

△ Attention !!! - Ne pas additionner les pourcentages

En général, l'évolution entre x_1 et x_2 n'est pas de $(T_1 + T_2)$ %.

Exemple 4.19.

Un arbre grandit de 10 % chaque année. Il mesure au départ 100 centimètres.

Au bout de la première année, il mesurera $100 \times 1.1 = 110$ centimètres, et au bout de la seconde année, il mesurera $110 \times 1.1 = 121$ centimètres.

Ceci est différent d'une augmentation de $(10 + 10)$ % = 20%, puisque l'on a dans ce cas $100 \times 1.2 = 120$ centimètres.

4.3.4 Evolutions réciproques

Propriété 4.20 - Evolution réciproque

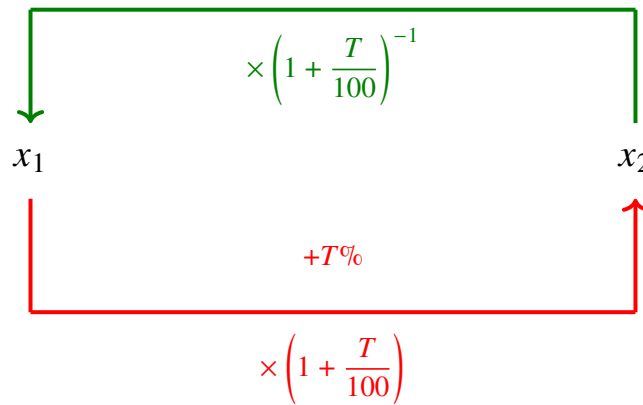
Soient x_1 et x_2 deux nombres réels strictement positifs. On considère que x_1 évolue de T % (où T est un nombre réel, positif ou négatif) pour atteindre x_2 .

Alors x_2 est multiplié par $\left(1 + \frac{T}{100}\right)^{-1}$ pour atteindre x_1 .

Méthode 4.21 - Inversion du coefficient multiplicatif

On doit, là encore, revenir au coefficient multiplicatif afin d'avoir l'évolution réciproque en l'inversant.

En notant c le coefficient multiplicatif obtenu, on obtient le pourcentage en calculant $100 \times (c - 1)$.



Exemple 4.22.

Une compagnie de trains a transporté des passagers en 2024. En 2025, le nombre de passagers qu'elle a transporté a augmenté de 25 %. On veut connaître le pourcentage de baisse pour que le nombre de passagers transporté en 2026 soit similaire à celui de 2024.

△ Attention !!! - Ne pas prendre l'opposé du pourcentage

Si l'évolution entre x_1 et x_2 est de T %, alors l'évolution entre x_2 et x_1 n'est, en général, pas de $-T$ %.

Exemple 4.23.

Une métropole compte 10 millions d'habitants en 2020. En 2021, le nombre d'habitants qu'elle compte a diminué de 20 %. On veut connaître le pourcentage d'augmentation pour que le nombre d'habitants en 2022 soit similaire à celui de 2020.

En 2021, on a une diminution de 20%, soit une multiplication par 0.8, pour une population de 8 millions d'habitants.

En 2022, on devra donc avoir une multiplication de $\frac{1}{0.8} = 1.25$ par rapport à 2021, soit une augmentation de 25 %.

Si, en 2022, on avait eu une augmentation de 20% par rapport à 2021, alors on aurait $8 \times 1.2 = 9.6$ millions d'habitants, ce qui est différent du chiffre de 2020. L'évolution n'est pas réciproque.