

Chapitre 5

Intervalles de $\mathbb{R}$, valeur absolue

5.1 Droite numérique

5.1.1 Représentation des réels

Definition 5.1 -

On appelle droite numérique (ou **droite graduée**) une droite comportant des graduations, et permettant de représenter n'importe quel nombre réel.

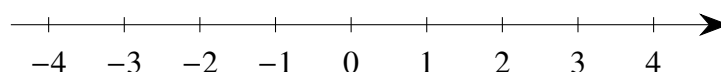
- i) Origine : Elle possède un point de repère fixe qui correspond généralement au nombre zéro (0).
- ii) Sens : Les nombres augmentent quand on va vers la droite (positifs) et diminuent quand on va vers la gauche (négatifs).
- iii) **Graduation** : L'espace entre deux nombres consécutifs est toujours le même (pas régulier).
- iv) Correspondance : Chaque point de la droite correspond à un nombre unique, qu'on appelle l'**abscisse** de ce point.



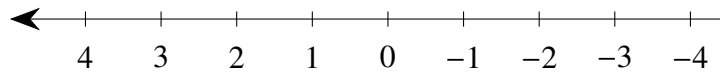
Exemple 5.2.

Parmi les exemples suivants, lesquels sont des droites graduées ? Justifier pourquoi. Si c'est une droite graduée, préciser la longueur de l'espace entre deux graduations.

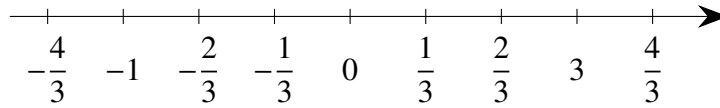
i)



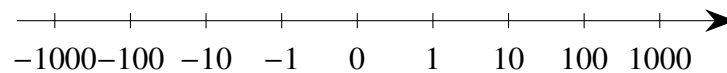
ii)



iii)

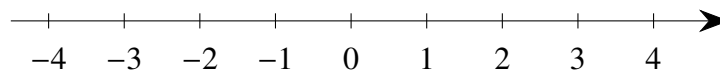


iv)

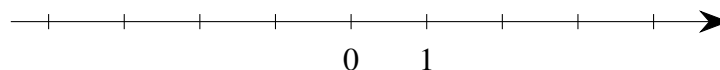


Remarque 5.3.

Parfois, pour alléger les notations, on ne précise que le premier pas de graduation. Par exemple, au lieu d'écrire



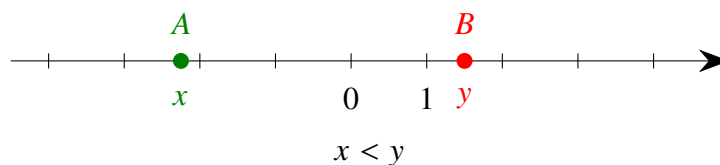
on pourra simplement écrire

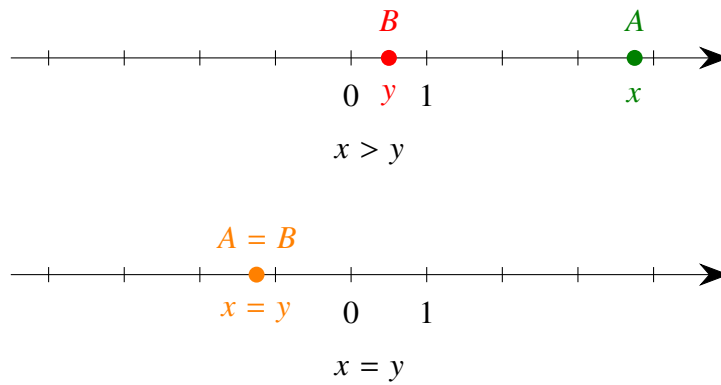


Propriété 5.4 -

Soient x et y deux nombres réels. On note A et B les points représentant respectivement x et y sur la droite graduée. A et B ont donc pour abscisse respective x et y .

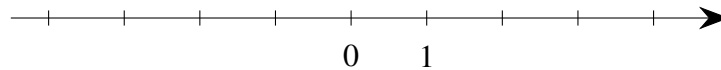
- i) $x < y$ si et seulement si A est plus à gauche que B .
- ii) $x > y$ si et seulement si A est plus à droite que B .
- iii) $x = y$ si et seulement si A est identique à B .





Exemple 5.5.

Placer sur la droite graduée les nombres -2 , π et $\frac{2}{3}$.



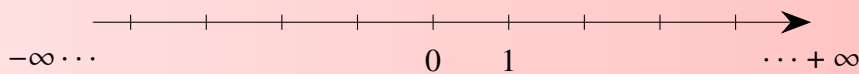
5.1.2 Notations infinies

Definition 5.6 -

Sur une droite numérique, les nombres se prolongent

- i) Indéfiniment vers la gauche.
- ii) Indéfiniment vers la droite.

On note respectivement $-\infty$ et $+\infty$ ces deux directions



Remarque 5.7.

Dire que l'on va vers $+\infty$ signifie que l'on va aussi loin que l'on veut vers la droite sur la droite numérique. De même, dire que l'on va vers $-\infty$ signifie que l'on va aussi loin que l'on veut vers la gauche sur la droite numérique.

△ Attention !!! -

$+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des nombres réels. Ce sont simplement des symboles indiquant les deux directions de la droite numérique et illustrant le fait qu'il n'existe aucun nombre réel plus grand que tous les autres, ni aucun nombre réel plus petit que tous les autres.

5.2 Intervalles et notations

5.2.1 Intervalles bornés

Definition 5.8 -

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$ et I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que I est un **intervalle borné de $\mathbb{R}$** s'il a l'une des quatre formes suivantes:

- i) $I = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$. On note dans ce cas $I = [a, b]$.
- ii) $I = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$. On note dans ce cas $I =]a, b[$.
- iii) $I = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$. On note dans ce cas $I = [a, b[$.
- iv) $I = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$. On note dans ce cas $I =]a, b]$.

On dit que a et b sont les **bornes de l'intervalle I** .

Remarque 5.9.

Lorsque le crochet est tourné vers la borne, cette dernière est incluse dans l'intervalle. Au contraire, si le crochet est tourné vers l'opposé de la borne, cette dernière est exclue de l'intervalle.

Remarque 5.10.

- i) Si $I = [a, b]$, on dit que I est un intervalle fermé (fermé en a et fermé en b).
- ii) Si $I =]a, b[$, on dit que I est un intervalle ouvert (ouvert en a et ouvert en b).
- iii) Si $I = [a, b[$, on dit que I est un intervalle semi-ouvert (fermé en a et ouvert en b).
- iv) Si $I =]a, b]$, on dit que I est un intervalle semi-ouvert (ouvert en a et fermé en b).

Exemple 5.11.

Écrire l'intervalle correspondant:

- i) $\{x \in \mathbb{R} : 2 < x \leq 5\} =$
- ii) $\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 0\} =$

Écrire l'ensemble correspondant

- i) $\left[-3, \frac{1}{2}\right[=$
- ii) $] -\pi, 2[=$

Propriété 5.12 -

Si a est un nombre réel, alors

- i) $[a, a] = \{a\}$, on dit que c'est le singleton $\{a\}$, autrement dit un ensemble composé d'un unique nombre: a .
- ii) $]a, a[= \emptyset$. C'est l'ensemble vide.

Exemple 5.13.

i) $] - 1, -1[=$

ii) $[0, 0] = 0$

5.2.2 Intervalles non-bornés

Definition 5.14 -

Soient a un nombre réel et I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que I est un **intervalle non borné de $\mathbb{R}$** s'il a l'une des cinq formes suivantes:

- i) $I = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$. On note dans ce cas $I = [a, +\infty[$.
- ii) $I = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$. On note dans ce cas $I =]a, +\infty[$.
- iii) $I = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$. On note dans ce cas $I =]-\infty, a]$.
- iv) $I = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$. On note dans ce cas $I =]-\infty, a[$.
- v) $I = \mathbb{R}$. On note dans ce cas $I =]-\infty, +\infty[$.

Remarque 5.15.

On parle d'intervalle non borné car I n'est pas "limité" dans au moins l'une des deux directions.

△ Attention !!! -

Puisque $-\infty$ et $+\infty$ ne sont pas des nombres réels, on ne peut pas écrire d'intervalle fermé en ces deux directions. Par exemple, les notations $[-\infty, a]$ ou $]a, +\infty]$ n'ont aucun sens.

Remarque 5.16.

- i) Si $I = [a, +\infty[$, on dit que I est un intervalle semi-ouvert. La borne a est incluse et l'intervalle se prolonge indéfiniment vers $+\infty$.
- ii) Si $I =]a, +\infty[$, on dit que I est un intervalle ouvert. La borne a est exclue et l'intervalle se prolonge indéfiniment vers $+\infty$.
- iii) Si $I =]-\infty, a]$, on dit que I est un intervalle semi-ouvert. La borne a est incluse et l'intervalle se prolonge indéfiniment vers $-\infty$.
- iv) Si $I =]-\infty, a[$, on dit que I est un intervalle ouvert. La borne a est exclue et l'intervalle se prolonge indéfiniment vers $-\infty$.

Exemple 5.17.

Écrire l'intervalle correspondant.

i) $\left\{x \in \mathbb{R} : -\frac{2}{3} < x\right\} = \left]-\frac{2}{3}, +\infty\right[.$

ii) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 4\} =]-\infty, 4].$

Écrire l'ensemble correspondant

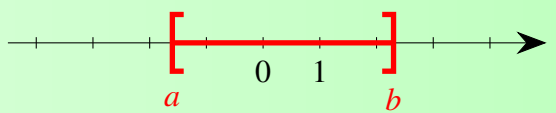
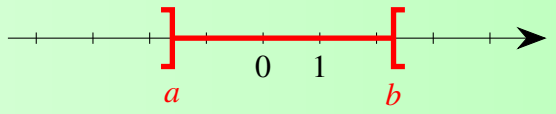
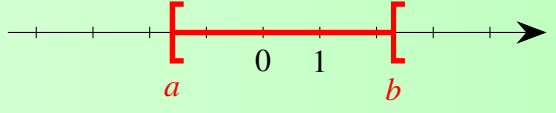
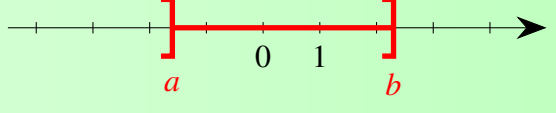
i) $\left]-\infty, \frac{1}{7}\right[= \left\{x \in \mathbb{R} : x < \frac{1}{7}\right\}.$

ii) $\left[-\sqrt{2}, +\infty\right[= \left\{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{2} \leq x\right\}.$

5.2.3 Représentation sur la droite graduée

Théorème 5.18 -

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$. Tout intervalle de $\mathbb{R}$ délimité par a et b possède la représentation suivante sur la droite graduée.

Intervalle	Ensemble	Droite graduée
$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	
$]a, b[$	$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	
$[a, b[$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	
$]a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$	

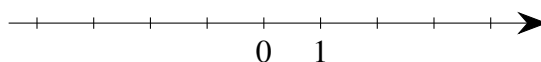
Remarque 5.19.

Tout comme sur la manière d'écrire un intervalle borné, pour le représenter sur la droite graduée, on place un crochet au niveau de la borne, en la tournant vers l'intérieur de l'intervalle lorsqu'elle est incluse et vers l'extérieur de l'intervalle lorsqu'elle est exclue.

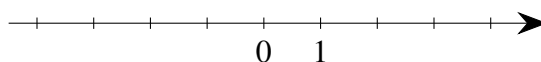
Exemple 5.20.

Représenter l'intervalle sur la droite graduée

- i) L'intervalle $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ se représente

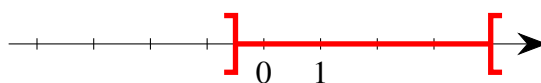


- ii) L'intervalle $[-3, -1]$ se représente

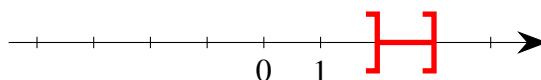


Décrire l'intervalle représenté sur la droite graduée

i)



ii)



Théorème 5.21 -

Soit a un réel. Tout intervalle de $\mathbb{R}$ délimité par a mais non borné possède la représentation suivante sur la droite graduée.

Intervalle	Ensemble	Droite graduée
$[a, +\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$	
$]a, +\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} : a < x\}$	
$] - \infty, a]$	$\{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$	
$] - \infty, a[$	$\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$	
$] - \infty, +\infty[$	$\mathbb{R}$	

Remarque 5.22.

Concrètement, les intervalles de $\mathbb{R}$ sont tous les morceaux de la droite numérique qui sont **d'un seul tenant**, autrement dit en un seul morceau.

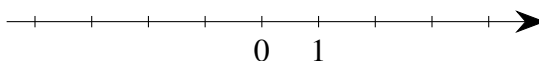
Remarque 5.23.

Lorsque l'on écrit $x \leq a$, on peut tout-à-fait écrire $x \geq a$. De la même manière, dire que $x < a$ revient à dire que $x > a$.

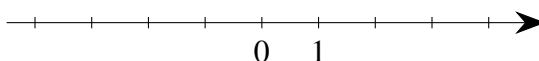
Exemple 5.24.

Représenter l'intervalle sur la droite graduée

i) L'intervalle $[1, +\infty[$ se représente

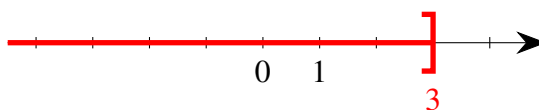


ii) L'intervalle $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ se représente

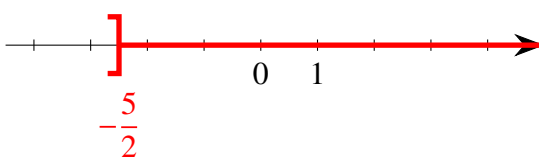


Décrire l'intervalle représenté sur la droite graduée.

i)



ii)



5.3 Valeur absolue

5.3.1 Définition

Definition 5.25 -

Soit x un nombre réel. La **valeur absolue** de x , que l'on note $|x|$, est définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Remarque 5.26.

La valeur absolue d'un réel, c'est ce nombre sans son signe.

Méthode 5.27 -

Comment calculer la valeur absolue d'un nombre réel ?

Si l'on a un nombre réel x qui est positif, on le laisse tel quel. S'il est négatif, on enlève le signe "-" (moins).

Exemple 5.28.

Calculer la valeur absolue des nombres suivants:

- i) $|2| =$
- ii) $|- \pi| =$
- iii) $|- 121.125| =$
- iv) $|0| =$

Propriété 5.29 -

Pour tout réel x , on a,

- i) $|-x| = |x|$.
- ii) $|x| \geq 0$.

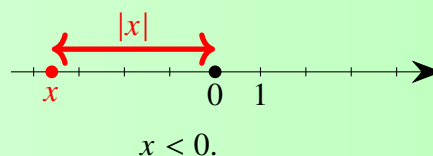
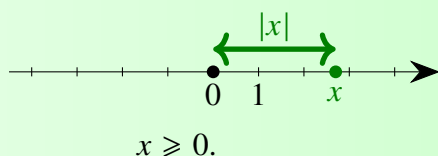
Exemple 5.30.

- i) $|-5| = |5| = 5$
- ii) $|\sqrt{2}| = |-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$.

5.3.2 Distance d'un point à l'origine

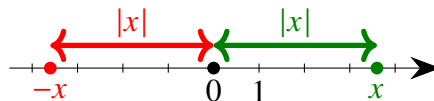
Propriété 5.31 -

Soit x un nombre réel. Alors la valeur absolue de x (que l'on note donc $|x|$) est, sur la droite graduée, la distance entre l'origine (le point d'abscisse 0) et le point d'abscisse x .



Remarque 5.32.

Si x est un nombre réel quelconque, alors les points d'abscisses x et $-x$ sont à égale distance de l'origine.



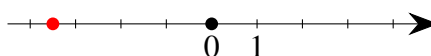
Méthode 5.33 -

Distance d'un point à l'origine sur une droite graduée
=
Valeur absolue de l'abscisse de ce point.

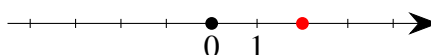
Exemple 5.34.

Sur une droite graduée, on peut calculer la distance entre l'origine et le point.

i)



ii)



5.3.3 Distance entre deux réels

Définition 5.35 -

Soient a et b deux réels. On appelle la **distance entre les réels a et b** le réel positif $|b - a|$.

Propriété 5.36 -

Soient a et b deux nombre réels.

- i) La distance entre a et b est égale à la distance entre b et a . Autrement dit, $|b - a| = |a - b|$ (l'ordre importe peu).
- ii) La distance entre a et b est toujours positive, autrement dit: $|b - a| \geq 0$.

Méthode 5.37 -

Distance entre deux réels
=
valeur absolue de la différence (sans importance de l'ordre).

Exemple 5.38.

Calculer la distance entre les deux nombres

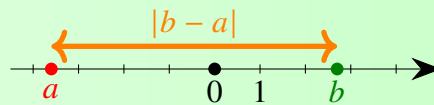
i) $|11 - 15| =$

ii) $|2 - \pi| =$

iii) $\left| \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right| =$

Théorème 5.39 -

Soient a et b deux réels. Alors les points d'abscisses a et b situés sur la droite graduée sont distants de la valeur $|b - a|$.



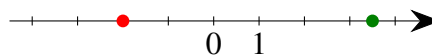
Méthode 5.40 -

Distance entre deux points sur une droite graduée
=
Distance entre les deux abscisses (comme nombres réels).

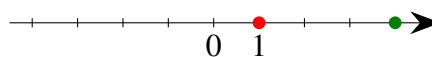
Exemple 5.41.

Sur la droite graduée, calculer la distance entre les deux points.

i)



ii)



5.3.4 Intervalle centré en un nombre

Théorème 5.42 -

Soient a un réel et r un réel strictement positif. On a alors

Intervalle	Ensemble	Droite graduée
$[a-r, a+r]$	$\{x \in \mathbb{R} : x - a \leq r\}$	
$]a-r, a+r[$	$\{x \in \mathbb{R} : x - a < r\}$	

Méthode 5.43 -

Intervalle **fermé** $[a - r, a + r]$

=

Ensemble des réels x situés à une distance de a **inférieure ou égale** à r .

Intervalle **ouvert** $]a - r, a + r[$

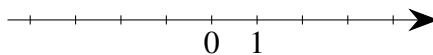
=

Ensemble des réels x situés à une distance de a **strictement inférieure** à r .

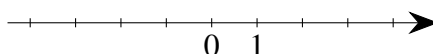
Exemple 5.44.

Décrire l'intervalle centré un un nombre

i) $\left\{x \in \mathbb{R} : \left|x - \frac{3}{2}\right| \leq 1\right\} =$

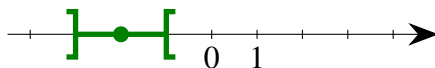


ii) $\left\{x \in \mathbb{R} : |x - 1| < \frac{3}{2}\right\} =$

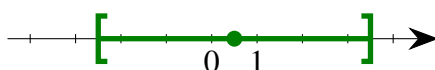


Inversement, on peut retrouver l'intervalle centré en un nombre à partir d'une représentation sur la droite graduée.

i)



ii)



5.4 Appartenance, union, intersection

Definition 5.45 -

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que x **appartient à l'intervalle** I si x vérifie la définition de l'intervalle. On note $x \in I$.

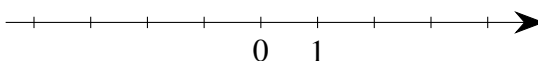
Dans le cas contraire, on dit que x **n'appartient pas à l'intervalle** I et on note $x \notin I$.

Remarque 5.46.

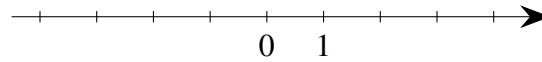
On peut aussi le vérifier graphiquement (à l'aide de la droite graduée).

Exemple 5.47.

i) Vérifier si les nombres 1 , $\frac{5}{2}$ et π appartiennent à l'intervalle $]2, +\infty[$.



ii) Vérifier si les nombres $-\pi$, 1 et $\frac{5}{2}$ appartiennent à l'intervalle $\left[-2, \frac{5}{2}\right]$.



Definition 5.48 -

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

- i) L'union des intervalles I et J , que l'on note $I \cup J$, est l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}$ qui appartiennent à I ou à J (l'un des deux).
- ii) L'intersection des intervalles I et J , que l'on note $I \cap J$, est l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}$ qui appartiennent à I et à J (les deux à la fois).

Méthode 5.49 -

Appartenir à **la réunion** de deux intervalles
=
Appartenir à **au moins un des deux** intervalles

Appartenir à **l'intersection** de deux intervalles
=
Appartenir **aux deux intervalles à la fois**

Propriété 5.50 -

Une intersection de deux intervalles reste un intervalle.

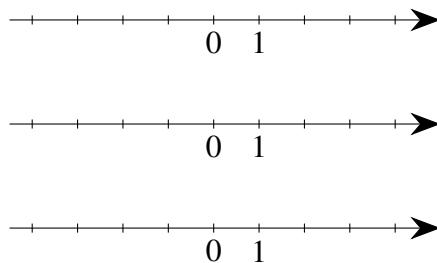
△ Attention !!! -

La réunion de deux intervalles n'est, en général, pas un intervalle.

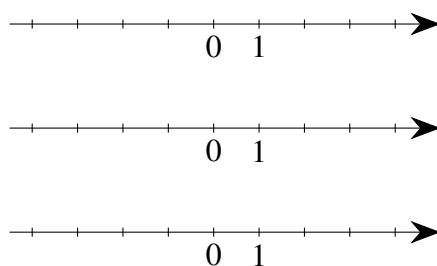
Exemple 5.51.

On peut tracer une réunion et une intersection d'intervalles:

- i) Si on a ces deux intervalles: $I = [-1, 3]$ et $J =]0, 4[$.

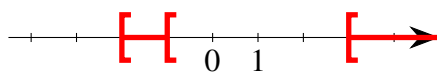


- ii) Si on a ces deux intervalles: $I =]-\infty, 1]$ et $J = [1, 4]$.

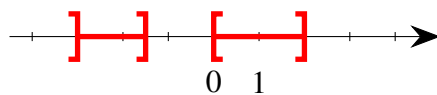


De la même manière, on doit pouvoir reconnaître une réunion d'intervalles.

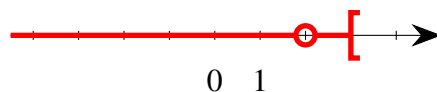
- i)



- ii)



- iii)



5.5 Encadrement d'un réel par un décimal

5.5.1 Définition

Definition 5.52 -

Soit x un nombre réel. On dit que x est encadré par deux décimaux a et b avec une précision de 10^{-n} (où n est un entier naturel) si on a

$$a \leq x \leq b$$

et si $b - a = 10^{-n}$. On dit alors que:

- i) a est l'**approximation de x à 10^{-n} près par défaut**.
- ii) b est l'**approximation de x à 10^{-n} près par excès**.

Méthode 5.53 -

Comment encadrer un nombre réel avec une précision de 10^{-n} (où n est un entier naturel) ?

Pour cela, on prend son écriture avec des virgules. On ne garde que les n premiers chiffres après la virgule, on obtient la valeur approchée par défaut.

Pour obtenir la valeur approchée par excès, on ajoute 10^{-n} à la valeur approchée par défaut.

Exemple 5.54.

On veut approcher les nombres suivants avec une précision souhaitée.

- i) Que vaut l'approximation de $\frac{1}{3} = 0.33333333...$ à 10^{-4} près ?

ii) Que vaut l'approximation de $\sqrt{2} = 1.41421356237\dots$ à 10^{-7} près ?

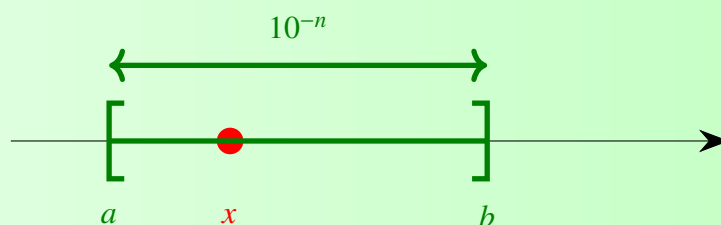
iii) Que vaut l'approximation de $\pi = 3.14159265359\dots$ à 10^{-5} près ?

5.5.2 Lien avec la droite numérique

Propriété 5.55 -

Soit x un nombre réel. Soient a et b les valeurs approchées de x à 10^{-n} près (où n est un entier naturel), respectivement par défaut et par excès.

x est donc contenu dans l'intervalle $[a, b]$ et la distance entre a et b est de 10^{-n} .



Exemple 5.56.

On veut approcher les nombres suivants avec une précision souhaitée et déterminer l'intervalle d'encadrement.

i) Que vaut l'approximation de $\frac{1}{3} = 0.33333333\dots$ à 10^{-4} près ?

ii) Que vaut l'approximation de $\sqrt{2} = 1.41421356237\dots$ à 10^{-7} près ?

iii) Que vaut l'approximation de $\pi = 3.14159265359\dots$ à 10^{-5} près ?