

Chapitre 6

Fonctions

6.1 Définition et vocabulaire

6.1.1 Introduction

Exemple 6.1.

Dans un parc d'attractions, on propose une formule permettant de payer un tarif réduit pour les attractions. L'achat de l'abonnement coûte 10€ et l'entrée d'une attraction coûte 5€.

Compléter le tableau suivant:

Nombre d'attractions	Prix (€)
1	
2	
5	
10	
x	

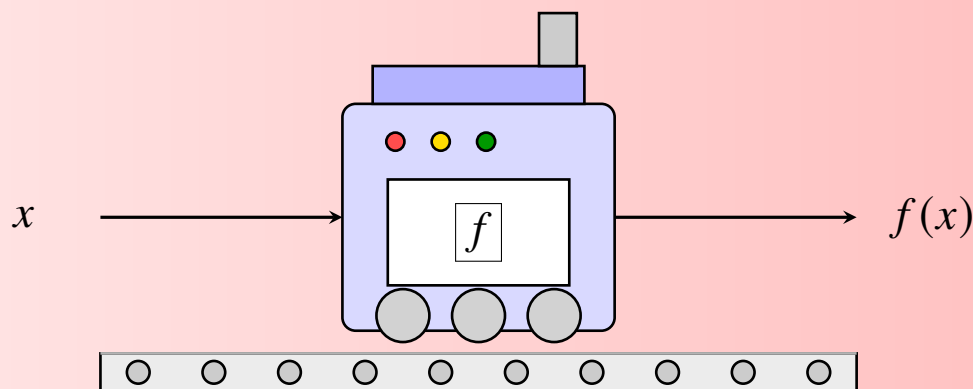
La correspondance entre x et $10 + 5x$ peut être appelée f , on note

$$f : x \mapsto 10 + 5x.$$

6.1.2 Définition d'une fonction

Definition 6.2 -

Une **fonction** est une "machine" mathématique qui, à un nombre donné x , fait correspondre un autre nombre. Si cette fonction s'appelle f . On le note $f(x)$ et on le prononce " f de x ".



Machine = Fonction f

Exemple 6.3.

- i) Dans l'exemple précédent, l'opération qui donne le prix en fonction du nombre de places dans le parc d'attraction est donc la fonction $f : x \mapsto 10 + 5x$. On peut donc écrire $f(x) = 10 + 5x$. En particulier, on a $f : 1 \mapsto 15$ et $f : 5 \mapsto 35$. On peut donc écrire $f(1) = 15$ et $f(5) = 35$.
- ii) Si une fonction f prend en entrée un nombre réel x , et rend en sortie son carré, comment écrire f ?

Remarque 6.4.

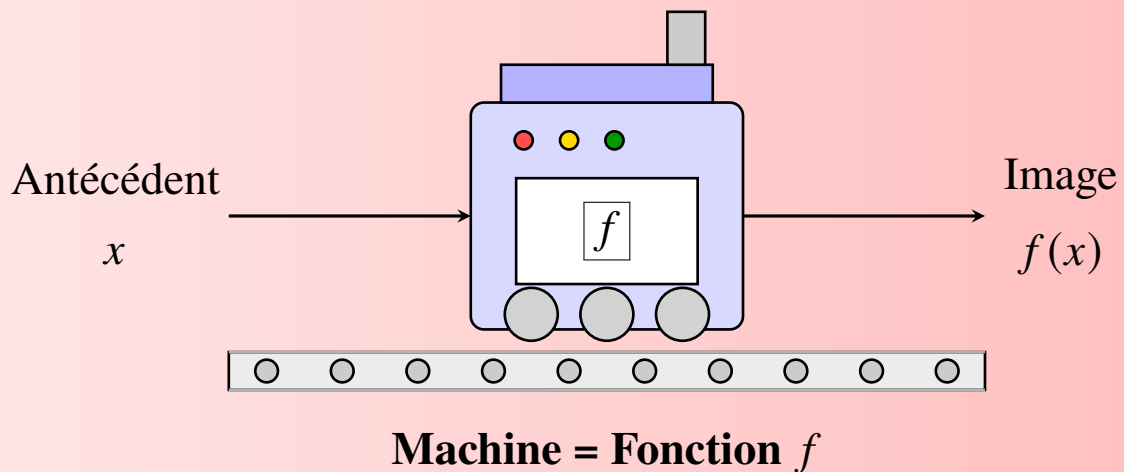
Une fonction donne un seul résultat possible lorsqu'elle est appliquée à un nombre, mais plusieurs nombres peuvent donner le même résultat.

6.1.3 Image et antécédent

Definition 6.5 -

L'entrée x s'appelle l'**antécédent**. La sortie $f(x)$ s'appelle l'**image**. On dit que:

- i) L'image de x par f est $f(x)$.
- ii) x est un antécédent de $f(x)$ par f .



Exemple 6.6.

- i) Si on considère la fonction introduite au début du chapitre $f : x \mapsto 10 + 5x$, quelle-est l'image de 1 par f ? Donner un antécédent de 60 par f .
- ii) Si on considère la fonction $f : x \mapsto x^2$, quelle-est l'image de 3 par f ? Trouver deux antécédents de 9 par f

6.1.4 Tableau de valeurs

Definition 6.7 -

Un tableau de valeurs permet de regrouper, dans une première ligne, différentes valeurs de la variable de départ x . Dans une seconde ligne, ce tableau regroupe les valeurs prises par f sur les valeurs de x correspondantes.

Méthode 6.8 -

Concrètement, on a:

x	Première valeur de x	$\dots$	Dernière valeur de x
(x)	$f(\text{Première valeur de } x)$	$\dots$	$f(\text{Dernière valeur de } x)$

Exemple 6.9.

- i) Pour la fonction $f : x \mapsto 10 + 5x$, on peut résumer les différentes valeurs testées en introduction

x	1	2	5	10
$f(x)$				

- ii) Pour la fonction $f : x \mapsto x^2$, compléter le tableau de valeurs:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$								

- iii) Pour la fonction $f : x \mapsto 3x + \frac{1}{2}$, compléter le tableau de valeurs:

x	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	1	5	$\frac{20}{3}$	10
$f(x)$								

6.1.5 Ensemble de définition

Definition 6.10 -

Le **domaine de définition** d'une fonction f est l'ensemble des valeurs de départ possibles de f . On le note $\mathcal{D}_f$.

Exemple 6.11.

- i) Pour la fonction $f : x \mapsto 10 + 5x$ donnant le prix en fonction du nombre de places au parc d'attraction, on a

- ii) Pour la fonction $f : x \mapsto x^2$, on a

- iii) Si on achète du carburant vendu à 2€ le litre, en notant f la fonction qui donne le prix payé en fonction du nombre de litres de carburant x achetés, on a $f : x \mapsto 2x$ et

6.2 Courbe représentative

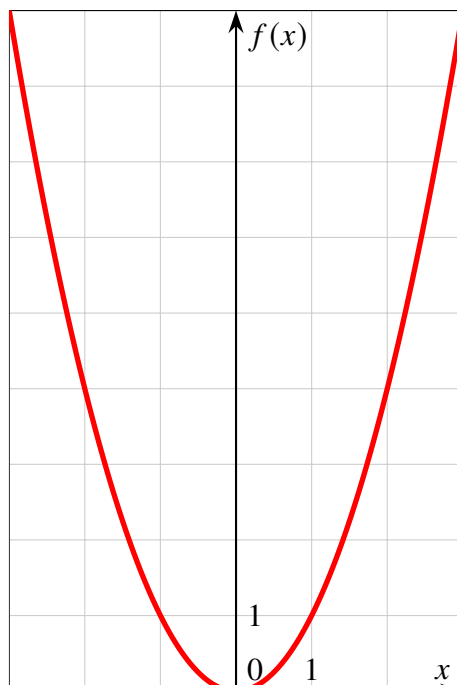
Definition 6.12 -

Soit f une fonction. On appelle **courbe représentative de f** l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ pour tout élément x d'une partie de $\mathcal{D}_f$.

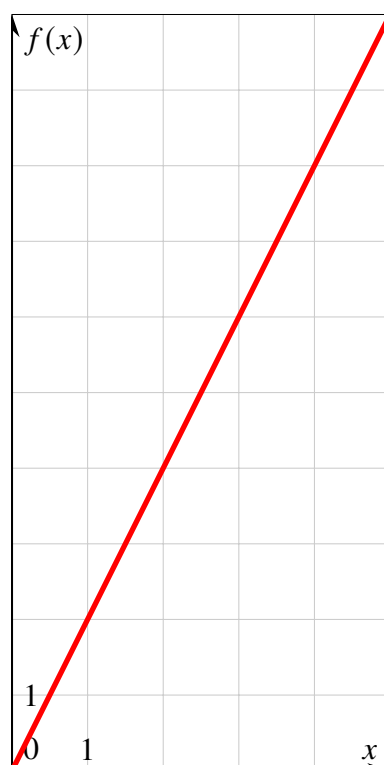
On dit alors que $y = f(x)$ est **l'équation de la courbe**.

Exemple 6.13.

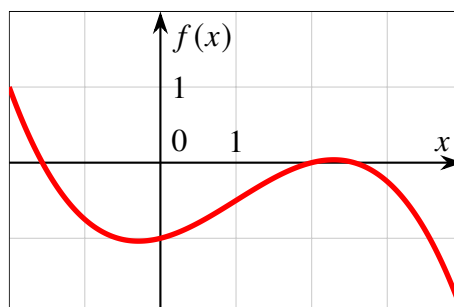
- i) On représente graphiquement la fonction $f : x \mapsto x^2$ sur l'intervalle $[-3, 3]$. L'équation de la courbe est $y = x^2$.



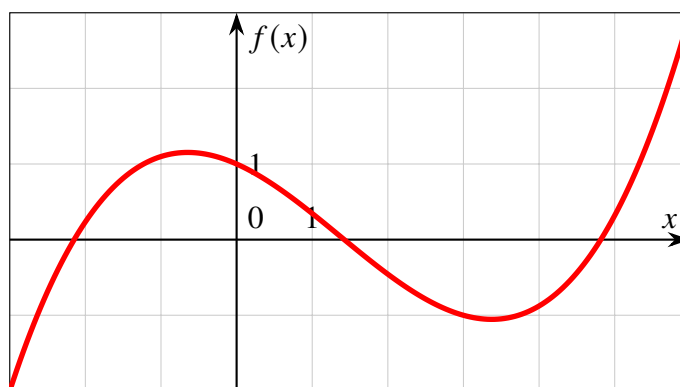
- ii) Concernant la fonction $x \mapsto 2x$ donnant le prix payé en fonction du nombre de litres de carburant, on peut choisir de la représenter sur l'intervalle $[0, 5]$. L'équation de la courbe est $y = 2x$.



- iii) On peut aussi connaître la courbe représentative d'une fonction sans connaître l'expression de cette fonction



- iv) Même chose sur ce graphique



6.3 Résolution d'équations ou d'inéquations

6.3.1 Résolution algébrique d'équations

Definition 6.14 -

Si f est une fonction et k est un nombre réel, **résoudre de manière algébrique l'équation** $f(x) = k$ revient à trouver le ou les éventuel.s antécédent.s de k par f .

Méthode 6.15 -

Dans ce cas de figure, on devra se ramener à un type d'équation que l'on sait déjà résoudre.

Exemple 6.16.

i) On considère la fonction $f : x \mapsto 2x + 5$. On veut résoudre l'équation $f(x) = \frac{7}{2}$.

ii) On considère la fonction $f : x \mapsto (x + 1)^2$. On veut résoudre l'équation $f(x) = 1$ sur $\mathbb{R}$.

Définition 6.17 -

Si f et g sont deux fonctions, **résoudre de manière algébrique l'équation** $f(x) = g(x)$ revient à trouver des valeurs de x donnant la même image par f et g .

Méthode 6.18 -

Dans ce cas de figure, on devra se ramener à un type d'équation que l'on sait déjà résoudre.

Exemple 6.19.

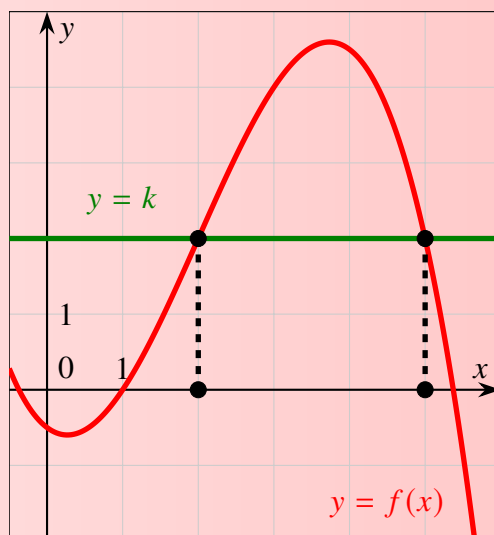
i) On considère les fonction $f : x \mapsto 2x + 5$ et $g : x \mapsto 3x - 2$. On veut résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

ii) On considère les fonctions $f : x \mapsto (x + 1)(2x + 3)$ et $g : x \mapsto (2x - 1)(2x + 3)$. On veut résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

6.3.2 Résolution graphique d'équations

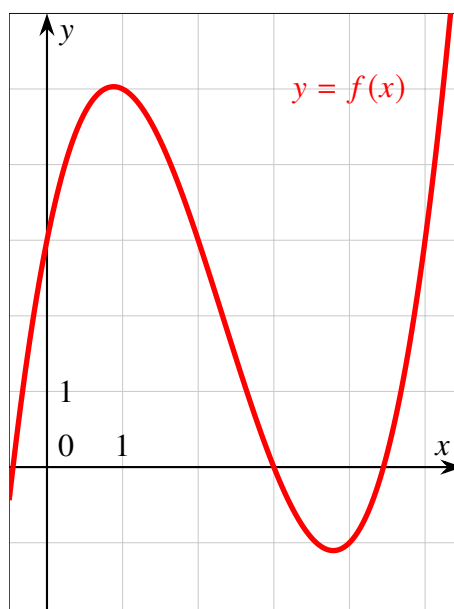
Definition 6.20 -

Si f est une fonction et k est un nombre réel, **résoudre de manière graphique l'équation $f(x) = k$** revient à trouver la ou les éventuelle.s valeur.s de x où la courbe représentative de f croise la droite d'équation $y = k$.

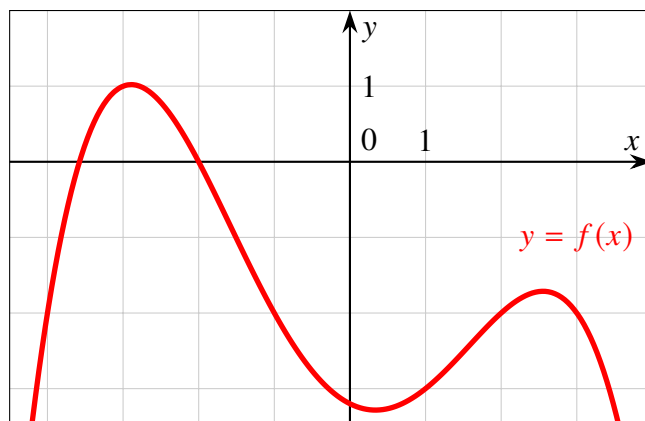


Exemple 6.21.

i) On veut résoudre l'équation $f(x) = 3$ sur ce graphique

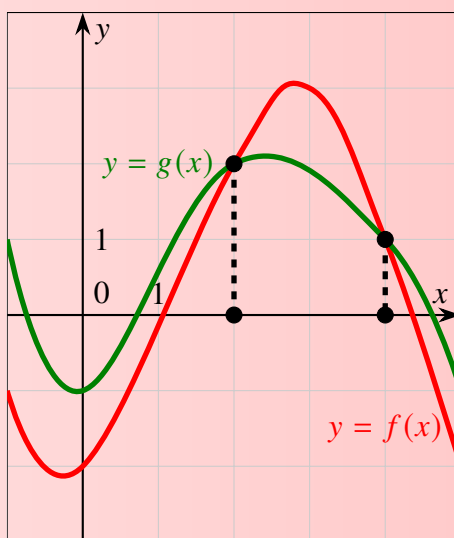


ii) On veut résoudre l'équation $f(x) = -2$ sur ce graphique



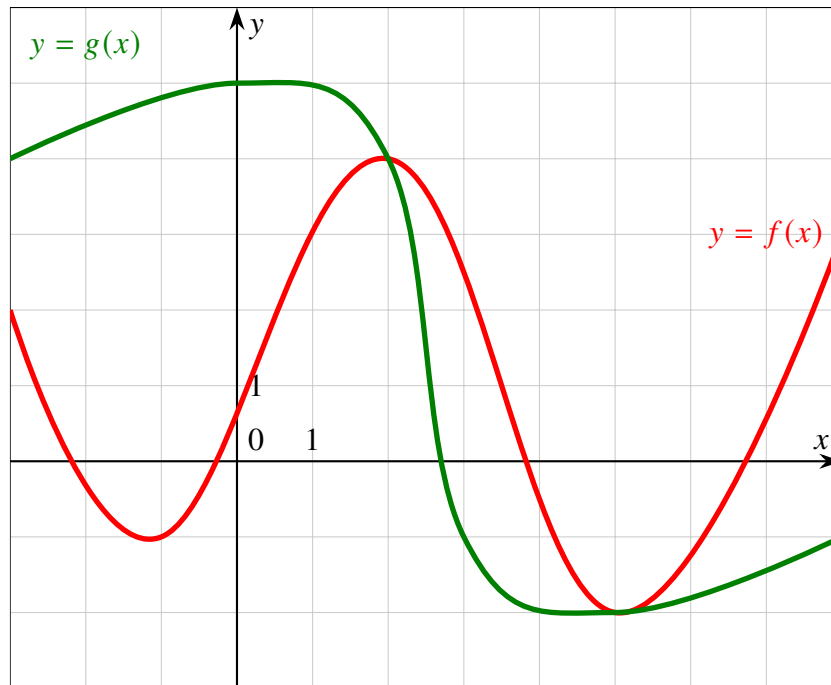
Definition 6.22 -

Si f et g sont deux fonctions, **résoudre de manière graphique l'équation** $f(x) = g(x)$ revient à trouver la ou les éventuelle.s valeur.s de x où les courbes représentatives de f et g se croisent.

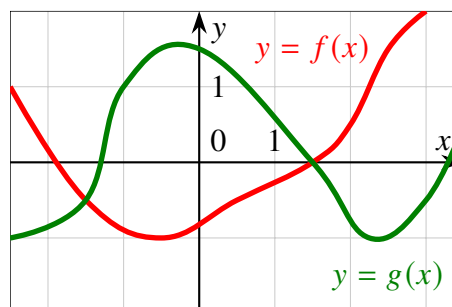


Exemple 6.23.

i) On veut résoudre l'équation $f(x) = g(x)$



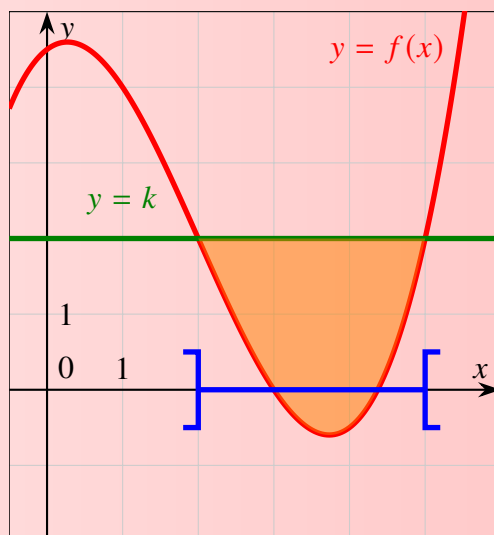
ii) On veut résoudre l'équation $f(x) = g(x)$



6.3.3 Résolution graphique d'inéquations

Definition 6.24 -

Si f est une fonction et k est un nombre réel, **résoudre de manière graphique l'inéquation** $f(x) < k$ revient à trouver la ou les éventuelle.s valeur.s de x où la courbe représentative de f est strictement sous la droite d'équation $y = k$.

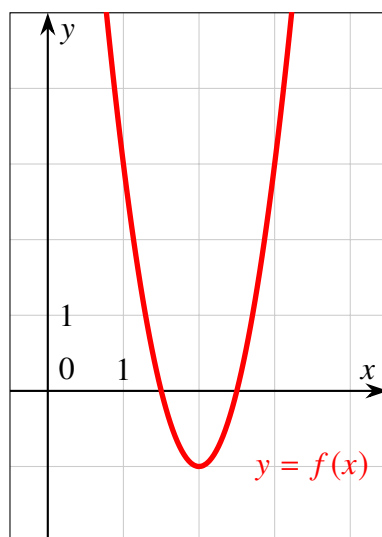


△ Attention !!! -

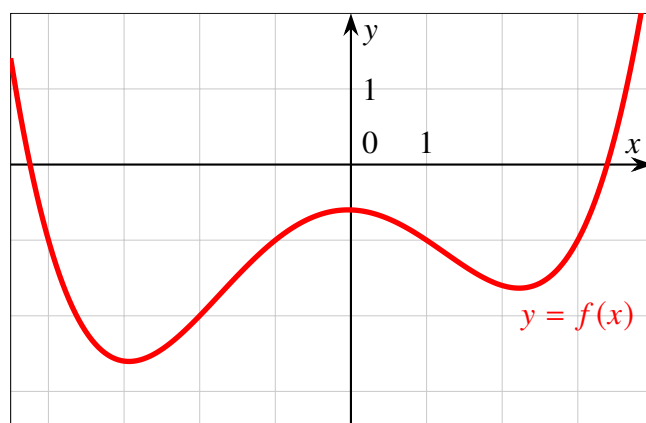
On ne compte donc pas les valeurs de x où les courbes se croisent, car ces valeurs ne vérifient pas $f(x) < k$.

Exemple 6.25.

i) On veut résoudre l'inéquation $f(x) < 3$ sur ce graphique

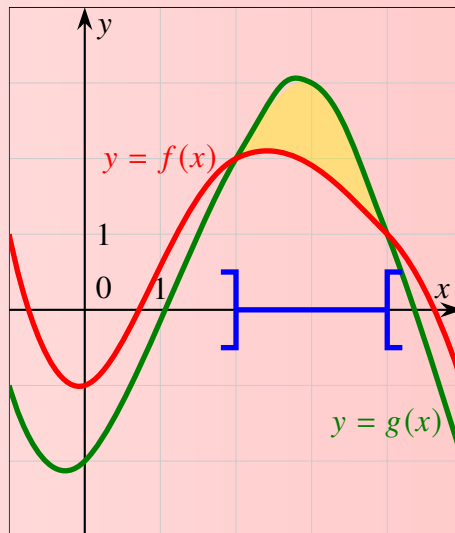


ii) On veut résoudre l'équation $f(x) < -1$ sur ce graphique



Definition 6.26 -

Si f et g sont deux fonctions, **résoudre de manière graphique l'inéquation** $f(x) < g(x)$ revient à trouver la ou les éventuelle.s valeur.s de x où la courbe représentative de f est strictement sous la courbe représentative de g .

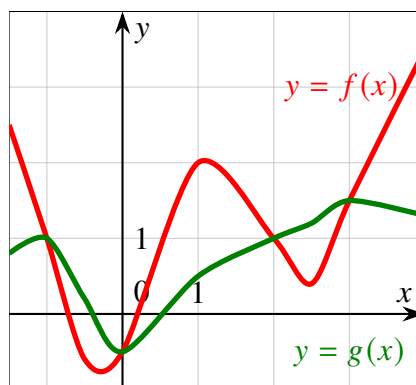


△ Attention !!! -

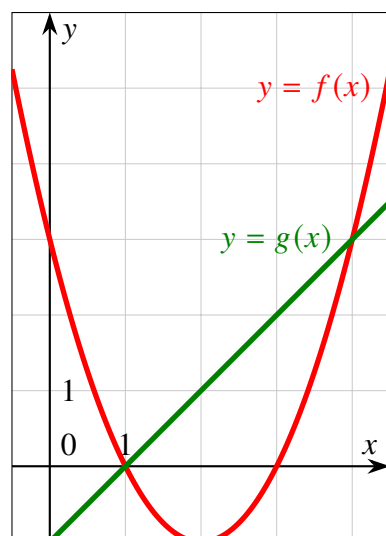
On ne compte donc pas les valeurs de x où les courbes se croisent, car ces valeurs ne vérifient pas $f(x) < g(x)$.

Exemple 6.27.

i) On veut résoudre l'inéquation $f(x) < g(x)$



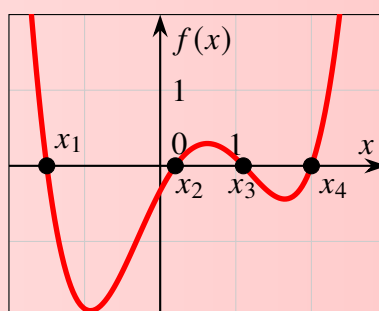
ii) On veut résoudre l'inéquation $f(x) < g(x)$



6.4 Tableau de signe

Definition 6.28 -

Le tableau de signe d'une fonction f est un tableau qui indique le signe pris par cette fonction: positif, négatif ou nul.



x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	x_4	$+\infty$				
$f(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+

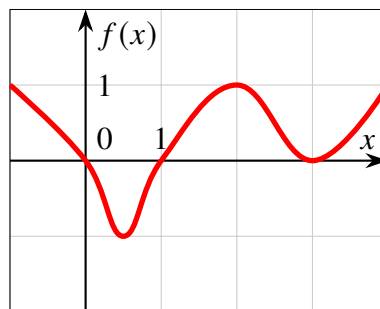
Méthode 6.29 -

Pour compléter un tableau de signe:

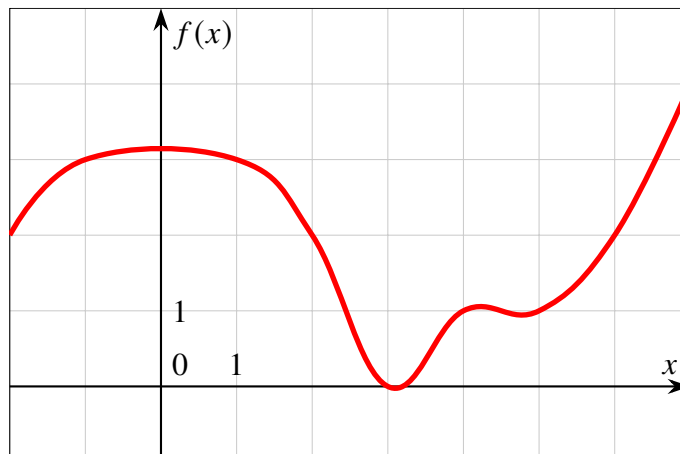
- i) On remplit la première ligne en plaçant les points où f s'annule.
- ii) On complète la deuxième ligne en mettant un zéro en-dessous des points où f s'annule, ce qui sépare les colonnes entre elles, puis on complète par "+" où "-" en fonction du signe de f entre les points d'annulation.

Exemple 6.30.

- i) Donnons le tableau de signe de cette fonction



- ii) Donnons le tableau de signe de cette fonction



6.5 Variations

6.5.1 Variations d'une fonction

Definition 6.31 -

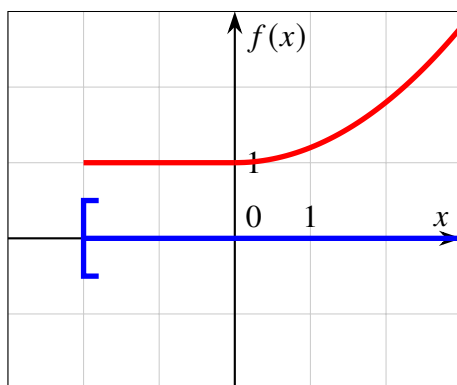
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction.

- i) On dit que f est **croissante sur** I si pour tous réels a, b de I tels que $a \leq b$, $f(a) \leq f(b)$.
- ii) On dit que f est **strictement croissante sur** I si pour tous réels a, b de I tels que $a < b$, $f(a) < f(b)$.
- iii) On dit que f est **décroissante sur** I si pour tous réels a, b de I tels que $a \leq b$, $f(a) \geq f(b)$.
- iv) On dit que f est **strictement décroissante sur** I si pour tous réels a, b de I tels que $a < b$, $f(a) > f(b)$.

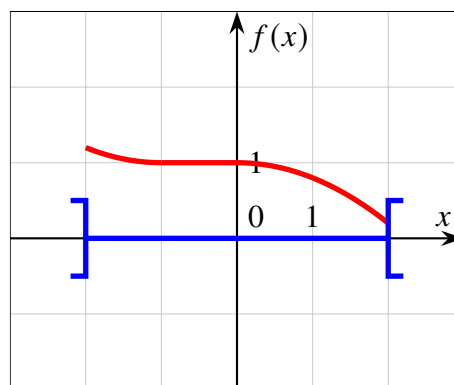
Remarque 6.32.

Dans le cas où f est croissante / décroissante sur I , on dit que f est monotone sur I . Dans le cas où f est strictement croissante / strictement décroissante sur I , on dit que f est strictement monotone sur I .

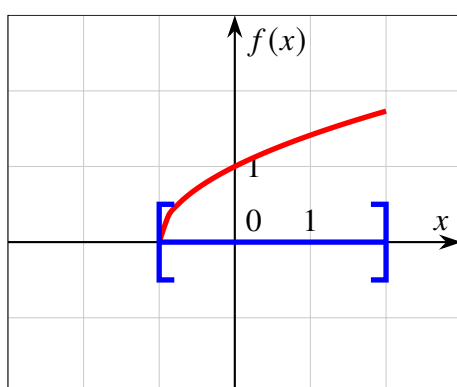
Exemple 6.33.



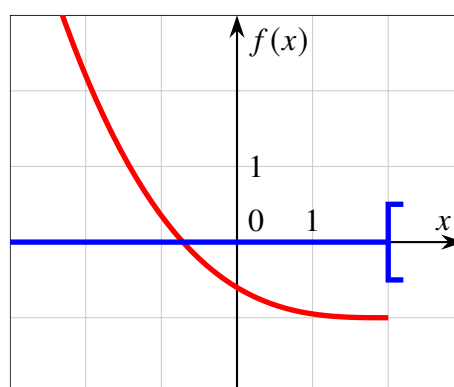
Fonction croissante



Fonction décroissante



Fonction strictement
croissante

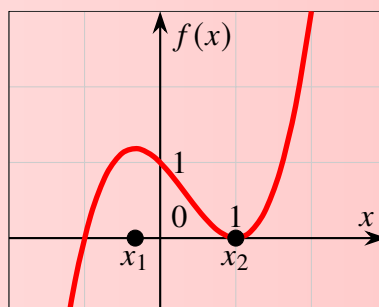


Fonction strictement
décroissante

6.5.2 Tableau de variation

Definition 6.34 -

Un **tableau de variation** d'une fonction f est un tableau permettant de visualiser les intervalles sur lesquels f est croissante, décroissante ou constante.



x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$				

Diagram illustrating the variation of the function $f(x)$ between x_1 and x_2 . Arrows indicate the direction of the function's values: an upward arrow from x_1 to x_2 and a downward arrow from x_2 to x_1 .

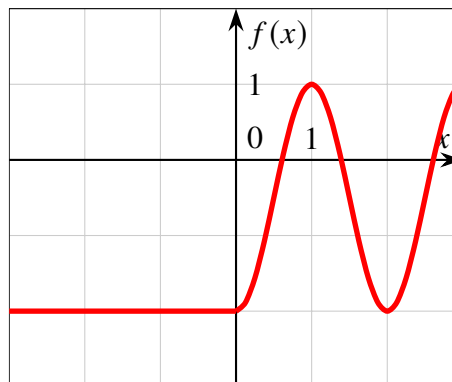
Méthode 6.35 -

Pour compléter un tableau de variation:

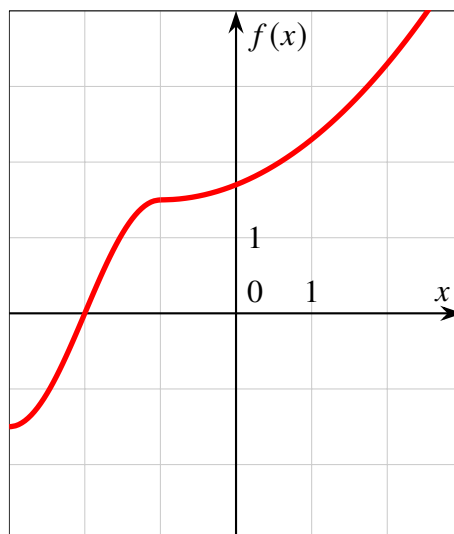
- i) On remplit la première ligne en plaçant les points qui sont les extrémités des intervalles où f est croissante/décroissante/constante.
- ii) On complète la deuxième ligne en des flèches en fonction du sens de variation de f .

Exemple 6.36.

- i) Sur quels intervalles f est croissante, décroissante, constante ? Dresser le tableau de variations de f .



-
- ii) Sur quels intervalles f est croissante, décroissante, constante ? Dresser le tableau de variations de f .



6.5.3 Extrema

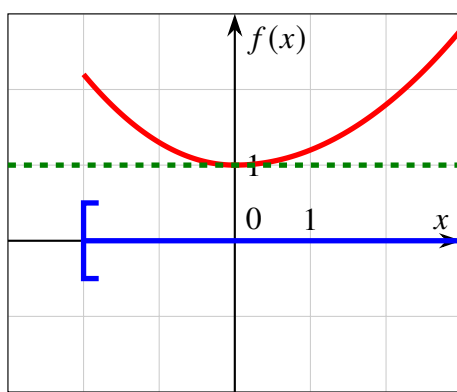
Definition 6.37 -

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction f :

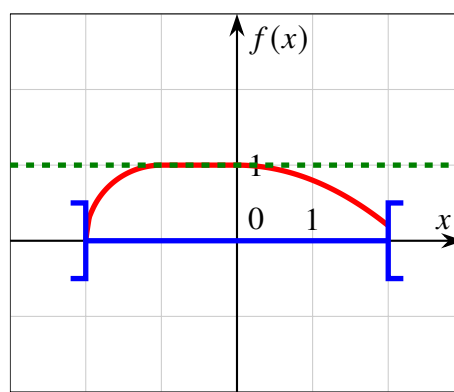
- i) Admet un **minimum** sur I s'il existe un réel m tel que pour tout x dans I , $m \leq f(x)$.
- ii) Admet un **maximum** sur I s'il existe un réel M tel que pour tout x dans I , $f(x) \leq M$.

Dans les deux cas, on parle d'**extremum**.

Exemple 6.38.



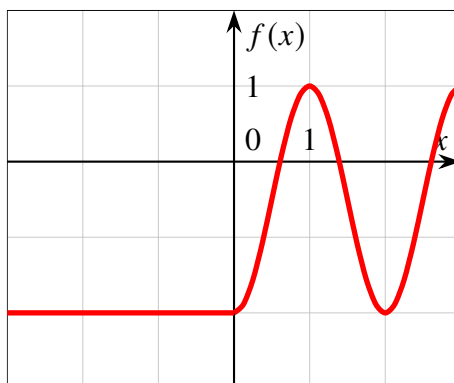
Fonction admettant un minimum



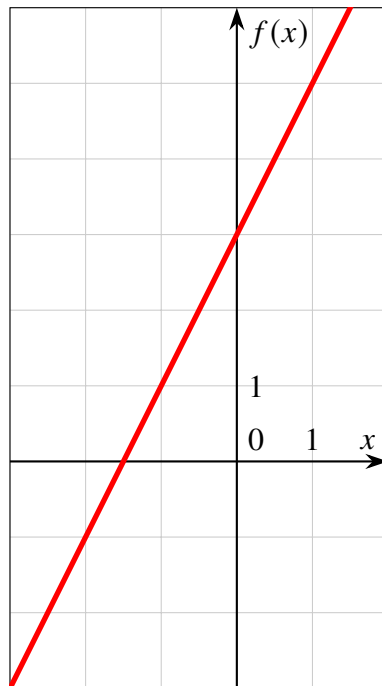
Fonction admettant un maximum

Exemple 6.39.

- i) La fonction suivante définie sur l'intervalle $[-3, 3]$ admet-elle un minimum ? un maximum ?



ii) La fonction $f : x \mapsto 2x + 3$ définie sur $\mathbb{R}$ admet-elle un minimum ? un maximum ?



iii) La fonction suivante définie sur $\mathbb{R}$ admet-elle un minimum ? un maximum ?

