

Chapitre 7

Vecteurs 1

7.1 Notion de vecteur

7.1.1 Translation

Definition 7.1 - Translation

Une **translation** est le déplacement d'une figure selon une direction, un sens, et une longueur donnée.

Remarque 7.2.

Une translation est donc représentée par une flèche.

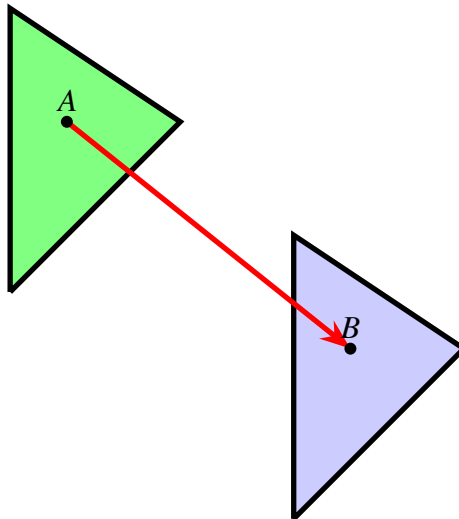
△ Attention !!! -

Attention à ne pas confondre direction et sens.

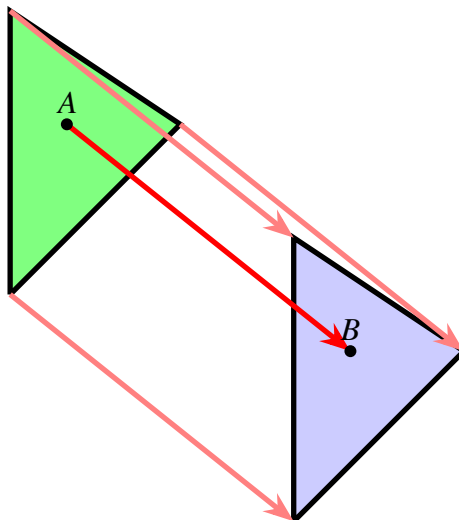
Exemple 7.3.

Sur cette figure, la translation qui envoie A vers B va envoyer le triangle en haut à gauche vers le second triangle en bas à droite.

- i) La direction est la droite (AB) .
- ii) Le sens est de A vers B .
- iii) La longueur est AB .



En effet, c'est **la même flèche de A vers B** qui va envoyer chaque point du premier triangle (en haut à gauche) vers le second triangle (en bas à droite).



7.1.2 Définition d'un vecteur

Definition 7.4 - Vecteur

La flèche qui définit une translation s'appelle un **vecteur**. Un vecteur est défini par:

- i) Une direction
- ii) Un sens
- iii) Une longueur

Si un vecteur est défini par une translation qui envoie un point A vers un point B , alors on le note $\overrightarrow{AB}$.

Remarque 7.5.

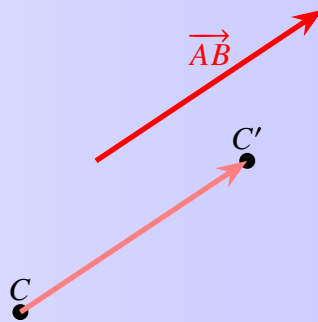
Pour le vecteur $\overrightarrow{AB}$:

- i) La direction est donnée par la droite (AB) (son orientation). Il en existe donc une infinité.
- ii) Une fois la direction fixée, il existe deux sens possibles: de A vers B ou de B vers A .
- iii) La longueur est donnée par la longueur AB (c'est-à-dire la longueur du segment $[AB]$).

Méthode 7.6 -

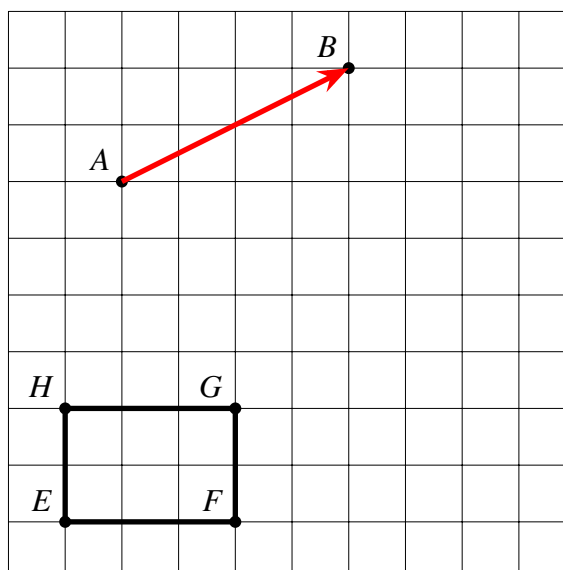
Si on a un point C , et que l'on veut construire un point C' qui est le résultat de la translation donnée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$:

- i) On recopie la flèche $\overrightarrow{AB}$ en mettant le départ de la flèche au point C .
- ii) Le point C' est à l'arrivée de la flèche $\overrightarrow{AB}$ (au niveau de la pointe).

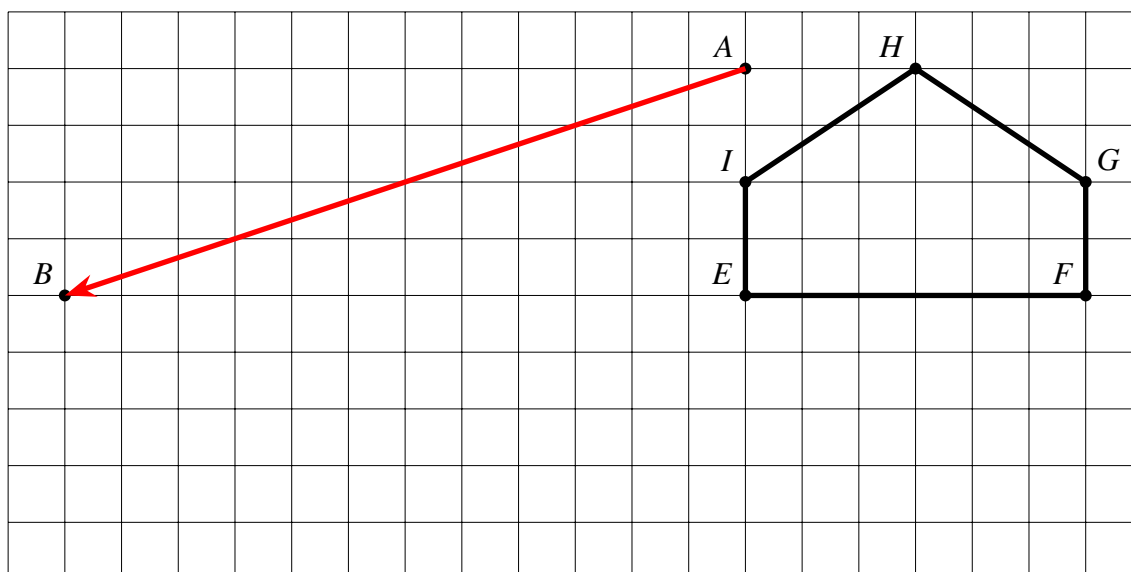


Exemple 7.7.

- i) On a dessiné le rectangle $EFGH$. Représenter le rectangle $E'F'G'H'$ après la translation représentée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$.



- ii) On a représenté le pentagone (irrégulier, en forme de maison) $EFGHI$. Représenter le pentagone $E'F'G'H'I'$ après la translation représentée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$.



7.1.3 Vecteurs égaux

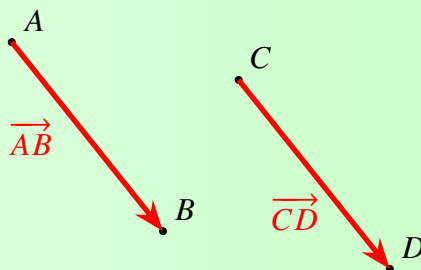
Definition 7.8 - Vecteurs égaux

Deux **vecteurs sont égaux** s'ils ont même direction, même sens et même longueur.

Théorème 7.9 -

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux revient à dire que:

- i) Les droites (AB) et (CD) sont parallèles (même direction).
- ii) Les flèches vont toutes les deux de A vers B et C vers D (même sens).
- iii) Les longueurs AB et CD sont identiques: $AB = CD$.

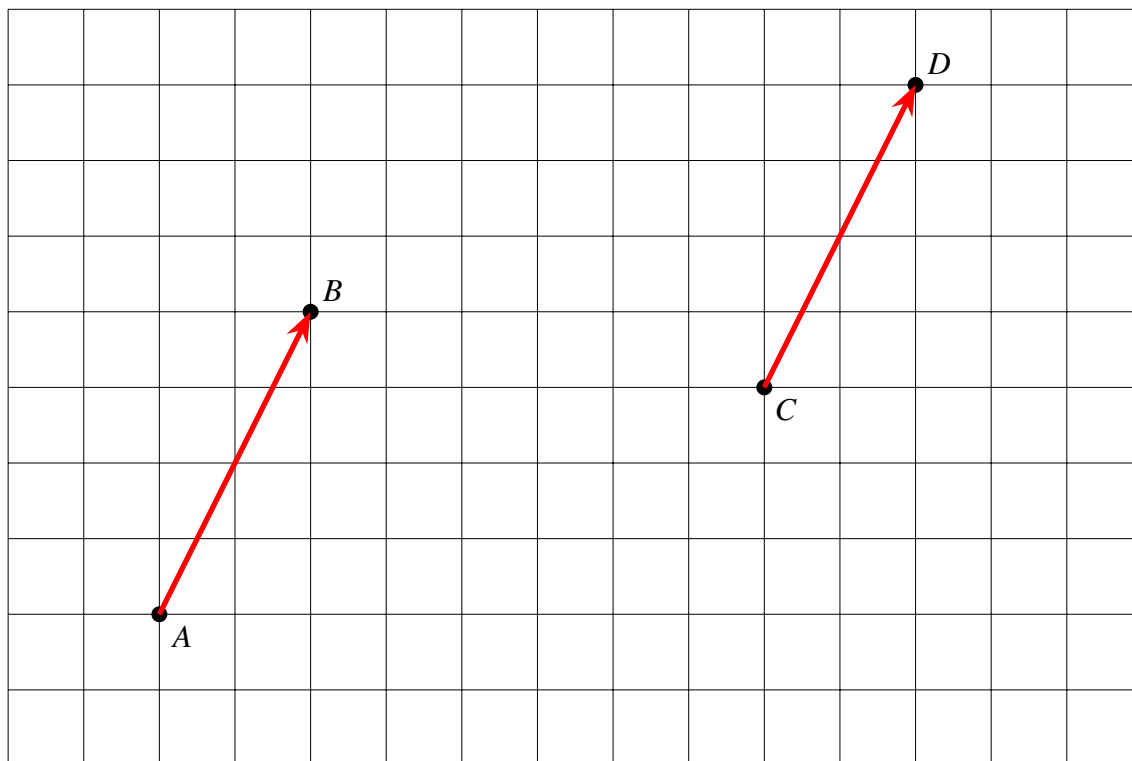


Remarque 7.10.

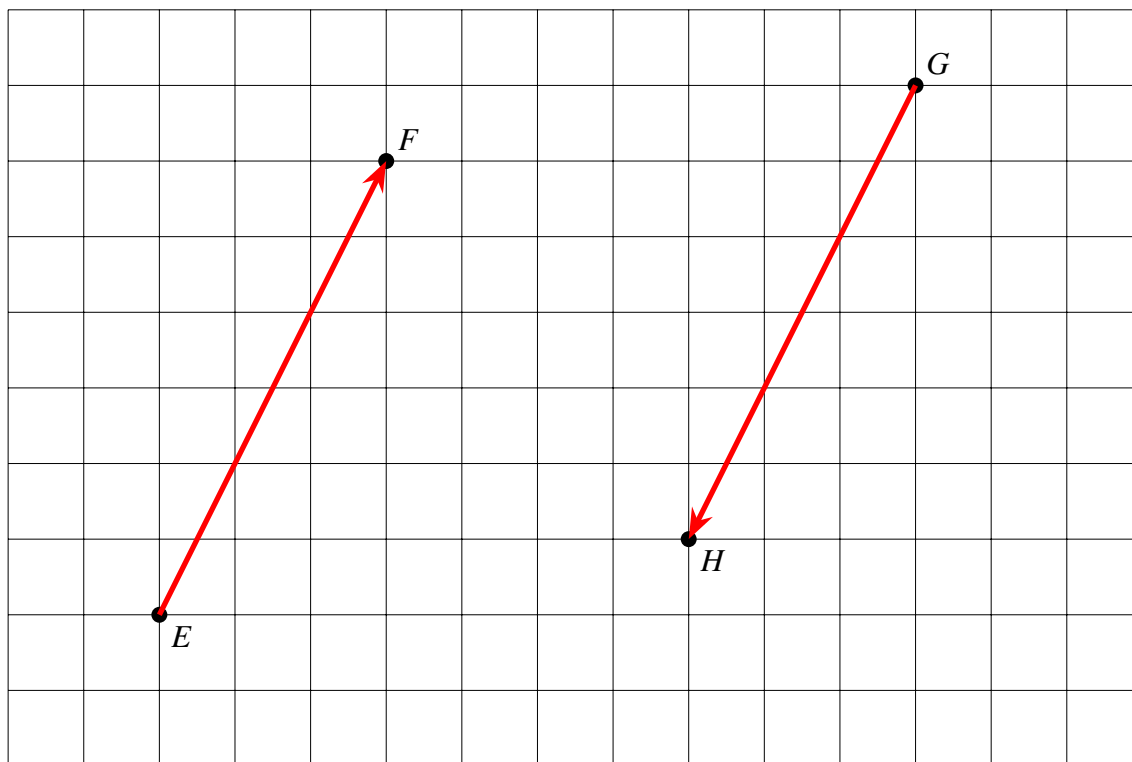
Le point de départ n'importe pas, il faut donc que **les flèches soient identiques**.

Exemple 7.11.

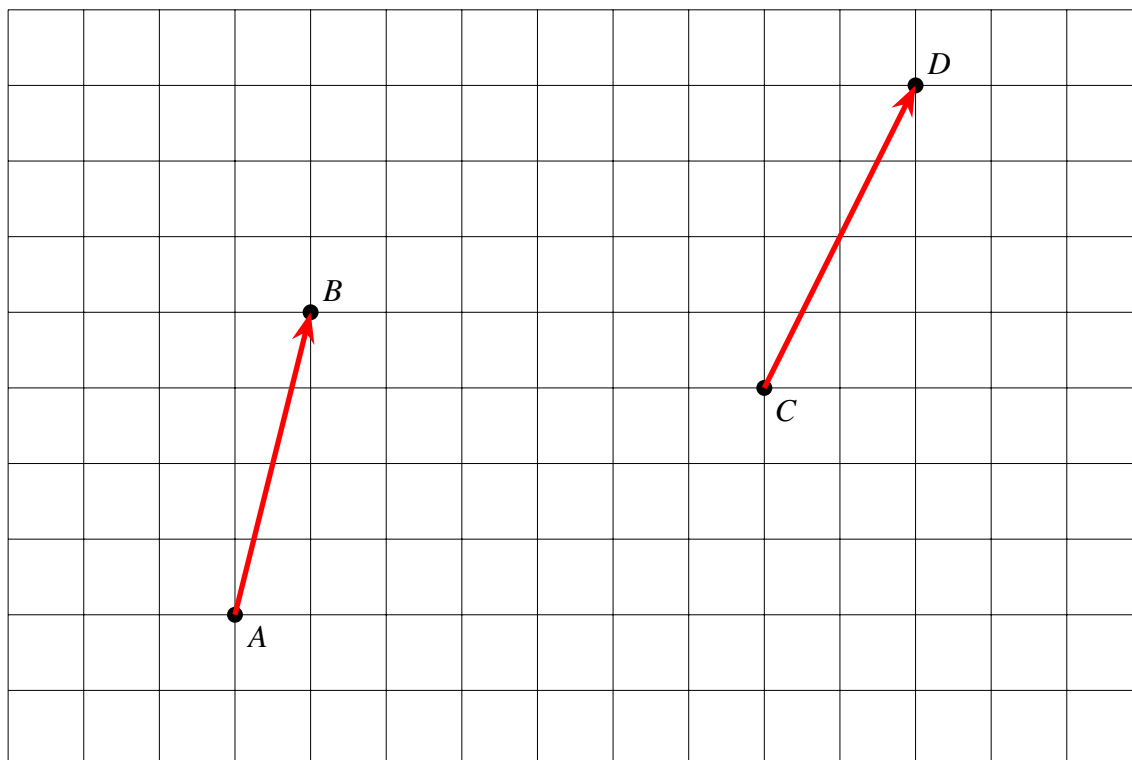
- i) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils égaux ? Justifier pourquoi.



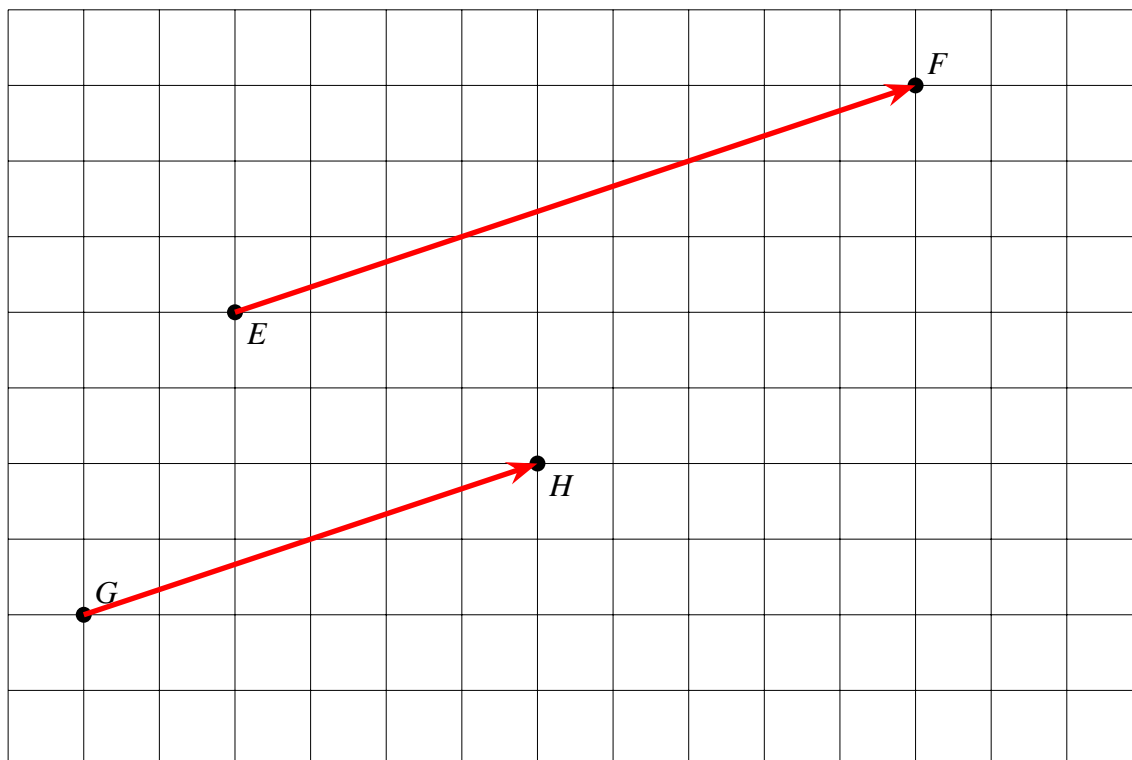
ii) Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont-ils égaux ? Justifier pourquoi.



iii) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils égaux ? Justifier pourquoi.



iv) Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont-ils égaux ? Justifier pourquoi.



Exemple 7.12.

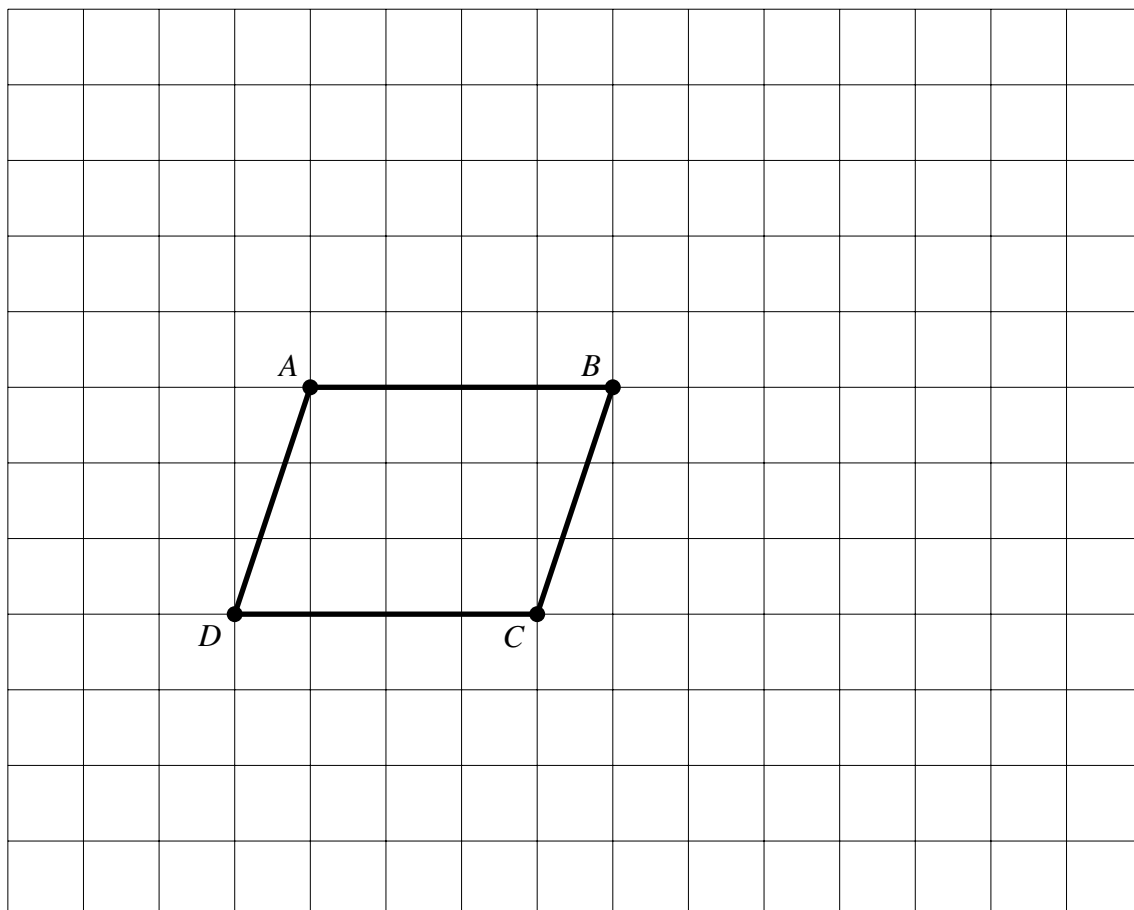
A partir du parallélogramme $ABCD$, construire les points E , F , G et H tels que:

i) $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$.

ii) $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DC}$.

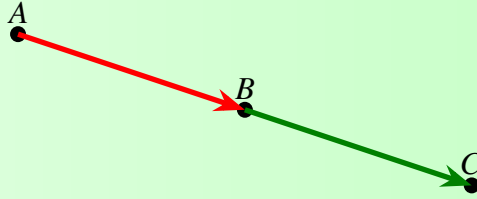
iii) $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB}$.

iv) $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{BC}$.



Théorème 7.13 - Propriété du milieu

Soient A , B et C trois points. B est le milieu du segment $[AC]$ revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont égaux.



Exemple 7.14.

- i) Placer le point C de façon à ce que B soit le milieu de $[AC]$.

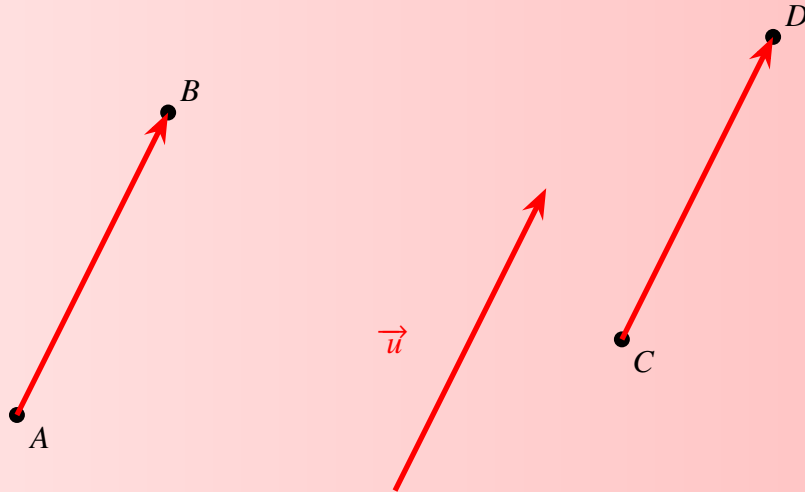


- ii) Placer le point F de façon à ce que E soit le milieu de $[DF]$.



Definition 7.15 - Représentants d'un même vecteur

Si deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux vecteurs égaux, on dit qu'ils sont **représentants d'un même vecteur**, on peut le noter à l'aide d'une seule lettre, par exemple $\vec{u}$.



7.1.4 Vecteur nul

Definition 7.16 - Vecteur nul

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est **nul** lorsque les points A et B sont confondus. On note dans ce cas $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Propriété 7.17 -

Si A est un point quelconque, alors $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

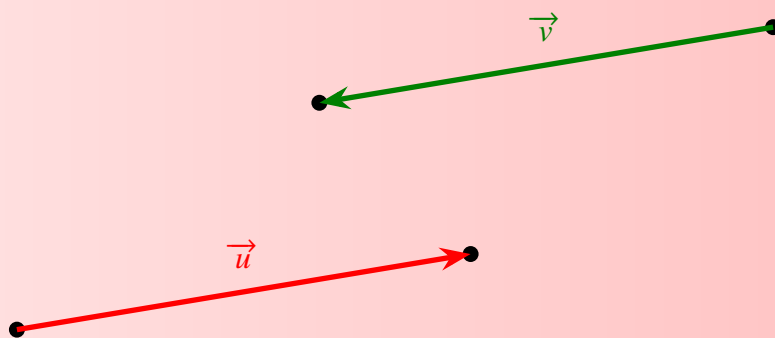
Remarque 7.18.

En effet, cela revient à ne pas se déplacer, donc à laisser toute figure inchangée.

7.1.5 Vecteurs opposés

Definition 7.19 - Vecteurs opposés

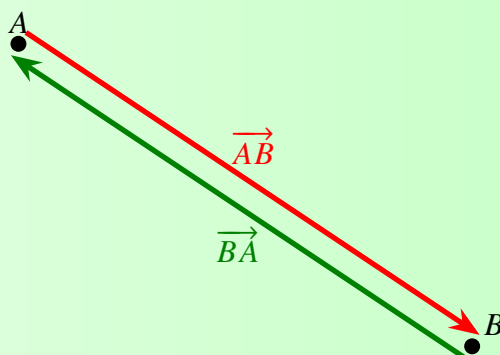
Deux vecteurs sont dit **opposés** lorsqu'ils ont la même direction, la même longueur mais sont de sens opposés.



Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs opposés, on note $\vec{v} = -\vec{u}$.

Théorème 7.20 -

Si A et B sont deux points, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés, on note dans ce cas $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

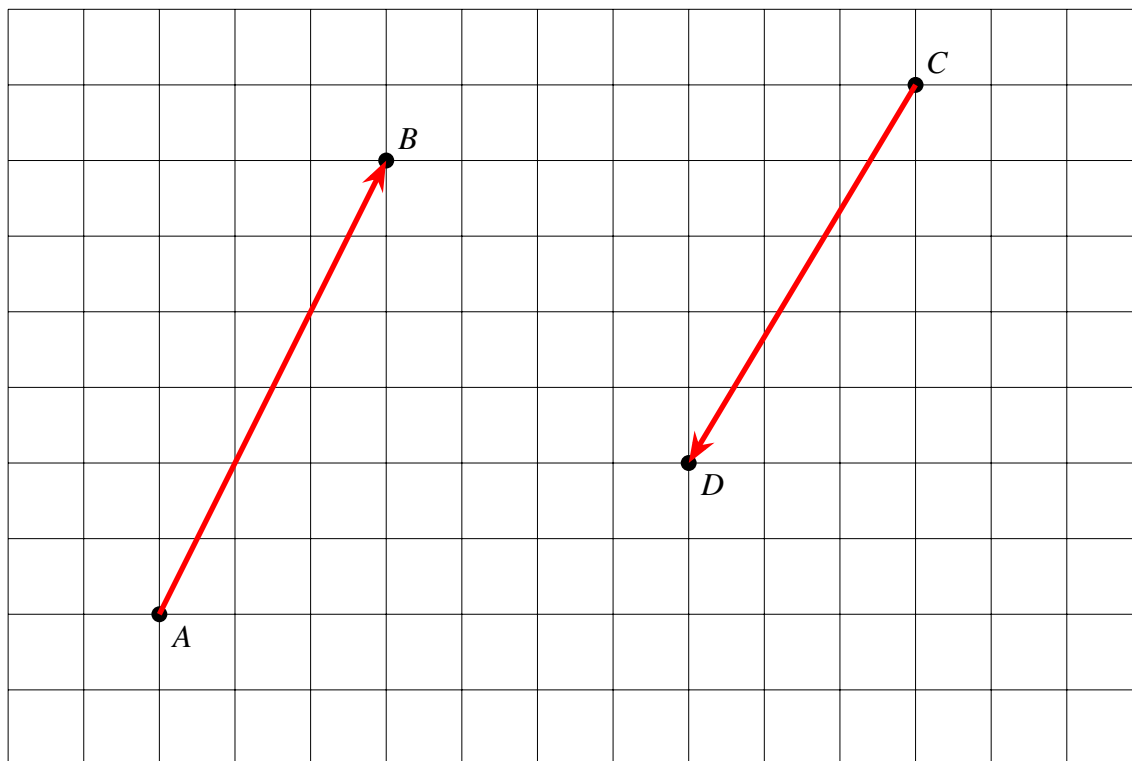


Remarque 7.21.

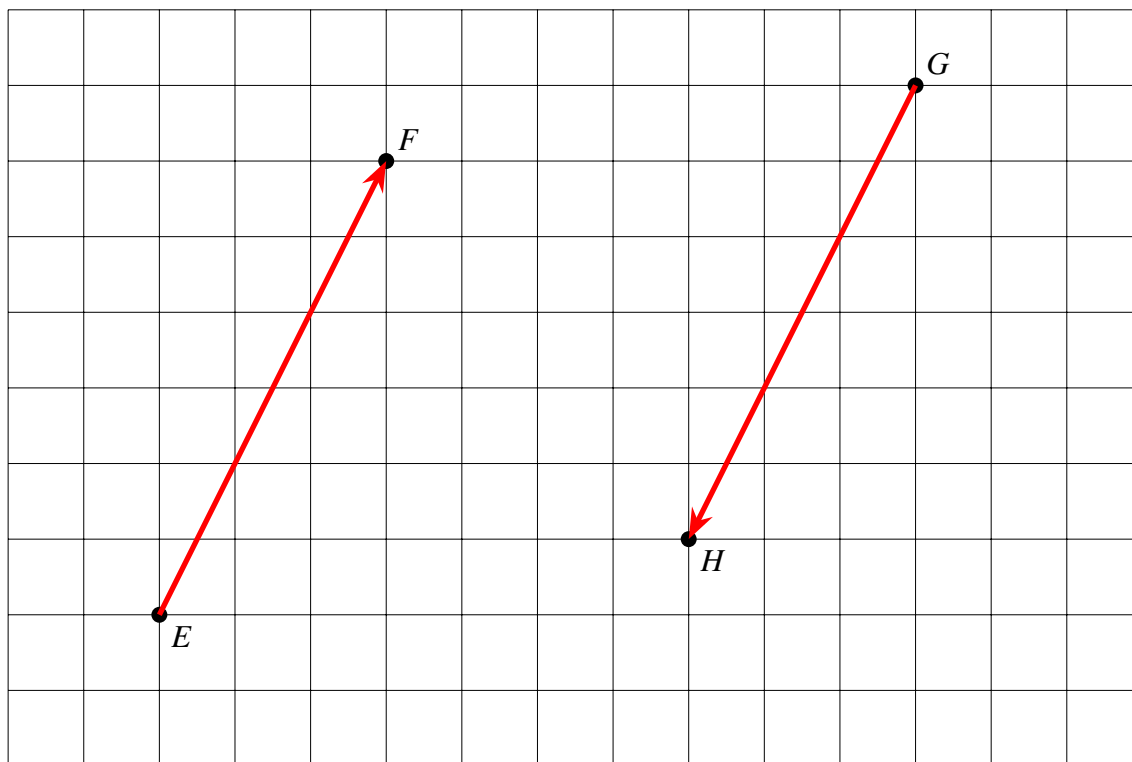
En effet, cela revient à dire que l'opposé du déplacement en ligne droite de A vers B est le déplacement en ligne droite de B vers A .

Exemple 7.22.

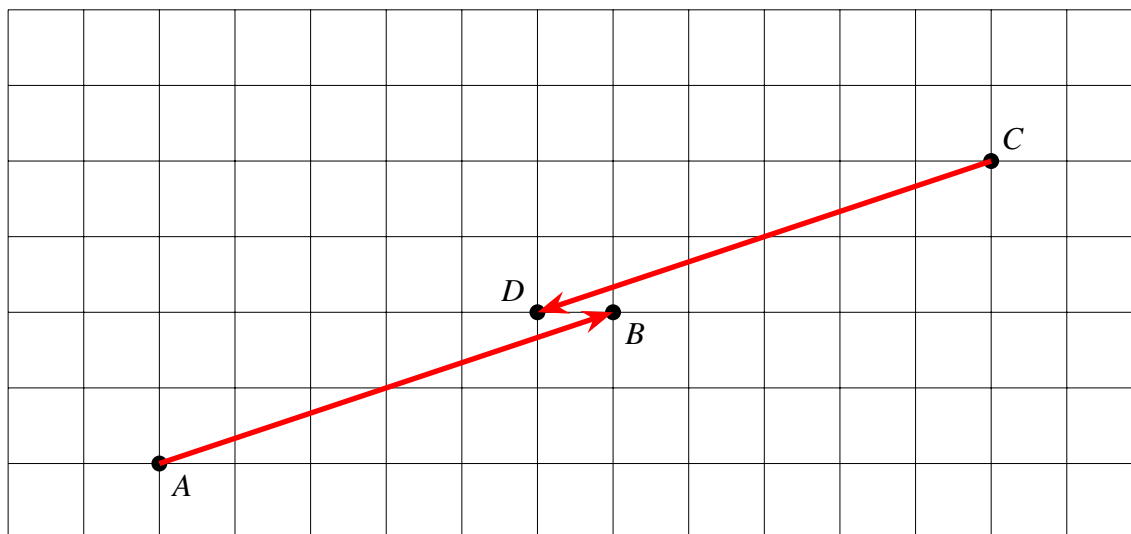
- i) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils opposés ? Justifier pourquoi.



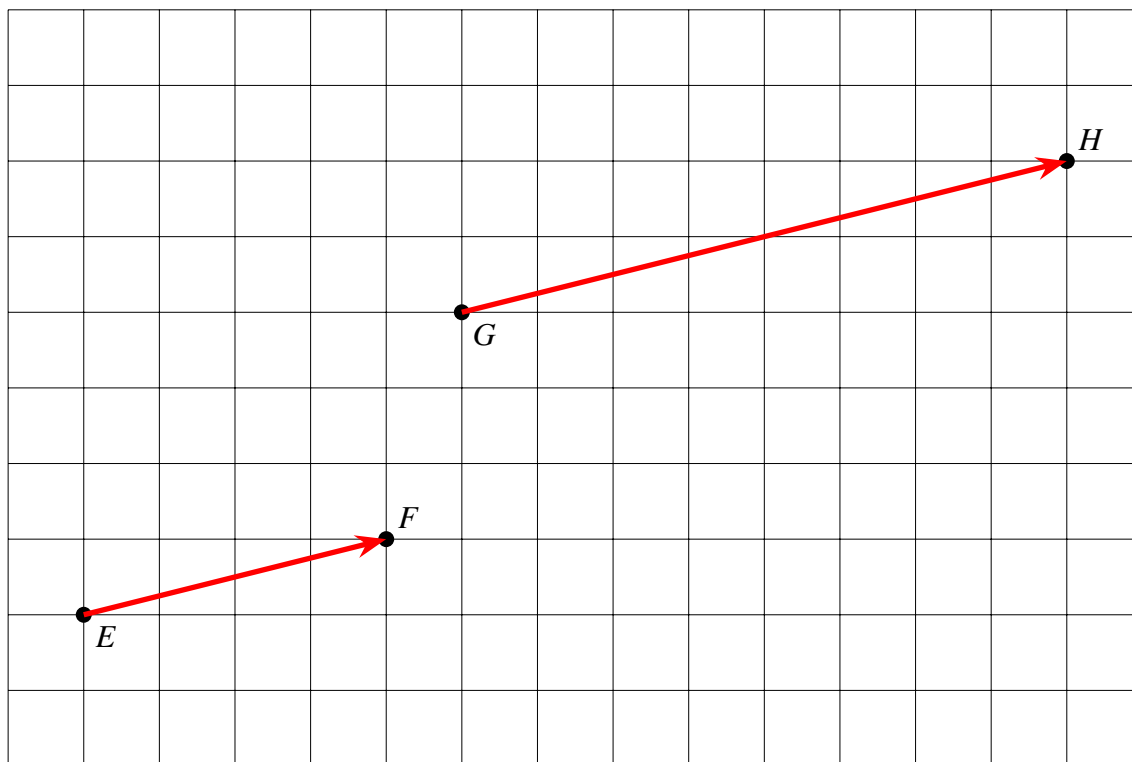
ii) Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont-ils opposés ? Justifier pourquoi.



iii) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils opposés ? Justifier pourquoi.



iv) Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont-ils opposés ? Justifier pourquoi.

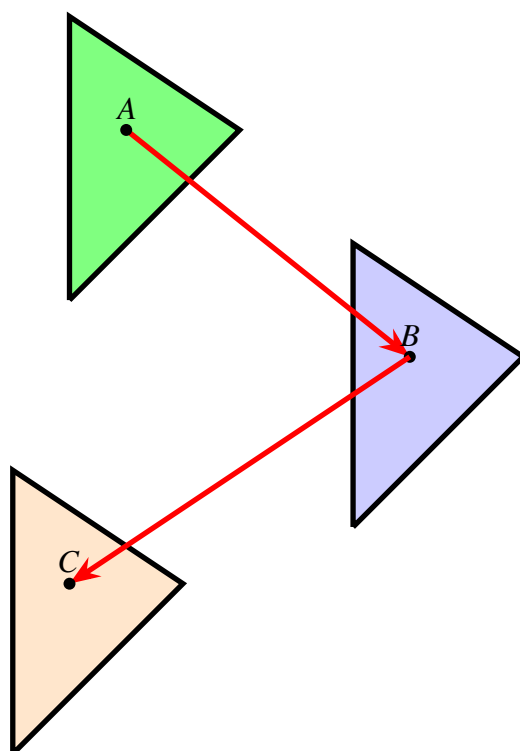


7.2 Somme de deux vecteurs

7.2.1 Translations

Remarque 7.23.

On remarque sur la figure ci-dessous que la translation de A vers B suivie de la translation de B vers C est équivalente à la translation de A vers C .



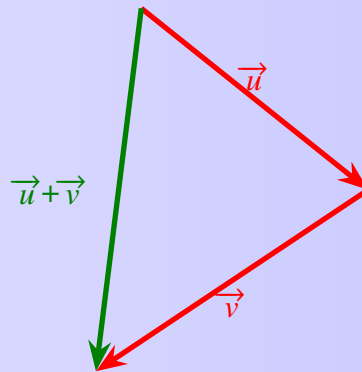
7.2.2 Addition de deux vecteurs

Definition 7.24 - Addition de deux vecteurs

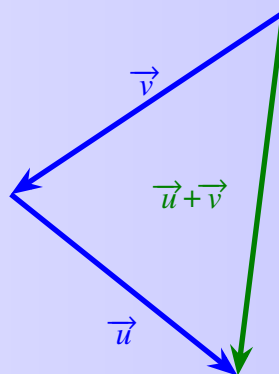
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs représentant chacun une translation, alors la somme de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ représente la translation représentée par le vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation représentée par le vecteur $\vec{v}$. On note $\vec{u} + \vec{v}$.

Méthode 7.25 -

Pour additionner deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on part de l'arrivée du vecteur $\vec{u}$, puis on construit le vecteur $\vec{v}$.

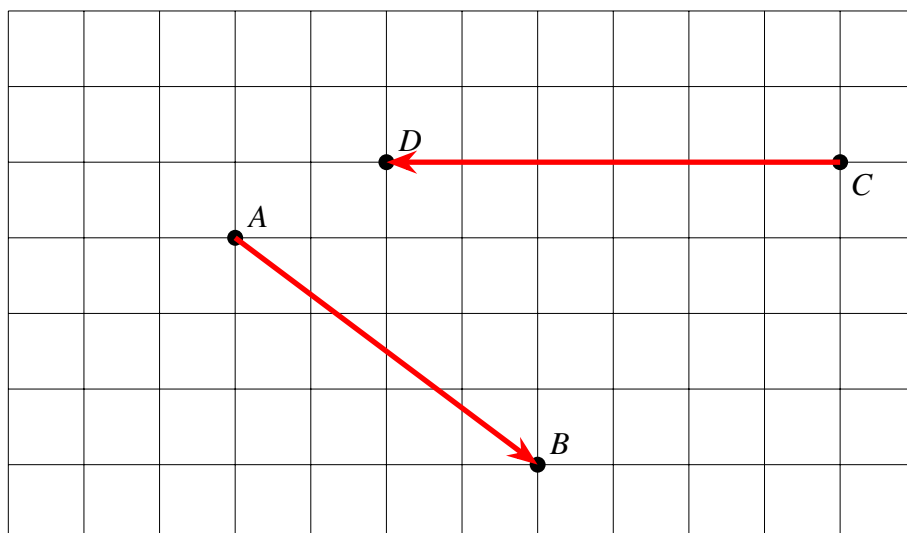


Il est tout à fait possible de commencer par $\vec{v}$ puisque $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

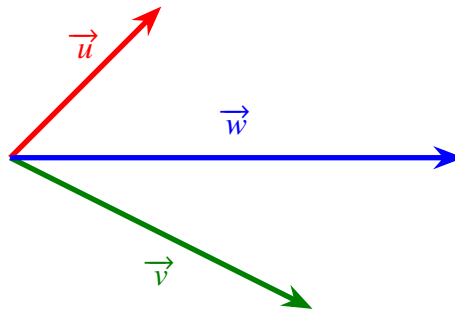


Exemple 7.26.

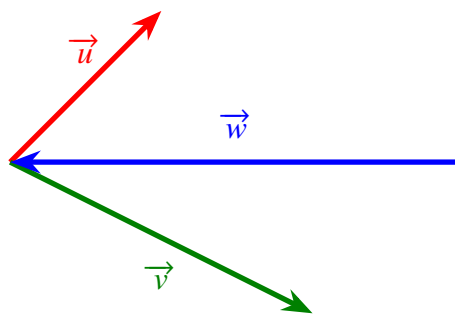
i) Placer le point E de façon à avoir $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.



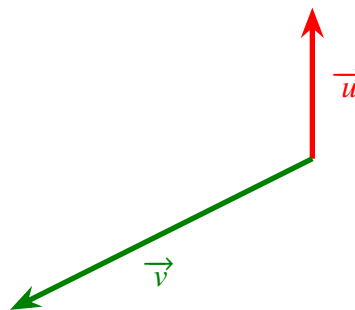
ii) A-t-on $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$?



iii) A-t-on $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$?



iv) Représenter le vecteur $\vec{w}$ de façon à avoir $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.



Propriété 7.27 -

Si A et B sont deux points, alors $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0}$.

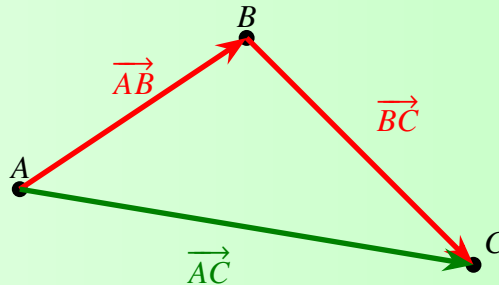
Remarque 7.28.

Cela correspond à faire un "aller-retour" (A vers B puis B vers A).

7.2.3 Relation de Chasles

Théorème 7.29 - Relation de Chasles

Soient A , B et C trois points. On a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

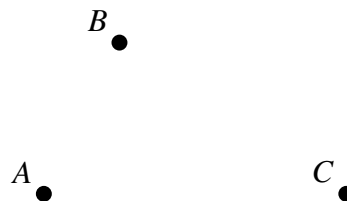


Exemple 7.30.

i) Soient A , B et C trois points. Simplifier l'expression suivante:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} =$$

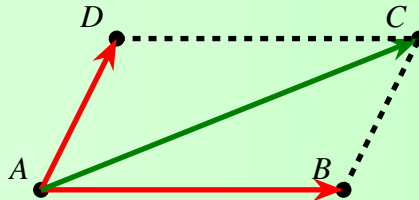
ii) Placer le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$.



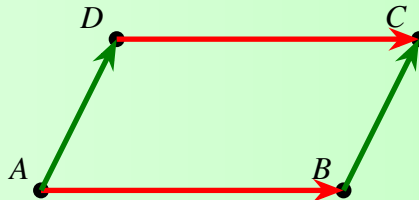
Théorème 7.31 - Propriété du parallélogramme

Soient A, B, C, D quatre points.

i) Dire que $ABCD$ est un parallélogramme revient à dire que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.



ii) De même, dire que $ABCD$ est un parallélogramme revient à dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ou bien encore $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$:



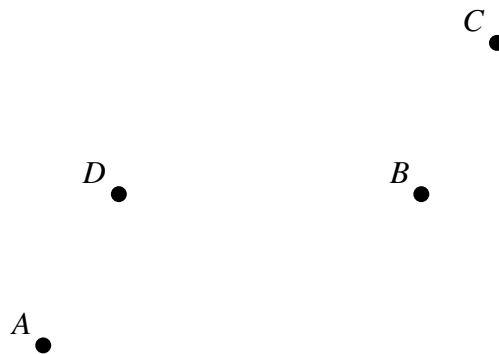
Exemple 7.32.

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Simplifier au maximum l'expression vectorielle suivante pour trouver un unique vecteur $\vec{u}$ tel que

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}.$$

i) En utilisant la relation de Chasles.

ii) En utilisant une figure géométrique.



7.2.4 Soustraction de deux vecteurs

Definition 7.33 - Soustraction de deux vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. La soustraction, notée $\vec{u} - \vec{v}$, est donnée par

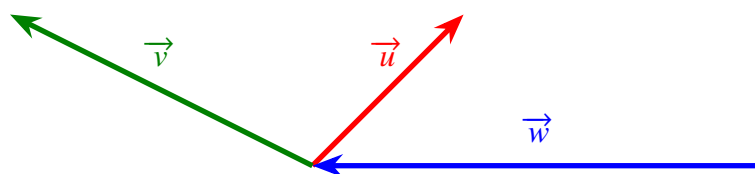
$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}).$$

Méthode 7.34 -

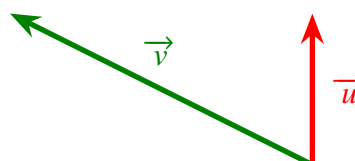
Pour faire la soustraction $\vec{u} - \vec{v}$, il suffit d'ajouter $\vec{u}$ avec l'opposé de $\vec{v}$.

Exemple 7.35.

i) A-t-on $\vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$?



ii) Représenter le vecteur $\vec{w}$ de façon à avoir $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$.



iii) Simplifier l'expression suivante:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} =$$

7.3 Produit d'un vecteur par un nombre réel

7.3.1 Produit par un réel

Definition 7.36 -

Soient $\vec{u}$ un vecteur et k un nombre réel. On note $k\vec{u}$ la multiplication du vecteur $\vec{u}$ par le nombre réel k .

- i) Si $k \geq 0$, alors $k\vec{u}$ est obtenu en conservant la même direction, le même sens et en multipliant la longueur par k .
- ii) Si $k \leq 0$, alors $k\vec{u}$ est obtenu en conservant la même direction, en inversant le sens et en multipliant la longueur par $-k$.

Remarque 7.37.

- i) Si $k \leq 0$, la multiplication de la longueur par $-k \geq 0$ donnera donc bien une multiplication d'une longueur par un réel positif.

- ii) Pour tout vecteur $\vec{u}$, $0\vec{u} = \vec{0}$.

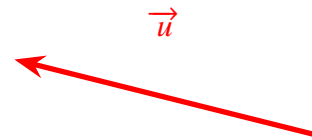
Méthode 7.38 -

Changement de direction, sens et longueur de $k\vec{u}$ par rapport à $\vec{u}$.

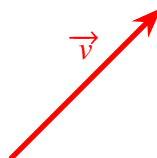
Signe de k	Direction	Sens	Longueur
+	Identique	Identique	Multipliée par k
-	Identique	Inversé	Multipliée par $-k$

Exemple 7.39.

i) Représenter le vecteur $3\vec{u}$



ii) Représenter le vecteur $-2\vec{v}$.



iii) Représenter le vecteur $3\vec{u} - 2\vec{v}$.



Propriété 7.40 -

Si a et b sont deux nombres réels et si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs, alors on a

i) $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

ii) $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$.

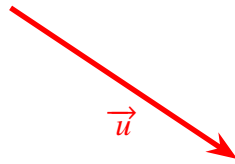
iii) $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$ et en particulier, $1\vec{u} = \vec{u}$.

Exemple 7.41.

i) Si $\vec{u}$ est un vecteur, alors $2\left(\frac{1}{2}\vec{u}\right) = \left(2 \times \frac{1}{2}\right)\vec{u} = \vec{u}$.

ii) Soit $\vec{u}$ un vecteur. Exprimer $\frac{3}{2}\vec{u}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\frac{1}{2}\vec{u}$.

iii) Représenter le vecteur $\frac{3}{2}\vec{u}$.



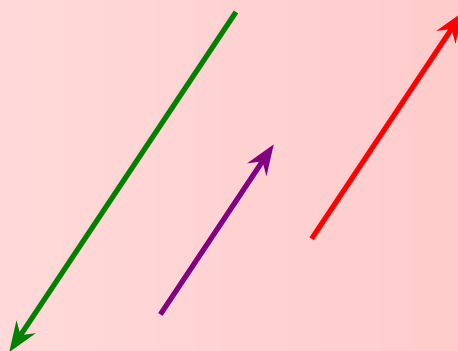
iv) On considère le rectangle $ABCD$. Représenter le vecteur $2\vec{AC}$ en s'aidant des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$.



7.3.2 Colinéarité

Definition 7.42 - Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs sont dits **colinéaires** s'ils ont la même direction.



Théorème 7.43 - Colinéarité et multiplication par un réel

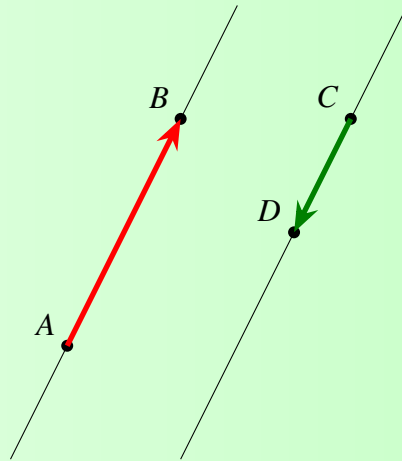
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire qu'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Remarque 7.44.

Cela revient à dire qu'il existe un réel k' tel que $\vec{v} = k'\vec{u}$.

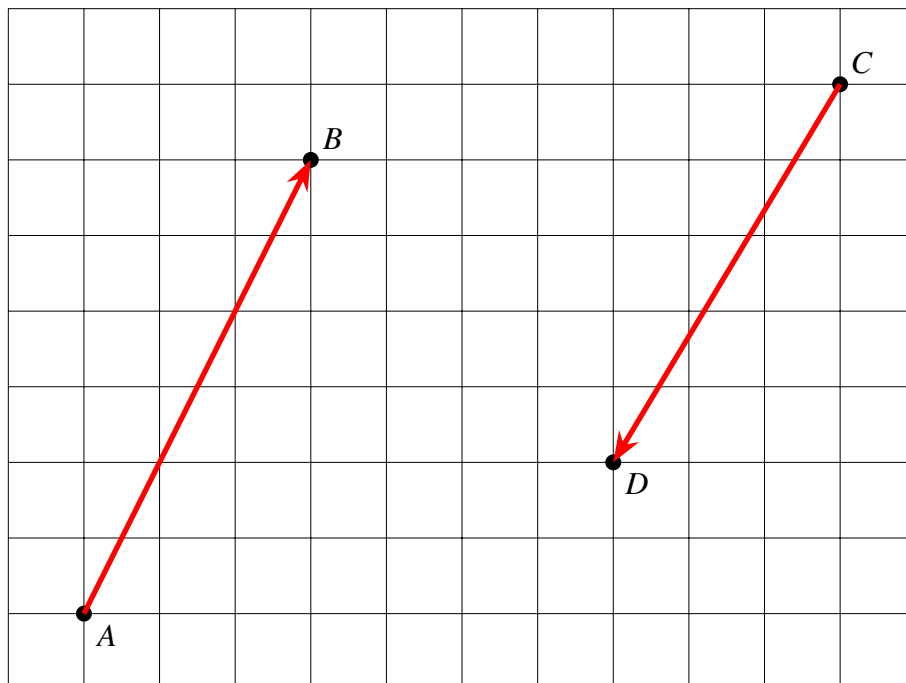
Théorème 7.45 - Colinéarité et droites parallèles

Soient A, B, C et D quatre points. Dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires revient à dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles (ou confondues).

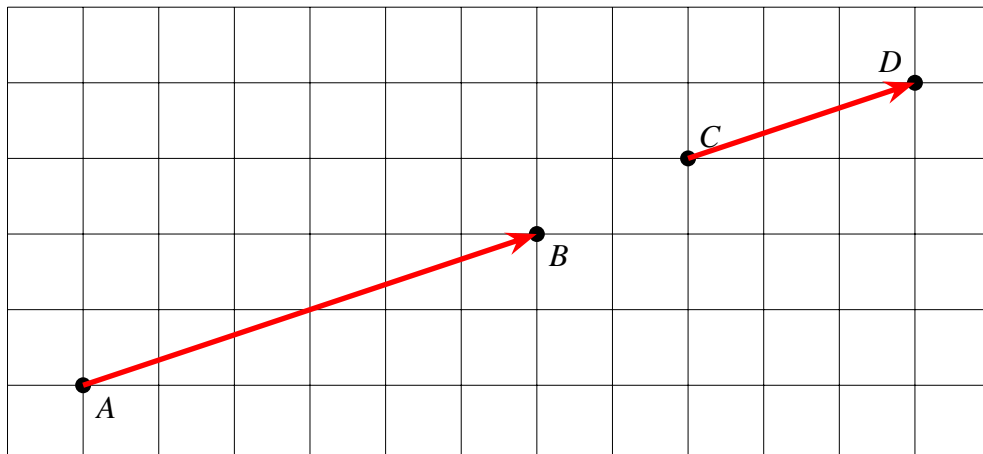


Exemple 7.46.

- i) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils colinéaires ? Justifier pourquoi.



ii) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils colinéaires ? Justifier pourquoi.

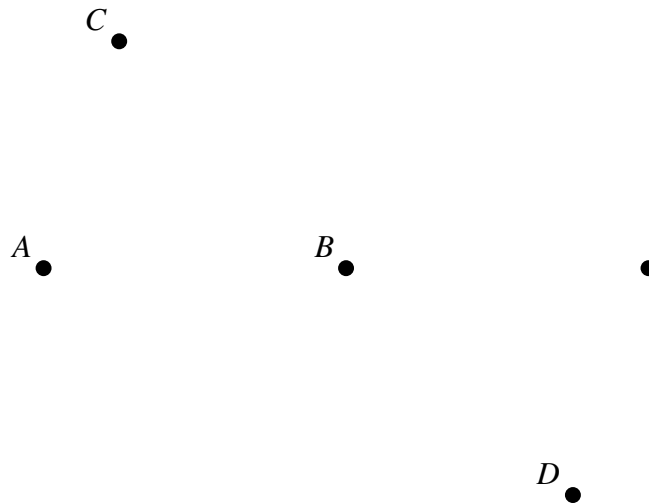


Théorème 7.47 - Alignement de points

Soient A , B et C trois points. Dire que les points A , B et C sont alignés revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exemple 7.48.

On considère les points A , B et C . On construit le point D tel que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$. Montrer que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BD}$. En déduire que les points C , B et D sont alignés.



7.4 Norme d'un vecteur

Definition 7.49 - Norme

Si $\vec{u}$ est un vecteur, on appelle **norme du vecteur** $\vec{u}$ la longueur de $\vec{u}$. On note $\|\vec{u}\|$ la norme de $\vec{u}$.

Remarque 7.50.

La norme d'un vecteur est toujours positive. C'est la longueur de la flèche.

Théorème 7.51 - Norme et colinéarité

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u} = k\vec{v}$, où k est un nombre réel. On a donc $\|\vec{u}\| = |k| \|\vec{v}\|$.

△ Attention !!! -

Bien multiplier par $|k|$ (la valeur absolue).

Exemple 7.52.

Soit $\vec{u}$ un vecteur de norme égale à 5 cm. Quelle sera la norme de $-2\vec{u}$?