

Exercices de colles en CPGE

Introduction

Ce document est une collection d'exercices que j'ai préparé lorsque j'ai donné des colles en CPGE (filrière MP) au Lycée Chateaubriand de Rennes durant l'année 2025-2026.

Les exercices proviennent de diverses sources: Internet (le site bibmath [1] est très bien documenté, avec des corrigés, mais des sites d'enseignant.e.s en CPGE peuvent fournir de très bons exercices [2, 3]) où j'ai pu puiser bon nombre d'exercices en adaptant/ajoutant/modifiant des questions, des exercices classiques que j'ai pu moi-même traiter lors de mon passage en CPGE ou encore d'autres exercices tirés de mon imagination.

Il se peut tout-à-fait que des erreurs (de français ou de maths) se soient glissées lors de la rédaction et aient échappé à mon contrôle, auquel cas je m'en excuse d'avance.

Bonne lecture à toutes et à tous !

Sommaire

I	Exercices de Seconde année	6
1	Séries numériques	7
1.1	Convergence d'une série	7
1.2	Séries alternées	10
1.3	Séries abstraites	11
2	Algèbre linéaire et éléments propres	13
2.1	Algèbre linéaire de base	13
2.2	Valeurs propres	17
3	Intégration	22
3.1	Intégrale sur un intervalle quelconque	22
3.2	Convergence dominée	25
3.3	Intégrales de fonctions abstraites	29
4	Polynôme caractéristique et réduction	32
4.1	Diagonalisation de matrices	32
4.2	Réduction de matrices	42
4.3	Matrices et endomorphismes nilpotents	47
4.4	Matrices et endomorphismes trigonalisables	49
5	Suites et séries de fonctions	51
5.1	Suites de fonctions, modes de convergence	51
5.2	Suite, séries et intégration de fonctions	53
5.3	Utilisation des séries alternées	55
5.4	Suite de fonctions abstraites	56
6	Dénombrément et familles sommables	58
6.1	Ensembles dénombrables	58
6.2	Calculs de sommes	61
6.3	Sommation par paquets	63
6.4	Familles sommables abstraites	65
7	Probabilités I	67
7.1	Cas pratiques	67
7.2	Limites de probabilités	71
7.3	Inégalités probabilistes	75

8	Polynôme minimal et réduction	77
8.1	Arithmétique des polynômes	77
8.2	Trigonalisation de matrices	79
8.3	Polynômes d'endomorphismes	88
8.4	Puissance de matrices	90
8.5	Reduction de matrices	92
9	Espaces vectoriels normés I	95
9.1	Dimension finie	95
9.2	Suites	98
9.3	Espaces de fonctions	100
9.4	Polynômes	102
10	Séries entières	107
10.1	Calcul de rayon de convergence	107
10.2	Manipulation de séries entières	108
10.3	Lien avec une équation différentielle	111
10.4	Séries entières abstraites	115
11	Espaces préhilbertiens réels I	117
11.1	Produit scalaire et orthogonalité	117
11.2	Adjoint d'un endomorphisme	122
11.3	Matrices orthogonales	124
11.4	Isométries vectorielles	126
12	Probabilités II	129
12.1	Etude de variables aléatoires discrètes	129
12.2	Inégalités probabilistes	134
12.3	Fonctions génératrices	137
13	Espaces vectoriels normés II	140
13.1	Topologie des espaces vectoriels normés	140
13.2	Applications continues	142
13.3	Applications linéaires continues et normes subordonnées	143
13.4	Connexité par arcs et compacité	147
14	Espaces préhilbertiens réels II	154
14.1	Endomorphismes symétriques	154
14.2	Reduction de matrices symétriques	155
14.3	Matrices (définies) positives	159
15	Fonctions à valeurs vectorielles	163
15.1	Dérivabilité de fonctions à valeurs matricielles	163
15.2	Intégration de fonctions à valeurs vectorielles	168
15.3	Formules de Taylor	171
16	Equations différentielles linéaires	174
16.1	Systèmes différentiels linéaires	174
16.2	Equations différentielles scalaires du second ordre	186
16.3	Equations différentielles linéaires abstraites	191

17	Intégrales à paramètres	196
17.1	Continuité et dérivabilité des intégrales à paramètre	196
17.2	Intégrales à paramètre et équations différentielles	202
18	Calcul différentiel	208
18.1	Différentiabilité de fonctions de deux ou trois variables	208
18.2	Différentiabilité: cas général	215
18.3	Lien avec les équations aux dérivées partielles	216
18.4	Différentiabilité et polynômes	219
18.5	Matrices et différentiabilité	220
19	Algèbre Générale	225
19.1	Groupes	225
19.2	Anneaux	231
19.3	Factorisation de polynômes	237
II	Exercices de Concours	240
20	Exercices Concours	241
20.1	Niveau 1 (CCINP - Mines-Télécom)	241
20.2	Niveau 2 (Centrale - Mines-Ponts)	244
20.3	Corrigé exercices niveau 1	245
20.4	Corrigé exercices niveau 2	260

Partie I

Exercices de Seconde année

Chapitre 1

Séries numériques

1.1 Convergence d'une série

Exercice 1.1 (Nature d'une série) ★

Déterminer la nature des séries suivantes:

Q1 - $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Q2 - $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

Q3 - $\sum \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^n - 1$

Solution

Q1 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} = e^{-n^2 \ln(1+\frac{1}{n})}$. Un développement limité assure que $-n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -n^2 \left[\frac{1}{n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right] = -n + o_{n \rightarrow +\infty}(n)$.

Ainsi, pour n assez grand, on a $-n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq -\frac{n}{2}$, soit ainsi $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \leq e^{-\frac{n}{2}}$. La suite étudiée étant à termes positifs, la série $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ est donc convergente.

Q2 - On sait que $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1-\frac{1}{n})}$. Or on a $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Donc $n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -1 - \frac{1}{2n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$. Finalement, $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1}$. Donc la série diverge (grossièrement).

Q3 - On note que $\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^n = e^{n \ln(1+\frac{1}{n^3})}$. De plus, on a $\ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{n^3} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)$, soit

alors $n \ln \left(1 + \frac{1}{n^3} \right) = \frac{1}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n^3} \right)^3 - 1 &= e^{\frac{1}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)} - 1 \\ &= \frac{1}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right), \end{aligned}$$

ce qui assure la convergence de la série. ■

Exercice 1.2 (Série géométrique et dérivation) ★

Soit $x \in [0, 1[$. Montrer que la série $\sum nx^n$ converge et calculer sa somme.

Solution

Soit $x \in [0, 1[$. Par croissance comparée, on a $x^n = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^3} \right)$ donc $nx^n = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$. Les deux suites étant à termes positifs, par comparaison avec une série de Riemann, la série $\sum nx^n$ converge.

De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, considérons la fonction

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{k=0}^n x^k. \end{aligned}$$

Les propriétés des sommes géométriques assurent que, pour tous $x \in [0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$. f_n est dérivable sur $[0, 1[$ (comme somme de fonctions polynomiales) de dérivée égale à

$$\begin{aligned} f'_n : [0, 1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{k=0}^n kx^{k-1}. \end{aligned}$$

De plus, on a, pour tout $x \in [0, 1[$, $f'_n(x) = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$, donnant ainsi, après multi-

plication par x , $\sum_{k=1}^n kx^k = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$
■

Exercice 1.3 (Séries de Bertrand) ★★

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Discuter de la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$. On pourra commencer par étudier les cas $\alpha < 1$ et $\alpha > 1$.

Solution

- Si $\alpha > 1$, alors, pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot n^{\frac{\alpha-1}{2}} (\ln n)^\beta} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}} \right)$. Par comparaison avec une série de Riemann (tous les termes sont positifs), la série converge.
- Si $\alpha < 1$, en réutilisant la relation $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot n^{\frac{\alpha-1}{2}} (\ln n)^\beta}$, on obtient ainsi $\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}} = \frac{(\ln n)^\beta}{n^{\frac{1-\alpha}{2}}} \cdot \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \right)$. Par comparaison avec une série de Riemann, la série diverge.
- Si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$, on peut effectuer une comparaison série-intégrale. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$. On a donc, pour tout $k \geq 2$,

$$\frac{1}{k(\ln k)^\beta} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$$

Par sommation, on obtient ainsi

$$\sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \leq \int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = \frac{1}{1-\beta} [(\ln n)^{1-\beta} - (\ln 2)^{1-\beta}]$$

La suite de droite converge vers $\frac{(\ln 2)^{1-\beta}}{\beta-1}$ donc est bornée. La suite des sommes partielles est donc majorée et croissante (car les termes sont positifs) donc la série converge.

- Si $\alpha = 1$ et $\beta < 1$, alors, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ est décroissante à partir d'une certaine valeur $A > 0$. Une comparaison série-intégrale assure que, pour tout $k \geq A$,

$$\frac{1}{k(\ln k)^\beta} \geq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}.$$

Par sommation, on a (quitte à supposer A entier),

$$\sum_{k=A}^n \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \geq \int_A^{n+1} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = \frac{1}{1-\beta} [(\ln(n+1))^{1-\beta} - (\ln A)^{1-\beta}].$$

La suite de droite tend vers $+\infty$. Par comparaison, la série diverge.

- Si $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, alors la fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ est décroissante à partir d'une certaine valeur $A > 0$. Une comparaison série-intégrale assure que, pour tout $k \geq A$,

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x \ln(x)} \geq \frac{1}{k \ln(k)} \geq \int_{k+1}^{k+2} \frac{dx}{x \ln(x)}.$$

Par sommation, on a (quitte à supposer A entier)

$$\int_A^{n+1} \frac{dx}{x \ln(x)} \geq \sum_{k=A}^n \frac{1}{k \ln(k)} \geq \int_{A+1}^{n+2} \frac{dx}{x \ln(x)},$$

soit alors, par intégration

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(A)) \geq \sum_{k=A}^n \frac{1}{k \ln(k)} \geq \ln(\ln(n+2)) - \ln(\ln(A+1))$$

On montre que $\ln(\ln(n+1)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$. En effet, on sait que $\ln(\ln(n+1)) = \ln\left(\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(\ln(n) + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. En factorisant par $\ln(n)$ dans la parenthèse du premier logarithme, on a ainsi $\ln(\ln(n+1)) = \ln(\ln(n)) + \ln\left(1 + \frac{1}{n \ln(n)} + o\left(\frac{1}{n \ln(n)}\right)\right)$. Le terme de droite est bien négligeable devant $\ln(\ln(n))$, ce qui conclut. On montre d'une manière similaire que $\ln(\ln(n+2)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$. On a ainsi

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln(n)).$$

La série se comporte comme $\ln(\ln(n))$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, elle est donc divergente. ■

1.2 Séries alternées

Exercice 1.4 (Série numérique d'un reste) ★

Soit (u_n) la suite, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n := \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + \sqrt{k}}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Solution

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ correspond à celle des restes de la série $\sum \frac{(-1)^k}{k^2 + \sqrt{k}}$. Cette série est alternée et vérifie les hypothèses du théorème des séries alternées, donc est convergente. La suite des restes est donc bien définie.

D'après le théorème des séries alternées, on a $|u_n| \leq \frac{1}{(n+1)^2 + \sqrt{n+1}}$. Or, on a $(n+1)^2 + \sqrt{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2$. Donc, par comparaison avec une série de Riemann, la série $\sum u_n$ converge.

■

1.3 Séries abstraites

Exercice 1.5 (Convergence et carré) ★

Q1 - Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente. Montrer que $\sum u_n^2$ converge.

Q2 - Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes à termes positifs. Montrer que $\sum u_n v_n$ converge.

Q3 - Le résultat précédent reste-t-il valide si on retire l'hypothèse de positivité sur les termes des deux séries ?

Solution

Q1 - Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc, par définition de convergence vers 0, il existe un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| \leq 1$. Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, $u_n^2 \leq u_n$. Donc, par sommation, $\sum_{k=n_0}^n u_k^2 \leq \sum_{k=n_0}^n u_k$. On obtient ainsi

$$\sum_{k=0}^n u_k^2 \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^n u_k.$$

La suite de droite converge (convergence de $\sum u_n$), donc la suite $\left(\sum_{k=0}^n u_k^2 \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée et croissante (car le terme général est positif). Donc $\sum u_n^2$ converge.

Q2 - Soit $n \in \mathbb{N}$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz assure que

$$\sum_{k=0}^n u_k v_k \leq \left(\sum_{k=0}^n u_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=0}^n v_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La suite de droite converge car, d'après la question précédente, $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent.

Donc la suite $\left(\sum_{k=0}^n u_k v_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée et croissante (car le terme général est positif).

Donc $\sum u_n v_n$ converge.

Q3 - Prenons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Le théorème des séries alternées assure que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent. Pourtant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n v_n = \frac{1}{n}$. Le critère de convergence des séries de Riemann assure que $\sum u_n v_n$ diverge. Le résultat n'est donc pas conservé.

Exercice 1.6 (Test de condensation de Cauchy) ★ ★ ★

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs.

Q1 - Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.

Indication: On pourra raisonner sur la suite $\left(\sum_{k=1}^{2^n} u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Q2 - Application: Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ en fonction de α .

Solution

Q1 - Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\sum_{k=1}^{2^n} u_k = \sum_{j=0}^n \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} u_k$. Dans chaque somme $\sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} u_k$, on peut minorer u_k par $u_{2^{j+1}-1}$ et majorer u_k par u_{2^j} , donnant ainsi

$$\sum_{j=0}^n \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} u_{2^{j+1}-1} \leq \sum_{j=0}^n \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} u_k \leq \sum_{j=0}^n \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} u_{2^j},$$

soit, après simplification, $\sum_{j=0}^n 2^j u_{2^{j+1}-1} \leq \sum_{k=1}^{2^n} u_k \leq \sum_{j=0}^n 2^j u_{2^j}$.

Nous obtenons ainsi $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} 2^k u_{2^k} \leq \sum_{k=1}^{2^n} u_k \leq \sum_{k=0}^n 2^k u_{2^k}$, ce qui permet de conclure par comparaison.

Q2 - Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, en prenant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$, les séries $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ et $\sum 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum (2^{1-\alpha})^n$ sont de même nature. Or, la seconde série est une série géométrique, convergente si et seulement si $2^{1-\alpha} < 1$, i.e. $1 - \alpha < 0$ soit $\alpha > 1$.

Chapitre 2

Algèbre linéaire et éléments propres

2.1 Algèbre linéaire de base

Exercice 2.1 (Famille de fonctions exponentielles) ★

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n$ des réels tels que $a_1 < \dots < a_n$. On considère la famille de fonctions $\mathcal{F} = \{f_j : x \mapsto e^{a_j x}\}_{1 \leq j \leq n}$.

Q1 - Montrer que $\mathcal{F}$ est libre dans l'espace vectoriel $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Q2 - $\mathcal{F}$ est-elle génératrice de l'espace vectoriel $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Solution

Q1 - Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_j \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 e^{a_1 x} + \lambda_2 e^{a_2 x} + \dots + \lambda_n e^{a_n x} = 0$. En multipliant cette égalité par $e^{-a_1 x}$, nous obtenons $\lambda_1 + \lambda_2 e^{(a_2 - a_1)x} + \dots + \lambda_n e^{(a_n - a_1)x}$. Comme $a_2 - a_1, \dots, a_n - a_1 > 0$, on fait tendre x vers $-\infty$, et on obtient ainsi $\lambda_1 = 0$. Il reste alors $\lambda_2 e^{a_2 x} + \dots + \lambda_n e^{a_n x} = 0$, avec $a_2 < \dots < a_n$, ce qui correspond au problème de départ avec une fonction en moins. Récursivement, on montre ainsi que $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, ce qui conclut.

Q2 - Notons g la fonction $x \mapsto x e^{a_1 x}$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = g$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 e^{a_1 x} + \dots + \lambda_n e^{a_n x} = x e^{a_1 x}$. En multipliant cette égalité par $e^{-a_n x}$, on a $\lambda_1 e^{(a_1 - a_n)x} + \dots + \lambda_{n-1} e^{(a_{n-1} - a_n)x} + \lambda_n = x e^{(a_1 - a_n)x}$. On fait tendre x vers $+\infty$, ce qui donne $\lambda_n = 0$. Il reste donc $\lambda_1 e^{a_1 x} + \dots + \lambda_{n-1} e^{a_{n-1} x} = x e^{a_1 x}$. En procédant récursivement, on montre que $\lambda_{n-1} = \dots = \lambda_2 = 0$. Il reste $\lambda_1 e^{a_1 x} = x e^{a_1 x}$, soit $\lambda_1 = x$, ce qui est impossible, puisque λ_1 est un scalaire. $\mathcal{F}$ n'est donc pas génératrice de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

■

Exercice 2.2 (Une application linéaire entre matrices) ★

Soit la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Soit u l'endomorphisme

$$\begin{aligned} u : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ X &\longmapsto MX \end{aligned}.$$

Q1 - u est-il injectif ? Surjectif ?

Q2 - Déterminer une base de $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$.

Solution

Q1 - On peut noter que

$$u\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le noyau de u n'est pas réduit à $\{0_2\}$. Ainsi, u n'est pas injectif.

De plus, on note que $\det(M) = 0$. M n'est pas inversible. Supposons qu'il existe $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $u(X) = I_2$. Les propriétés du déterminant assurent que $0 = \det(M) \det(X) = \det(MX) = \det(I_2) = 1$. Contradiction. u n'est donc pas surjectif.

Q2 - Soit $X \in \text{Ker}(u)$. Notons $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, où $x, y, z, w \in \mathbb{R}$. On a ainsi

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker}(u) &\iff \begin{bmatrix} x + 2z & y + 2w \\ 3x + 6z & 3y + 6w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + 2w = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

On peut donc proposer $\left\{ \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ comme base de $\text{Ker}(u)$.

De plus, comme le noyau est de dimension 2, le théorème du rang assure que l'image est également un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 2. De même, en notant $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, où $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, on a

$$MX = \begin{bmatrix} x + 2z & y + 2w \\ 3x + 6z & 3y + 6w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2z & y + 2w \\ 3(x + 2z) & 3(y + 2w) \end{bmatrix}.$$

On peut donc proposer $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\}$ comme base de $\text{Im}(u)$.

■

Exercice 2.3 (Une matrice semblable à sa transposée) ★★

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$J_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Q1 - Quelles opérations élémentaires successives sur les lignes et les colonnes de J_λ permettent de passer de J_λ à sa transposée ?

Q2 - En déduire que J_λ est semblable à sa transposée.

Solution

Q1 - Etudions la permutation des lignes et colonnes 1 & 3 de J_λ , on obtient ainsi

$$J_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_3} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = J_\lambda^T.$$

Q2 - Permuter les lignes (resp. colonnes) de J_λ revient à multiplier à gauche (resp. à droite) par la matrice

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a ainsi $PJ_\lambda P = J_\lambda^T$. De plus, on vérifie aisément que $P^{-1} = P$, ce qui prouve le résultat.

■

Exercice 2.4 (Projection sur un plan) ★

Soit le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, considérons le plan vectoriel

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.$$

Soit la droite vectorielle $D = \text{Vect}\{(0, 0, 1)\}$.

Q1 - Montrer que $E = F \oplus D$.

Q2 - Soit la projection $p : E \longrightarrow F$ la projection sur F parallèlement à D . Donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Q3 - Donner une base de F , que l'on notera $\{v_1, v_2\}$. En notant $v_3 = (0, 0, 1)$, montrer que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de E . Donner la matrice de p dans cette base.

Solution

Q1 - Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a $(x, y, z) = (x, y, -(x + y)) + (0, 0, x + y + z)$, avec $(x, y, -(x + y)) \in F$ et $(0, 0, x + y + z) \in D$ donc $E = F + D$. De plus, si $(x, y, z) \in F \cap D$, alors, comme $D = \text{Vect}\{(0, 0, 1)\}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y, z) = (0, 0, \lambda)$. Donc $x = y = 0$. De plus, $(x, y, z) \in F$ donc $x + y + z = 0$ soit $z = \lambda = 0$, donc $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, i.e. $F \cap D = \{0\}$, ce qui conclut.

Q2 - On a ainsi

$$\begin{aligned} p : E = F \oplus D &\longrightarrow F \\ (x, y, z) &\longrightarrow (x, y, -(x + y)) \end{aligned}$$

En notant C la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a

$$\text{Mat}_C(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Q3 - On a

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} \\ &= \{(x, y, -(x + y)), (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}. \end{aligned}$$

La famille $\{v_1, v_2\} = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ est génératrice de F et est de dimension 2, c'est donc une base de F . De plus, en complétant cette famille avec le vecteur $v_3 = (0, 0, 1)$, on a

$$\det(v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

donc $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de E . De plus, comme $p(v_1) = v_1$, $p(v_2) = v_2$ et $p(v_3) = 0$, on a finalement

$$\text{Mat}_{\{v_1, v_2, v_3\}}(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

■

2.2 Valeurs propres

Exercice 2.5 (Valeurs propres d'un opérateur) ★

Soit T l'endomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini pour tout $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par

$$T(f) : x \mapsto f'(x) + \frac{1}{1+x^2}f(x)$$

Déterminer les valeurs propres (réelles) de T ainsi que les sous-espaces propres associés.

Solution

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de T . On cherche alors $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, non nulle, telle que $T(f) = \lambda f$. Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda f(x) = f'(x) + \frac{1}{1+x^2}f(x)$, soit $f'(x) = \left(\lambda - \frac{1}{1+x^2}\right)f(x)$. La résolution de cette équation différentielle assure qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha e^{\lambda x - \text{Arctan}(x)}$.

Ainsi, pour tout réel λ , λ est valeur propre de T , avec pour sous-espace propre associé

$$E_\lambda(T) = \text{Vect} \left\{ x \mapsto e^{\lambda x - \text{Arctan}(x)} \right\}.$$

■

Exercice 2.6 (Différence finie et polynômes) ★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application linéaire

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\longmapsto P(X+1) - P(X) \end{aligned}.$$

Q1 - Déterminer $\text{Im}(u)$. En déduire $\text{rg}(u)$.

Q2 - Déterminer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q3 - Déterminer les valeurs propres de u ainsi que les sous-espaces propres associés.

Q4 - u est-il diagonalisable ?

Solution

Q1 - Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On écrit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. On a alors

$$u(P) = \sum_{k=0}^n a_k [(X+1)^k - X^k] = \sum_{k=1}^n a_k [(X+1)^k - X^k] = \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} X^j.$$

La famille de polynômes $\left\{ \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} X^j \right\}_{1 \leq k \leq n}$ est échelonnée en degré (de 0 à $n-1$) et est de cardinal n , c'est donc une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On a donc $\text{Im}(u) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et par conséquent, $\text{rg}(u) = n$.

Q2 - On a vu à la question précédente que $u(1) = 0$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$u(X^k) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} X^j. \text{ On obtient ainsi, si } \mathcal{B} = \{1, X, \dots, X^n\},$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 0 & 2 & 3 & \cdots & n \\ & & 0 & 3 & \cdots & \binom{n}{2} \\ & & & 0 & \ddots & \vdots \\ (0) & & & & \ddots & \binom{n}{n-1} \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Q3 - Soit λ une valeur propre de u . Il existe alors $u \in \mathbb{R}_n[X] \setminus \{0\}$ tel que $u(P) = \lambda P$. Matriciellement, cette relation devient $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P)$. De plus, si

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \text{ avec } a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}, \text{ alors on a}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

La relation $u(P) = \lambda P$ revient donc à résoudre le système linéaire suivant:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} a_1 & + & a_2 & + \cdots + a_n & = & \lambda a_0 \\ & & 2a_2 & + \cdots + na_n & = & \lambda a_1 \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \binom{n}{n-1}a_n & = & \lambda a_{n-1} \\ & & & & 0 & = & \lambda a_n \end{array} \right.$$

On a donc $\lambda a_n = 0$.

- Si $\lambda \neq 0$, alors $a_n = 0$. En passant à la ligne du dessus, on a $a_{n-1} = 0$. Pour $0 \leq i \leq n-1$, la ligne i du système possède son membre de gauche qui dépend de $a_{i+1}, \dots, a_n$ alors que son membre de droite dépend de a_i . On peut donc "remonter" le système en montrant récursivement que $a_{n-2} = \dots = a_0 = 0$, soit $P = 0$. u n'admet donc pas de valeur propre non nulle.
- Si $\lambda = 0$, alors $P \in \ker(u)$. Puisque $\text{rg}(u) = n$, le théorème du rang assure que $\dim(\ker(u)) = 1$. Or, si P est constant (i.e. $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_1 = \dots = a_n = 0$), alors $u(P) = 0$. 0 est donc valeur propre de u , avec comme sous-espace propre (qui coïncide avec le noyau de u) associé l'espace des polynômes constants $\mathbb{R}_0[X]$, isomorphe à $\mathbb{R}$, ce qui est bien un espace de dimension 1.

Q4 - Il n'existe donc pas de base de vecteurs propres (le sous-espace propre associé à 0, la seule valeur propre, n'est que de dimension 1), donc u n'est pas diagonalisable.

■

Exercice 2.7 (Lemme de Hadamard et disques de Gerschgorin) ★★

Soient $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q1 - On suppose que A est à diagonale strictement dominante, i.e. pour tout entier

$$1 \leq i \leq n, |a_{i,i}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}|. \text{ Montrer que } A \text{ est inversible.}$$

Q2 - Soit $1 \leq i \leq n$ un entier. Considérons $D_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}| \right\}$.

Soit λ une valeur propre de A . Montrer que $\lambda \in \bigcup_{1 \leq i \leq n} D_i$.

Solution

Q1 - Raisonnons par l'absurde en supposant que A est à diagonale strictement dominante et non inversible. Le noyau de A n'est donc pas réduit à $\{0\}$. Soit alors $X = (x_1, \dots, x_n) \in \ker(A) \setminus \{0\}$. Comme $X \neq 0$, il existe un entier $1 \leq i_0 \leq n$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| > 0$.

Comme $AX = 0$, on a $-a_{i_0, i_0}x_{i_0} = \sum_{j=1, j \neq i_0}^n a_{i_0, j}x_j$. En divisant par x_{i_0} puis en passant à la valeur absolue, on a

$$|a_{i_0, i_0}| \leq \sum_{j=1, j \neq i_0}^n |a_{i_0, j}| \left| \frac{x_j}{x_{i_0}} \right| \leq \sum_{j=1, j \neq i_0}^n |a_{i_0, j}|,$$

ce qui contredit l'inégalité de départ. A est donc inversible.

Q2 - Soit λ une valeur propre de A . Il existe donc $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$. Comme X est non nul, il existe un entier $1 \leq i_0 \leq n$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| > 0$. La relation

$AX = \lambda X$ donne ainsi $(a_{i_0, i_0} - \lambda)x_{i_0} = - \sum_{j=1, j \neq i_0}^n a_{i_0, j}x_j$. En divisant par x_{i_0} puis en passant

à la valeur absolue, on a $|a_{i_0, i_0} - \lambda| \leq \sum_{j=1, j \neq i_0}^n |a_{i_0, j}|$, autrement dit $\lambda \in D_{i_0} \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} D_i$.

■

Exercice 2.8 (Valeurs propres et dérivée seconde) ★ ★ ★

Soit le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $E = \{f \in \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R}) : \forall k \in \mathbb{N}, f^{(2k)}(0) = f^{(2k)}(1)\}$.

Q1 - Montrer que E n'est pas réduit à $\{0\}$.

Q2 - On considère l'endomorphisme $T \in \mathcal{L}(E)$ défini pour tout $f \in E$ par $T(f) = -f''$. Montrer que T est bien défini et déterminer les valeurs propres (réelles) de T ainsi que les sous-espaces propres associés.

Solution

Q1 - Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles donnée par $f : x \mapsto \sin(\pi x)$. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(2k)} : x \mapsto (-\pi^2)^k \sin(\pi x)$. On a bien $f \in E \setminus \{0\}$, ce qui conclut.

Q2 - T est bien linéaire par linéarité de la dérivation. Soient $f \in E$ et $k \in \mathbb{N}$. $(-f'')^{(2k)}(0) = -f^{(2k+2)}(0) = -f^{(2(k+1))}(0) = 0$. On montre de la même manière que $(-f'')^{(2k)}(1) = 0$. Donc $T(f) = -f'' \in E$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de T . On cherche donc $f \in E \setminus \{0\}$ tel que $T(f) = \lambda f$, soit $f'' + \lambda f = 0$. Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre.

- Si $\lambda < 0$, alors ils existent $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = \alpha e^{\sqrt{-\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Or, on a $f(0) = f(1) = 0$, ce qui conduit au système linéaire

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ e^{\sqrt{-\lambda}}\alpha + e^{-\sqrt{-\lambda}}\beta = 0 \end{cases}.$$

Puisque $\lambda < 0$, $e^{-\sqrt{-\lambda}} < 1 < e^{\sqrt{-\lambda}}\alpha$ et la résolution de ce système linéaire assure que $\alpha = \beta = 0$, donc $f = 0$. λ n'est donc pas valeur propre de T .

- Si $\lambda = 0$, alors ils existent $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = \alpha x + \beta$. La condition $f(0) = f(1) = 0$ conduit au système linéaire

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}.$$

On obtient donc $\alpha = \beta = 0$, soit $f = 0$, donc 0 n'est pas valeur propre de T .

- Si $\lambda > 0$, alors ils existent $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = \alpha \cos(\sqrt{\lambda}x) + \beta \sin(\sqrt{\lambda}x)$. La condition $f(0) = 0$ donne $\alpha = 0$, donc pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = \beta \sin(\sqrt{\lambda}x)$. De plus, la condition $f(1) = 1$ donne $\beta \sin(\sqrt{\lambda}) = 1$.

> Si $\sqrt{\lambda} \notin \pi\mathbb{N}^*$, alors $\sin(\sqrt{\lambda}) \neq 0$, donc $\beta = 1/\sin(\sqrt{\lambda})$ et $f = \sin(\sqrt{\lambda}x)/\sin(\sqrt{\lambda})$, donc λ n'est pas valeur propre de T si $\sqrt{\lambda} \notin \pi\mathbb{Z}$.

> Si $\sqrt{\lambda} \in \pi\mathbb{N}^*$, autrement dit s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda = (p\pi)^2$, alors, si $f : x \mapsto \sin(p\pi x)$ (où $\beta \in \mathbb{R}$), on a $T(f) = (p\pi)^2 f = \lambda f$. Donc, λ est valeur propre de T si $\sqrt{\lambda} \in \pi\mathbb{N}^*$.

Ainsi, les valeurs propres de T sont $(p\pi)^2$, où $p \in \mathbb{N}^*$ et les sous-espaces propres associés sont $E_{(p\pi)^2}(T) = \text{Vect} \{x \mapsto \sin(p\pi x)\}$.

■

Chapitre 3

Intégration

3.1 Intégrale sur un intervalle quelconque

Exercice 3.1 (Nature d'une intégrale) ★

Déterminer la nature (convergente ou divergente) des intégrales suivantes:

$$\text{Q1 - } \int_0^{+\infty} \left(\sqrt[4]{1+x^4} - \sqrt[3]{1+x^3} \right) \ln(x) dx.$$

$$\text{Q2 - } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} \ln(x)}.$$

$$\text{Q3 - } \int_1^{+\infty} x^{\frac{1}{x} - \ln(x)} dx.$$

Solution

Q1 - Soit $f : x \mapsto \left(\sqrt[4]{1+x^4} - \sqrt[3]{1+x^3} \right) \ln(x)$. f est continue sur $]0, +\infty[$, on étudie alors la convergence de l'intégrale en 0 et en $+\infty$ en séparant l'intégrale en deux parties $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{+\infty} f(x) dx$.

- Un développement limité en 0 assure que $\sqrt[4]{1+x^4} - \sqrt[3]{1+x^3} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{3}x^3$, donc

$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{3}x^3 \ln(x)$. Les résultats de croissance comparée assurent que

$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, donc l'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$ converge.

- De même, un développement limité en $+\infty$ assure que $\sqrt[4]{1+x^4} - \sqrt[3]{1+x^3} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{3x^2}$, donc $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\ln(x)}{3x^2}$. Comme

$\frac{\ln(x)}{3x^2} = \frac{1}{3x^{\frac{3}{2}}} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{2}}} = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \right)$, une comparaison avec une intégrale de $\frac{1}{x^\alpha}$ assure que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(\sqrt[4]{1+x^4} - \sqrt[3]{1+x^3} \right) \ln(x) dx$ est donc convergente.

Q2 - Soit $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x} \ln(x)}$. f est continue sur $]0, 1[$, on étudie alors la convergence de l'intégrale en 0 et en 1 en séparant l'intégrale en deux parties

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx.$$

- Comme $\frac{1}{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, on a donc $f(x) = o_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$, donc, par comparaison avec une intégrale en $\frac{1}{x^\alpha}$, l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$ converge.

- Un développement limité au voisinage de 0 de $t \mapsto f(1+t)$ assure que $f(1+t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t}$.
Par comparaison avec une intégrale de $\frac{1}{x^\alpha}$, l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$ diverge.

L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x} \ln(x)} dx$ est donc divergente.

Q3 - Soit $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x} - \ln(x)}$. Comme f est continue sur $[1, +\infty[$, on étudie la convergence de l'intégrale en $+\infty$. En constatant que $f(x) = e^{\frac{\ln(x)}{x} - \ln(x)^2}$, on obtient ainsi

$$x^2 f(x) = e^{2 \ln(x) + \frac{\ln(x)}{x} - \ln(x)^2} = e^{-\ln(x)^2 + o_{x \rightarrow +\infty}(\ln(x)^2)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Cela implique que $f(x) = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)$, donc, par comparaison avec une intégrale de $\frac{1}{x^\alpha}$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} x^{\frac{1}{x} - \ln(x)} dx$ est convergente.

■

Exercice 3.2 (Intégrales et logarithme) ★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \ln(x)^n dx$ converge et calculer sa valeur.

Solution

Nous allons raisonner de manière récursive pour étudier cette suite d'intégrales.

Tout d'abord, nous avons, pour $\varepsilon > 0$, une intégration par parties assure que

$$\int_{\varepsilon}^1 \ln(x) dx = [x \ln(x)]_{x=\varepsilon}^{x=1} - \int_{\varepsilon}^1 x \cdot \frac{1}{x} dx = [x \ln(x)]_{x=\varepsilon}^{x=1} = [x \ln(x) - x]_{x=\varepsilon}^{x=1}.$$

Nous avons ainsi $\int_{\varepsilon}^1 \ln(x) dx = -1 - \varepsilon \ln(\varepsilon) + \varepsilon$. En faisant tendre ε vers 0, on a bien la convergence de l'intégrale ainsi que $\int_0^1 \ln(x) dx = -1$.

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $I_n = \int_0^1 \ln(x)^n dx$. Nous allons exprimer I_{n+1} en fonction de I_n après avoir montré la convergence de I_n . Soit $\varepsilon > 0$. Une intégration par parties assure que

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^1 \ln(x)^{n+1} dx &= \left[x \ln(x)^{n+1} \right]_{x=\varepsilon}^{x=1} - (n+1) \int_{\varepsilon}^1 x \cdot \frac{1}{x} \ln(x)^n dx \\ &= -\varepsilon \ln(\varepsilon)^{n+1} - (n+1) \int_{\varepsilon}^1 \ln(x)^n dx. \end{aligned}$$

Ainsi, si I_n converge, et les résultats de croissance comparée assurant que $\varepsilon \ln(\varepsilon)^{n+1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, on obtient la convergence de I_{n+1} lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Comme I_1 converge, I_n converge pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De plus, on a $I_{n+1} = -(n+1)I_n$. Ainsi, puisque $I_1 = -1$, une récurrence assure que $I_n = (-1)^n n!$.

■

Exercice 3.3 (Décroissance et fonction gaussienne) ★★

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge (on ne cherchera pas à calculer sa valeur) et que $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$

Solution

Tout d'abord, les résultats de croissance comparée assurent que $t^2 e^{-t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, ainsi, $e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc, par comparaison avec une intégrale en $\frac{1}{t^a}$, et par positivité de la fonction $t \rightarrow e^{-t^2}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.

De plus, si $T > x > 0$, alors une intégration par partie montre que

$$\int_x^T e^{-t^2} dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-T^2}}{2T} - \int_x^T \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt,$$

soit, lorsque $T \rightarrow +\infty$, $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt$.

Comme on a $0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt \leq \frac{1}{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$, on en déduit que $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt = o\left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt\right)$, ce qui fournit le résultat souhaité.

■

3.2 Convergence dominée

Exercice 3.4 (Suite d'intégrales - Découpage) ★★

Dans tout l'exercice, $n \in \mathbb{N}$.

Q1 - Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + e^x}$ converge.

Q2 - Soit $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + e^x}$. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ converge et préciser sa limite.

Solution

Soit n un entier positif.

Q1 - La fonction $f_n : x \mapsto \frac{1}{x^n + e^x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc nous allons étudier l'intégrabilité en $+\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est positive et $f_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x}$. La fonction $x \mapsto e^{-x}$ étant intégrable et positive sur $\mathbb{R}_+$, les fonctions f_n le sont aussi, ce qui conclut.

Q2 - Etudions la limite (éventuelle) de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$.

$$\frac{1}{x^n + e^x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \in [0, 1[\\ \frac{1}{1+e} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

De plus, pour tous $n \geq 0$, $x \in [0, 1]$, $0 \leq \frac{1}{x^n + e^x} \leq e^{-x}$ et la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + e^x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - e^{-1}.$$

■

Exercice 3.5 (Un équivalent d'une suite d'intégrales) ★ ★ ★

Dans tout l'exercice, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Q1 - Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$ converge.

Q2 - Soit $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 2}$ converge et préciser sa limite.
Indication: Couper l'intégrale en deux.

Q3 - En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{n^n + t^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{n-1}}$.
Indication: Faire le changement de variable $x = \frac{t}{n}$.

Solution

Soit n un entier supérieur à 2.

Q1 - La fonction $f_n : x \mapsto \frac{1}{1+x^n}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc nous allons étudier l'intégrabilité en $+\infty$. On note que $f_n(x) = \underset{n \rightarrow +\infty}{O} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)$ (par exemple en montrant que le quotient $\frac{1+x^2}{1+x^n}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$), ce qui conclut par comparaison à une intégrale de $\frac{1}{x^\alpha}$.

Q2 - Etudions la limite (éventuelle) de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 2}$ en coupant l'intégrale en deux.

- Si $x \in [0, 1]$, alors

$$\frac{1}{1+x^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

De plus, pour tous $n \geq 2$, $x \in [0, 1]$, $0 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ et la fonction $x \mapsto 1$ est intégrable sur $[0, 1]$. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 dx = 1.$$

- Si $x > 1$, alors $\frac{1}{1+x^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$. De plus, pour tout $n \geq 2$, $x^n \geq x^2$ soit $\frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{1+x^2}$. Or, la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $]1, +\infty[$. Ainsi, par la théorème de convergence dominée, on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \int_1^{+\infty} 0 \, dx = 0.$$

Ainsi, par somme, la suite $(I_n)_{n \geq 2}$ converge vers 1.

Q3 - Soit $T > 0$. Un changement de variable $x = \frac{t}{n}$ assure que

$$\int_0^T \frac{dx}{1+x^n} = \frac{1}{n} \int_0^{\frac{T}{n}} \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{n}\right)^n} = n^{n-1} \int_0^{\frac{T}{n}} \frac{dt}{n^n + t^n}.$$

Donc, si $T \rightarrow +\infty$, on a $I_n = n^{n-1} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{n^n + t^n}$. Comme $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, on a ainsi $I_n = n^{n-1} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{n^n + t^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, ce qui fournit l'équivalent demandé.

■

Exercice 3.6 (Une suite d'intégrales) ★ ★ ★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Q1 - Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt[n]{1+x^n}}$ converge.

Q2 - Soit $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt[n]{1+x^n}}$. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Solution

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Q1 - Pour tous $n \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$, $\sqrt[n]{1+x^n} \geq 1$, donc $\frac{1}{(1+x^2)\sqrt[n]{1+x^n}} \leq \frac{1}{1+x^2}$. Or, la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (comparaison à une intégrale de $\frac{1}{x^a}$). Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt[n]{1+x^n}}$ converge.

Q2 - Soit la fonction

$$\begin{aligned} f_n : [0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \frac{1}{(1+x^2)\sqrt[n]{1+x^n}}. \end{aligned}$$

- Si $0 \leq x < 1$, alors

$$\sqrt[n]{1+x^n} = (1+x^n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln(1+x^n)} = e^{\frac{1}{n} (x^n + o_{n \rightarrow +\infty}(x^n))} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

On obtient ainsi $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x^2}$.

- Si $x = 1$, alors $f_n(1) = \frac{1}{2^{1+\frac{1}{n}}} = e^{-\ln(2)(1+\frac{1}{n})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$.

- Si $x > 1$, alors

$$\sqrt[n]{1+x^n} = x(1+x^{-n})^{\frac{1}{n}} = xe^{\frac{1}{n}\ln(1+x^{-n})} = xe^{\frac{1}{n}(x^{-n} + o_{n \rightarrow +\infty}(x^{-n}))} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x.$$

On obtient ainsi $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(1+x^2)}$. Donc pour tout $x \geq 0$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$ avec, pour tout $x \geq 0$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{si } x \in [0, 1[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ \frac{1}{x(1+x^2)} & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

De plus, lors de la première question, nous avons établi que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}_+$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$, et la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, par le théorème de convergence dominée, on a

$$I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}.$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ étant donnée par $x \mapsto \text{Arctan}(x)$, la première intégrale vaut $\text{Arctan}(1) - \text{Arctan}(0) = \frac{\pi}{4}$.

Pour le calcul de la seconde intégrale, une décomposition en éléments simples assure que $\frac{1}{X(1+X^2)} = \frac{1}{X} - \frac{X}{1+X^2}$. Ainsi, si $T > 0$, on a

$$\begin{aligned} \int_1^T \frac{dx}{x(1+x^2)} &= \int_1^T \frac{dx}{x} - \int_1^T \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln(T^2) - \ln(1+T^2) + \ln(2) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{T^2}\right) + \ln(2) \right]. \end{aligned}$$

Donc, en passant à la limite $T \rightarrow +\infty$, on obtient $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)} = \frac{1}{2} \ln(2)$, soit finalement $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln(2)$.

■

3.3 Intégrales de fonctions abstraites

Exercice 3.7 (Limite d'une fonction intégrable) ★

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que f et f' soient intégrables sur $[0, +\infty[$. Montrer que $f \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Solution

Tout d'abord, comme f est de classe C^1 , on peut écrire, pour tout $x \geq 0$, $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$. Puisque f' est intégrable sur $[0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f'(t) dt$ converge, donc il existe $\ell \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$.

Supposons que $\ell \neq 0$. En revenant à la définition de la limite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \geq A$, $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$. Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe donc A tel que, pour tout $x \geq A$, $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon$, soit, en intégrant entre 0 et x , $(\ell - \varepsilon)x \leq \int_0^x f(t) dt \leq (\ell + \varepsilon)x$. Si $\ell > 0$, alors on a, pour tout $x \geq A$, $1 - \frac{\varepsilon}{\ell} \leq \frac{1}{\ell x} \int_0^x f(t) dt \leq 1 + \frac{\varepsilon}{\ell}$. De même, si $\ell < 0$, alors pour tout $x \geq A$, $1 - \frac{\varepsilon}{\ell} \geq \frac{1}{\ell x} \int_0^x f(t) dt \geq 1 + \frac{\varepsilon}{\ell}$. On a donc montré que $\int_0^x f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ell x$. Or $\ell \neq 0$, donc ce résultat est absurde puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge par intégrabilité de f . Donc $\ell = 0$.

Exercice 3.8 (Lemme de Riemann-Lebesgue) ★★

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et intégrable. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto f(t) \cos(nt)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ puis que

$$\int_0^{+\infty} f(t) \cos(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Indication: On pourra d'abord montrer le théorème pour une intégrale sur $[0, T]$, où $T < +\infty$.

Solution

Tout d'abord, si $n \in \mathbb{N}$, alors, pour tout $t \geq 0$, $|f(t) \cos(nt)| \leq |f(t)|$, donc, par comparaison entre fonctions positives, la fonction $t \mapsto f(t) \cos(nt)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) \cos(nt) dt$ converge.

Soit $T > 0$. Une intégration par parties assure que

$$\int_0^T f(t) \sin(nt) dt = \frac{1}{n} f(T) \sin(nT) - \frac{1}{n} \int_0^T f'(t) \sin(nt) dt.$$

Le premier terme converge vers 0 comme produit d'une suite bornée et d'une suite convergeant vers 0. De plus, on a $\frac{1}{n} \left| \int_0^T f'(t) \sin(nt) dt \right| \leq \frac{1}{n} \int_0^T |f'(t)| dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (l'intégrale de $|f'|$ sur $[0, T]$ est bien finie car f' est continue. On obtient ainsi

$$\int_0^T f(t) \cos(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Puisque f est intégrable sur $[0, +\infty[$, on a $\int_x^{+\infty} |f(t)| dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après ce qui précède, il existe $T > 0$ tel que $\int_T^{+\infty} |f'(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2}$. De plus, d'après le résultat établi sur $[0, T]$, on a $\int_0^T f(t) \cos(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $\left| \int_0^T f(t) \cos(nt) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On a donc, pour tout entier $n \geq n_0$,

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t) \cos(nt) dt \right| \leq \left| \int_0^T f(t) \cos(nt) dt \right| + \int_T^{+\infty} |f'(t)| dt \leq \varepsilon,$$

ce qui conclut. ■

Exercice 3.9 (Théorème de Cesaro version intégrale) ★ ★ ★

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L$, où $L \in \mathbb{R}$. Montrer que $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L$.

Solution

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L$, il existe $x_0 > 0$ tel que pour tout $x \geq x_0$, $|f(x) - L| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Ainsi, nous obtenons, si $x \geq x_0$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt - L \right| &= \left| \frac{1}{x} \int_0^{x_0} f(t) dt + \frac{1}{x} \int_{x_0}^x f(t) dt - L \right| \\ &\leq \frac{1}{x} \left| \int_0^{x_0} f(t) dt \right| + \left| \frac{1}{x} \int_{x_0}^x f(t) dt - \frac{x - x_0}{x} L + \frac{x - x_0}{x} L - \frac{x - x_0}{x - x_0} L \right| \\ &\leq \frac{1}{x} \left| \int_0^{x_0} f(t) dt \right| + \frac{1}{x} \left| \int_{x_0}^x [f(t) - L] dt \right| + \frac{|L|x_0}{x}. \end{aligned}$$

On peut majorer le second terme du membre de droite de l'inégalité en utilisant l'inégalité triangulaire sur les intégrales, donnant ainsi

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt - L \right| \leq \frac{1}{x} \left| \int_0^{x_0} f(t) dt \right| + \frac{1}{x} \int_{x_0}^x |f(t) - L| dt + \frac{|L|x_0}{x}.$$

Toujours sur le second terme du membre de droite de l'inégalité, puisque $t \geq x_0$, on a $|f(t) - L| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, ce qui donne alors

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt - L\right| &\leq \frac{1}{x}\left|\int_0^{x_0} f(t)dt\right| + \frac{\varepsilon}{3}\frac{x-x_0}{x} + \frac{|L|x_0}{x} \\ &\leq \frac{1}{x}\left|\int_0^{x_0} f(t)dt\right| + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{|L|x_0}{x}.\end{aligned}$$

De plus, on peut toujours trouver $x_1 > 0$ tel que, pour tout $x \geq x_1$, $\frac{1}{x}\left|\int_0^{x_0} f(t)dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ et $x_2 > 0$ tel que, pour tout $x \geq x_2$, $\frac{|L|x_0}{x} \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Donc, pour tout $x \geq \text{Max}(x_0, x_1, x_2)$, on a $\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt - L\right| \leq \varepsilon$, ce qui conclut.

■

Chapitre 4

Polynôme caractéristique et réduction

4.1 Diagonalisation de matrices

Exercice 4.1 (Diagonalisation de matrices - Piste verte) ★

Justifier que les matrices suivantes sont diagonalisables. Les diagonaliser (recherche de valeurs propres et d'une base de vecteurs propres, forme diagonale):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution

A - Le polynôme caractéristique de A est donné par $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 0 \\ 0 & X-2 & 0 \\ 2 & 2 & X-3 \end{vmatrix}$. On a ainsi

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 0 \\ 0 & X-2 & 0 \\ 2 & 2 & X-3 \end{vmatrix} \stackrel{\downarrow C_3}{=} (X-3) \begin{vmatrix} X-1 & 1 \\ 0 & X-2 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)(X-2)(X-3) \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc 1, 2 et 3, distinctes, donc la matrice est diagonalisable.

Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_1(A)$. On a

$$\begin{aligned}AX = X &\iff \begin{cases} x - y = x \\ 2y = y \\ -2x - 2y + 3z = z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = z, & z \in \mathbb{R} \\ y = 0 \end{cases} \\ &\iff E_1(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}\end{aligned}$$

De plus, soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_2(A)$. On a

$$\begin{aligned}AX = 2X &\iff \begin{cases} x - y = 2x \\ 2y = 2y \\ -2x - 2y + 3z = 2z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -y \\ z = 2(x + y) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -y, & y \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases} \\ &\iff E_2(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}\end{aligned}$$

Enfin, soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_3(A)$. On a

$$\begin{aligned}AX = 3X &\iff \begin{cases} x - y = 3x \\ 2y = 3y \\ -2x - 2y + 3z = 3z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z \in \mathbb{R} \\ x = y = 0 \end{cases} \\ &\iff E_3(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}\end{aligned}$$

Donc, en posant $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, on a $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

B - Le polynôme caractéristique de B est donné par $\chi_B = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 0 \\ 1 & X-1 & 0 \\ -2 & -2 & X-3 \end{vmatrix}$. On a ainsi

$$\chi_B = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 0 \\ 1 & X-1 & 0 \\ -2 & -2 & X-3 \end{vmatrix} = (X-1)(X-2)(X-3)$$

Les valeurs propres de B sont donc 1, 2 et 3, distinctes, donc la matrice est diagonalisable.

Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_1(B)$. On a

$$\begin{aligned} BX = X &\iff \begin{cases} 2x &= x \\ -x + y &= y \\ 2x + 2y + 3z &= z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z &= -y \\ x &= 0 \end{cases}, \quad y \in \mathbb{R} \\ &\iff E_1(B) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

De plus, soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_2(B)$. On a

$$\begin{aligned} BX = 2X &\iff \begin{cases} 2x &= 2x \\ -x + y &= 2y \\ 2x + 2y + 3z &= 2z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y &= -x \\ z &= 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R} \\ &\iff E_2(B) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Enfin, soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_3(B)$. On a

$$\begin{aligned} BX = 3X &\iff \begin{cases} 2x &= 3x \\ -x + y &= 3y \\ 2x + 2y + 3z &= 3z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z &\in \mathbb{R} \\ x &= y = 0 \end{cases} \\ &\iff E_3(B) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Donc, en posant $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, on a $P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

C - Le polynôme caractéristique de C est donné par $\chi_C = \begin{vmatrix} X-2 & 1 & 0 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 1 & 1 & X-3 \end{vmatrix}$. On a ainsi

$$\begin{aligned}\chi_C &= \begin{vmatrix} X-2 & 1 & 0 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 1 & 1 & X-3 \end{vmatrix} \stackrel{\downarrow C_3}{=} (X-3) \begin{vmatrix} X-2 & 1 \\ 0 & X-1 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)(X-2)(X-3)\end{aligned}$$

Les valeurs propres de C sont donc 1, 2 et 3, distinctes, donc la matrice est diagonalisable.

Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_1(C)$. On a

$$\begin{aligned}CX = X &\iff \begin{cases} 2x - y &= x \\ y &= y \\ -x - y + 3z &= z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= y \\ z &= y \end{cases}, \quad z \in \mathbb{R} \\ &\iff E_{12}(C) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}\end{aligned}$$

De plus, soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_2(C)$. On a

$$\begin{aligned}CX = 2X &\iff \begin{cases} 2x - y &= 2x \\ y &= 2y \\ -x - y + 3z &= 2z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z &= x \\ y &= 0 \end{cases}, \quad z \in \mathbb{R} \\ &\iff E_2(C) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}\end{aligned}$$

Enfin, soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_3(C)$. On a

$$\begin{aligned}
CX = 3X &\iff \begin{cases} 2x - y &= 3x \\ y &= 3y \\ -x - y + 3z &= 3z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} z \in \mathbb{R} \\ x = y = 0 \end{cases} \\
&\iff E_3(C) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Donc, en posant $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, on a $P^{-1}CP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.



Exercice 4.2 (Diagonalisation de matrices - Piste bleue) ★★

Justifier que les matrices suivantes sont diagonalisables. Les diagonaliser (recherche de valeurs propres et d'une base de vecteurs propres, forme réduite diagonale):

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solution

A - Le polynôme caractéristique de A est donné par $\chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & 6 & 0 \\ -1 & X+1 & 1 \\ 1 & 0 & X-4 \end{vmatrix}$. On a ainsi

$$\begin{aligned}
\chi_A &= \begin{vmatrix} X-3 & 6 & 0 \\ -1 & X+1 & 1 \\ 1 & 0 & X-4 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - (X-4)L_2} \begin{vmatrix} X-3 & 6 & 0 \\ -1 & X+1 & 1 \\ X-3 & -X^2+3X+4 & 0 \end{vmatrix} \\
&\stackrel{-\downarrow C_3}{=} \begin{vmatrix} X-3 & 6 \\ X-3 & -X^2+3X+4 \end{vmatrix} = -(X-3) \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & -X^2+3X+4 \end{vmatrix} \\
&= -(X-3)(-X^2+3X-2) = (X-1)(X-2)(X-3)
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc 1, 2 et 3, distinctes, donc la matrice est diagonalisable.

Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_1(A)$. On a

$$\begin{aligned}AX = X &\iff \begin{cases} 3x - 6y &= x \\ x - y - z &= y \\ -x + 4z &= z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x - 6y &= 0 \\ x - 2y - z &= 0 \\ -x + 3z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 3y \\ x = 3z \\ x - 2y - z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 3y \\ z = y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \\ &\iff E_1(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}\end{aligned}$$

De plus, soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_2(A)$. On a

$$\begin{aligned}AX = 2X &\iff \begin{cases} 3x - 6y &= 2x \\ x - y - z &= 2y \\ -x + 4z &= 2z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - 6y &= 0 \\ x - 3y - z &= 0 \\ -x + 2z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 6y \\ x = 2z \\ x - 3y - z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 6y \\ z = 3y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \\ &\iff E_2(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}\end{aligned}$$

Enfin, soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_3(A)$. On a

$$\begin{aligned}
AX = 3X &\iff \begin{cases} 3x - 6y &= 3x \\ x - y - z &= 3y \\ -x + 4z &= 3z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -6y &= 0 \\ x - 4y - z &= 0 \\ -x + z &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y &= 0 \\ x &= z \\ z &\in \mathbb{R} \end{cases} \\
&\iff E_3(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Donc, en posant $P = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, on a $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

B - Le polynôme caractéristique de B est donné par $\chi_B = \begin{vmatrix} X-3 & 2 & 0 \\ 1 & X-1 & 1 \\ 1 & -2 & X-2 \end{vmatrix}$. On a ainsi

$$\begin{aligned}
\chi_B &= \begin{vmatrix} X-3 & 2 & 0 \\ 1 & X-1 & 1 \\ 1 & -2 & X-2 \end{vmatrix} \stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - (X-2)L_2}{=} \begin{vmatrix} X-3 & 2 & 0 \\ 1 & X-1 & 1 \\ -X+3 & -X^2+3X-4 & 0 \end{vmatrix} \\
&\stackrel{\downarrow C_3}{=} - \begin{vmatrix} X-3 & 2 \\ -X+3 & -X^2+3X-4 \end{vmatrix} = -(X-3) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -X^2+3X-4 \end{vmatrix} \\
&= (X-3)(-X^2+3X-2) = (X-1)(X-2)(X-3)
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de B sont donc 1, 2 et 3, distinctes, donc la matrice est diagonalisable.

Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_1(B)$. On a

$$\begin{aligned} BX = X &\iff \begin{cases} 3x - 2y &= x \\ -x + y - z &= y \\ -x + 2y + 2z &= z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x - 2y &= 0 \\ -x &- z = 0 \\ -x + 2y + z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y &= x \\ z &= -x \\ -x + 2y + z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y &= x \\ z &= -x \\ x &\in \mathbb{R} \end{cases} \\ &\iff E_1(B) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

De plus, soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_2(B)$. On a

$$\begin{aligned} BX = 2X &\iff \begin{cases} 3x - 2y &= 2x \\ -x + y - z &= 2y \\ -x + 2y + 2z &= 2z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - 2y &= 0 \\ -x - y - z &= 0 \\ -x + 2y &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= 2y \\ z &= -3y \\ y &\in \mathbb{R} \end{cases} \\ &\iff E_2(B) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Enfin, soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_3(B)$. On a

$$\begin{aligned}
BX = 3X &\iff \begin{cases} 3x - 2y &= 3x \\ -x + y - z &= 3y \\ -x + 2y + 2z &= 3z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -2y &= 0 \\ -x - 2y - z &= 0 \\ -x + 2y - z &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y &= 0 \\ x &= -z \\ z &\in \mathbb{R} \end{cases} \\
&\iff E_3(B) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Donc, en posant $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, on a $P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

C - Le polynôme caractéristique de C est donné par $\chi_C = \begin{vmatrix} X-1 & 2 & 2 \\ 0 & X-3 & -2 \\ 1 & 1 & X-2 \end{vmatrix}$. On a ainsi

$$\begin{aligned}
\chi_C &= \begin{vmatrix} X-1 & 2 & 2 \\ 0 & X-3 & -2 \\ 1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 - (X-3)L_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & -X+3 & -X^2+3X \\ 0 & X-3 & -2 \\ 1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} \\
&\stackrel{\downarrow C_3}{=} \begin{vmatrix} -X+3 & -X^2+3X \\ X-3 & -2 \end{vmatrix} = (X-3) \begin{vmatrix} -1 & -X^2+3X \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\
&= (X-3)(-X^2+3X-2) = (X-1)(X-2)(X-3)
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de C sont donc 1, 2 et 3, distinctes, donc la matrice est diagonalisable.

Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_1(C)$. On a

$$\begin{aligned}
CX = X &\iff \begin{cases} x - 2y - 2z &= x \\ 3y + 2z &= y \\ -x - y + 2z &= z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -2y - 2z &= 0 \\ 2y + 2z &= 0 \\ -x - y + z &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y &= -z \\ x &= 2z \\ z &\in \mathbb{R} \end{cases} \\
&\iff E_1(C) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

De plus, soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_2(C)$. On a

$$\begin{aligned}
 CX = 2X &\iff \begin{cases} x - 2y - 2z = 2x \\ 3y + 2z = 2y \\ -x - y + 2z = 2z \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -x - 2y - 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -y - 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ y = -x \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = 2z \\ y = -2z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \\
 &\iff E_2(C) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}
 \end{aligned}$$

Enfin, soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_3(C)$. On a

$$\begin{aligned}
 CX = 2X &\iff \begin{cases} x - 2y - 2z = 3x \\ 3y + 2z = 3y \\ -x - y + 2z = 3z \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -2x - 2y - 2z = 0 \\ 2z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = -y \\ y \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases} \\
 &\iff E_3(C) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}
 \end{aligned}$$

Donc, en posant $P = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, on a $P^{-1}CP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

■

4.2 Reduction de matrices

Exercice 4.3 (Matrice stochastique de petite taille) ★

Soient $p, q \in]0, 1[$. On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$.

- Q1 - Montrer que 1 est valeur propre de A . En déduire que A est diagonalisable.
- Q2 - Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- Q3 - Les suites données par coefficients de A^k convergent-elles ? Si oui, la matrice formée reste-t-elle stochastique (i.e. de la même forme que A) ?

Solution

Q1 - En considérant le vecteur $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, on a $AX = \begin{bmatrix} 1-p+p \\ q+1-q \end{bmatrix} = X$, donc 1 est valeur propre de A , avec pour vecteur propre associé $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ainsi, la trace de A étant donnée par $2-p-q$, elle correspond également à la somme des valeurs propres, donc l'autre valeur propre vaut $1-p-q \neq 1$. Le polynôme caractéristique de A est donc scindé à racines simples, donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q2 - On cherche une base de vecteurs propres constituant une matrice de passage $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p-q \end{bmatrix}$. Soit $X \in E_{1-p-q}(A)$. En résolvant $AX = (1-p-q)X$, on trouve $X = \begin{bmatrix} p \\ -q \end{bmatrix}$, soit $P = \begin{bmatrix} 1 & p \\ 1 & -q \end{bmatrix}$. P est bien inversible car ses deux colonnes ne sont pas combinaison linéaires (i.e. multiples ici) l'une de l'autre. Un rapide calcul assure que $P^{-1} = \frac{1}{(p+q)} \begin{bmatrix} q & p \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. On obtient ainsi $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p-q \end{bmatrix}$. Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^k &= P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-p-q)^k \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & p \\ 1 & -q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-p-q)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q & p \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{p+q} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & p(1-p-q)^k \\ 1 & -q(1-p-q)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q & p \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{p+q} \begin{bmatrix} q+p(1-p-q)^k & p-p(1-p-q)^k \\ q-q(1-p-q)^k & p+q(1-p-q)^k \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{p+q} \begin{bmatrix} q & p \\ q & p \end{bmatrix} + \frac{(1-p-q)^k}{p+q} \begin{bmatrix} p & -p \\ q & -q \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Q3 - Comme $|1-p-q| < 1$, on a, lorsque $k \rightarrow +\infty$, $A^k \rightarrow \frac{1}{p+q} \begin{bmatrix} q & p \\ q & p \end{bmatrix}$. Cette ma-

trice limite est bien de la même forme que A , i.e. $\begin{bmatrix} 1-p' & p' \\ q' & 1-q' \end{bmatrix}$ avec $p' = \frac{p}{p+q}$ et $q' = \frac{q}{p+q}$.

■

Exercice 4.4 (Matrice à paramètre) ★

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-a & a-2 & a \end{bmatrix}$.

Q1 - Pour quelle(s) valeur(s) de a A est-elle diagonalisable ?

Q2 - Calculer les puissances de A dans le cas $a = 2$.

Solution

Q1 - Soit $a \in \mathbb{R}$. Le polynôme caractéristique de A est donné par

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 1 & X-2 & -1 \\ a-2 & 2-a & X-a \end{vmatrix}, \text{ donnant ainsi}$$

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 1 & X-2 & -1 \\ a-2 & 2-a & X-a \end{vmatrix} \\ &\stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ X-1 & X-2 & -1 \\ 0 & 2-a & X-a \end{vmatrix} \\ &= (X-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & X-2 & -1 \\ 0 & 2-a & X-a \end{vmatrix} \\ &\stackrel{C_3 \leftarrow C_3 + C_1}{=} (X-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & X-2 & 0 \\ 0 & 2-a & X-a \end{vmatrix} \\ &= (X-1)(X-2)(X-a). \end{aligned}$$

- Si $a \notin \{1, 2\}$, alors les valeurs propres de A sont distinctes, le polynôme caractéristique est scindé à racines simples, et A est diagonalisable.
- Si $a = 1$, alors 1 est valeur propre avec multiplicité 2. On montre que $E_1(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension $1 < 2$, donc A n'est pas diagonalisable.

- Si $a = 2$, alors 2 est valeur propre avec multiplicité 2. On montre que

$E_2(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est de dimension 2, donc A est diagonalisable.

Q2 - Si $a = 2$, alors $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. On montre que $E_1(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. Une matrice de passage est donc $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, calculons l'inverse de P .

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array} & \xrightarrow{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \end{array}$$

On a ainsi $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^k &= P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2^k \\ 1 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2^k - 1 \\ 1 - 2^k & 2^k & 2^k - 1 \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■

Exercice 4.5 (Méthode de la puissance) ★★

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ayant pour valeurs propres les réels $\lambda_1 > \dots > \lambda_n > 0$.

Q1 - Montrer que A est diagonalisable.

Q2 - On note $\{v_1, \dots, v_n\}$ une base de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Considérons $x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ avec $\alpha_1 \neq 0$, et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{k+1} = Ax_k$. Montrer que

$$\frac{\langle x_{k+1} | x_k \rangle}{\|x_k\|^2} = \lambda_1 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\right),$$

où $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Solution

Q1 - Comme $\lambda_1 > \dots > \lambda_n$, les valeurs propres de A sont distinctes. Le polynôme caractéristique de A est donc scindé à racines simples, donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q2 - Soit $k \in \mathbb{N}$. On a $x_k = A^k x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k v_i$.

La bilinéarité du produit scalaire assure donc que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\langle x_{k+1} | x_k \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \alpha_i \alpha_j \lambda_i^{k+1} \lambda_j^k \langle v_i | v_j \rangle = \alpha_1^2 \|v_1\|^2 \lambda_1^{2k+1} + \mathcal{O}\left((\lambda_1 \lambda_2)^k\right)$$

$$\|x_k\|^2 = \langle x_k | x_k \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \alpha_i \alpha_j \lambda_i^k \lambda_j^k \langle v_i | v_j \rangle = \alpha_1^2 \|v_1\|^2 \lambda_1^{2k} + \mathcal{O}\left((\lambda_1 \lambda_2)^k\right).$$

On a ainsi
$$\frac{\langle x_{k+1} | x_k \rangle}{\|x_k\|^2} = \frac{\alpha_1^2 \|v_1\|^2 \lambda_1^{2k+1} + \mathcal{O}\left((\lambda_1 \lambda_2)^k\right)}{\alpha_1^2 \|v_1\|^2 \lambda_1^{2k} + \mathcal{O}\left((\lambda_1 \lambda_2)^k\right)} = \lambda_1 \frac{1 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\right)}{1 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\right)}$$
 soit

$$\frac{\langle x_{k+1} | x_k \rangle}{\|x_k\|^2} = \lambda_1 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\right)$$

■

Exercice 4.6 (Méthode de la puissance pour une matrice non diagonalisable) ★★

Soient des réels $\lambda > \mu > 0$. On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$.

Q1 - Montrer que A n'est pas diagonalisable.

Q2 - Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ (On pourra décomposer A comme la somme d'une matrice diagonale et d'une matrice nilpotente.)

Q3 - Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ avec $\alpha, \beta \neq 0$. Soient $x_0 = (\alpha, \beta, \gamma)$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{k+1} = Ax_k$. Montrer que $\frac{\langle x_{k+1} | x_k \rangle}{||x_k||^2} = \lambda + O\left(\frac{1}{k}\right)$

Solution

Q1 - Si A est diagonalisable, alors les sous-espaces propres associés aux valeurs propres λ et μ sont respectivement de dimension 2 et 1. Or, on montre que $E_\lambda(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, ce qui ne correspond pas à un espace de dimension 2, donc A n'est pas diagonalisable.

Q2 - On remarque que $A = D + N$ avec $D = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$ et $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Un rapide calcul assure que D et N commutent, et que $N^2 = 0$. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton, donnant ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} D^{k-j} N^j = D^k + k D^{k-1} N = \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & 0 \\ 0 & \lambda^k & 0 \\ 0 & 0 & \mu^k \end{bmatrix}.$$

Q3 - Soit $k \in \mathbb{N}$. On a $x_k = A^k x_0 = \begin{bmatrix} \lambda^k \alpha + k\lambda^{k-1} \beta \\ \lambda^k \beta \\ \mu^k \gamma \end{bmatrix}$. Donc, en prenant les produits scalaires et en conservant le plus grand terme, on a

$$\langle x_{k+1} | x_k \rangle = k^2 \lambda^{2k-1} \beta^2 + O(k\lambda^k) \text{ et } ||x_k||^2 = \langle x_k | x_k \rangle = k^2 \lambda^{2k-2} \beta^2 + O(k\lambda^k),$$

soit, en passant à la division, $\frac{\langle x_{k+1} | x_k \rangle}{||x_k||^2} = \frac{k^2 \lambda^{2k-1} \beta^2 + O(k\lambda^{2k})}{k^2 \lambda^{2k-2} \beta^2 + O(k\lambda^{2k})} = \lambda \frac{1 + O\left(\frac{1}{k}\right)}{1 + O\left(\frac{1}{k}\right)}$ d'où

$$\frac{\langle x_{k+1} | x_k \rangle}{||x_k||^2} = \lambda + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

■

4.3 Matrices et endomorphismes nilpotents

Exercice 4.7 (Endomorphisme nilpotent) ★★

Q1 - Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, non nul tel que $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u vaut $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Q2 - Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$. Donner la dimension de $F = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : AX + XA = 0\}$

Solution

Q1 - Comme $u^2 \neq 0$, il existe $x \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $u^2(x) \neq 0$. Soit la famille $\{u^2(x), u(x), x\}$. Montrons que c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda u^2(x) + \mu u(x) + \nu x = 0$. En appliquant u à cette égalité, on a $\mu u^2(x) + \nu u(x) = 0$, et, en appliquant de nouveau u , on a $\nu u^2(x) = 0$, soit $\nu = 0$, puis $\mu = \lambda = 0$. La famille $\{u^2(x), u(x), x\}$ est donc libre et de cardinal 3 dans $\mathbb{R}^3$, de dimension 3, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. En notant $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, où $v_1 = u^2(x)$, $v_2 = u(x)$ et $v_3 = x$, on a $u(v_1) = 0$, $u(v_2) = v_1$ et $u(v_3) = v_2$, soit alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Q2 - Puisque $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$, d'après la question précédente, A est semblable à $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Il existe donc $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $PAP^{-1} = T$.

Soit alors $X \in F$. On a $X \in F \iff AX + XA = 0 \iff TY + YT = 0$, où $Y = P^{-1}XP$. En notant $Y = (y_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$, on a

$$YT + TY = 0 \iff \begin{bmatrix} y_{2,1} & y_{2,2} & y_{2,3} \\ y_{3,1} & y_{3,2} & y_{3,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & y_{1,1} & y_{1,2} \\ 0 & y_{2,1} & y_{2,2} \\ 0 & y_{3,1} & y_{3,2} \end{bmatrix}.$$

On aboutit donc à $y_{2,1} = y_{3,1} = y_{3,2} = 0$, $y_{2,2} = -y_{1,1} = -y_{3,3}$ et $y_{2,3} = -y_{1,2}$.

On peut ainsi écrire $Y = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & -\alpha & -\beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$, soit $X = P \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & -\alpha & -\beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} P^{-1}$, pour $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. De plus, on montre que si X a la forme précédemment citée, alors on a bien

$AX + XA = P(TP^{-1}XP + P^{-1}XPT)P^{-1} = P(TY + YT)P^{-1} = 0$.

■

Exercice 4.8 (Matrices nilpotentes d'ordre 3) ★ ★ ★

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 0$. Montrer que A est semblable à une des trois matrices suivantes

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution

- Si $A = 0$, alors A est semblable (et même égale) à la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- Si $A \neq 0$ et $A^2 = 0$. A n'est ni nulle, ni inversible (car sinon on n'aurait pas $A^2 = 0$), donc $\text{rg}(A) \in \{1, 2\}$.

Soit $Y \in \text{Im}(A)$. Il existe $X \in \mathbb{R}^3$ tel que $Y = AX$. On a ainsi $AY = A^2X = 0$, donc $Y \in \text{Ker}(A)$. On a ainsi l'inclusion $\text{Im}(A) \subseteq \text{Ker}(A)$, soit, en passant aux dimensions, $\text{rg}(A) \leq \dim(\text{Ker}(A))$. Or, d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(A)) + \text{rg}(A) = 3$, donc $\text{rg}(A) = 1$ et $\dim(\text{Ker}(A)) = 2$.

De plus, comme $A \neq 0$, il existe $X \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tel que $AX \neq 0$. On a également $AX \in \text{Ker}(A)$. Comme $\dim(\text{Ker}(A)) = 2$, on peut compléter la famille $\{AX\}$ en une base $\{AX, Y\}$ de $\text{Ker}(A)$ (on prend $Y \notin \text{Im}(A)$, ce qui est possible car $\text{Im}(A) \subsetneq \text{Ker}(A)$ car la dimension du noyau est plus grande que celle de l'image, cela garantit bien la liberté de la famille $\{AX, Y\}$).

Montrons que $\{X, AX, Y\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda X + \mu AX + \nu Y = 0$. En appliquant A à cette égalité, puisque AX et Y appartiennent au noyau de A , on a $\lambda AX = 0$, soit $\lambda = 0$ puisque $AX \neq 0$. Il reste donc $\mu AX + \nu Y = 0$, soit $\mu = \nu = 0$ par liberté de la famille $\{AX, Y\}$. Donc la famille $\{X, AX, Y\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ car elle est libre et est de cardinal 3, ce qui est bien la dimension de $\mathbb{R}^3$. En notant $V_1 = Y$, $V_2 = AX$ et $V_3 = X$, on a $AV_1 = 0$, $AV_2 = 0$, $AV_3 = V_2$, soit, en notant

$$P = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Si $A^3 = 0$ mais $A, A^2 \neq 0$, il existe alors $X \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tel que $A^2X \neq 0$. Montrons que la famille $\{A^2X, AX, X\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda X + \mu AX + \nu A^2X = 0$. En appliquant A à cette égalité, on a $\lambda AX + \nu A^2X = 0$, et en appliquant de nouveau A , on a $\lambda A^2X = 0$. Comme $A^2X \neq 0$, on a $\lambda = 0$, puis $\mu = \nu = 0$, donc la famille $\{A^2X, AX, X\}$ est libre et de cardinal 3 dans $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. Posons $V_1 = A^2X$, $V_2 = AX$, $V_3 = X$. On a $AV_1 = 0$, $AV_2 = V_1$ et $AV_3 = V_2$. En notant

$$P = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \end{bmatrix}, \quad \text{on a bien } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.4 Matrices et endomorphismes trigonalisables

Exercice 4.9 (Matrices triangulaires supérieures) ★

Q1 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que l'application linéaire

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}) \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

est bien définie et est un isomorphisme.

Q2 - En déduire que $A^{-1} \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ et que A^{-1} est de la forme

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a_{1,1}} & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \frac{1}{a_{n,n}} \end{bmatrix}$$

Q3 - On se place dans le cas $n = 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \setminus \{I_2\}$ telle que 1 soit l'unique valeur propre de A . Quelle est la dimension de $F = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : AX = XA^{-1}\}$

Solution

Q1 - φ est clairement linéaire. De plus, tout produit de matrices triangulaires supérieures étant lui-même une matrice triangulaire supérieure, pour tout $X \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$, on a bien $\varphi(X) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$.

De plus, si $X \in \text{Ker}(\varphi)$, alors $\varphi(X) = AX = 0$, soit $X = 0$ puisque A est inversible. φ est donc injective et est donc bijective puisque c'est un endomorphisme de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ (même dimension des espaces de départ et d'arrivée).

Q2 - Puisque φ est bijective et I_n est triangulaire supérieure, il existe donc $B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$. Par unicité de l'inverse, $B = A^{-1} \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$. Ainsi, A^{-1} est de la forme

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_n \end{bmatrix}. \text{ On a donc } A^{-1}A = \begin{bmatrix} \alpha_1 a_{1,1} & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_n a_{n,n} \end{bmatrix} = I_n, \text{ soit, pour tout } 1 \leq i \leq n, \alpha_i = \frac{1}{a_{i,i}}.$$

Q3 - Comme la seule valeur propre de A est 1, son noyau est réduit à $\{0\}$, donc A est inversible. A n'est pas diagonalisable (si c'était le cas A serait semblable à l'identité, donc y serait égale). Il existe donc $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ pour un certain $\alpha \neq 0$. Notons T cette matrice triangulaire supérieure. D'après les questions précédentes, T^{-1} est triangulaire supérieure et est de la forme $T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ pour un certain $\beta \neq 0$. Un rapide calcul montre que $\beta = -\alpha$.

Soit alors $X \in F$. On a $AX = XA^{-1} \iff TY = YT^{-1}$ où $Y = P^{-1}XP$. En notant $Y = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, on a

$$TY = YT^{-1} \iff \begin{bmatrix} x + \alpha z & y + \alpha w \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -\alpha x + y \\ z & -\alpha z + w \end{bmatrix} \iff \begin{cases} w &= -x \\ z &= 0 \end{cases}$$

On a donc $Y = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & -x \end{bmatrix}$ pour $x, y \in \mathbb{R}$, soit $X = P^{-1} \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & -x \end{bmatrix} P$.

De plus, on vérifie que si X est de la forme précédemment citée, alors $AX = XA^{-1}$. Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 2.

■

Chapitre 5

Suites et séries de fonctions

5.1 Suites de fonctions, modes de convergence

Exercice 5.1 (Convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions) ★

Soient $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de x $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle simplement. On notera $f(x)$ la limite de $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ quand cette suite converge.
2. Soient $x \in]-1, 1[$, $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\varphi_n(x) := f(x) - f_n(x)$. Calculer la limite de φ_n en 1, et montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers f sur $] -1, 1[$.
3. Soit $a \in]0, 1[$. Montrer que la convergence est uniforme sur $[-a, a]$.

Solution

Q1 - Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$. Si $|x| \geq 1$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas (divergence d'une série géométrique). Si $|x| < 1$, alors $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge (convergence d'une série géométrique) et la limite est égale à $\frac{1}{1-x}$. On pose donc, pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Q2 - Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in]-1, 1[$. On a $\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1-x}$ et donc $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi_n(x) = +\infty$, donc $\sup_{x \in]-1, 1[} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$, donc la convergence ne peut pas être uniforme sur $] -1, 1[$.

Q3 - Si $a \in]0, 1[$, $x \in [-a, a]$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors $|\varphi_n(x)| = \frac{|x|^n}{1-|x|} \leq \frac{a^n}{1-a} \leq \frac{a^n}{1-a}$. On a ainsi $\sup_{x \in [-a, a]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. La convergence est donc uniforme sur $[-a, a]$.



Exercice 5.2 (Convergence uniforme et intervalle de départ) ★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = ne^{-n^2x^2}$.

Q1 - Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Q2 - Soit $a > 0$. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Q3 - Quelle est la limite de la suite $\left(f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$. En déduire que la convergence de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas uniforme sur $]0, +\infty[$.

Solution

Q1 - D'une part, on a $f_n(0) = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. D'autre part, si $x \neq 0$, alors $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (croissance comparée exponentielle-polynomiale). Ainsi, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Q2 - Soient $a > 0$ et $x \geq a$. On a $|f_n(x)| = ne^{-n^2x^2} \leq ne^{-n^2a^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, i.e. $\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui garantit la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.

Q3 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = ne^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Ainsi, $\sup_{x \in]0, +\infty[} |f_n(x)| \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc la convergence n'est pas uniforme sur $]0, +\infty[$.

Exercice 5.3 (La convergence uniforme ne préserve pas la régularité) ★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers une fonction que l'on précisera et notera f . f est-elle régulière ? Que peut-on en déduire ?

Solution

Tout d'abord, si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$, alors $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2} = |x|$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. De plus, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} = \frac{1}{n \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2} \right)} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On a donc $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui assure la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. Toutefois, f n'est pas régulière (elle est juste continue), alors que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions régulières. Ainsi, la convergence uniforme ne préserve pas la régularité.



5.2 Suite, séries et intégration de fonctions

Exercice 5.4 (Intégration et convergence normale) ★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction

$$f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} n^2 x(1 - nx) & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

Q1 - Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction f que l'on précisera sur $[0, 1]$.

Q2 - Calculer $\int_0^1 f_n(t) dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément vers f sur $[0, 1]$?

Q3 - Montrer que la convergence est uniforme sur $[a, 1]$ avec $a \in]0, 1]$.

Solution

Q1 - D'une part, $f_n(0) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. D'autre part, si $x > 0$, alors $f_n(x) = 0$ si $n \geq \left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil$. Donc pour tout $x \in [0, 1]$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On a $f = 0$.

Q2 - Un simple calcul d'intégrale de fonction polynomiale assure que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 t(1 - nt) dt = \frac{1}{6}$. Si on avait une convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers 0 sur $[0, 1]$, alors on aurait

$$\frac{1}{6} = \int_0^1 f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt = 0,$$

ce qui est absurde, donc il n'y a pas convergence uniforme sur $[0, 1]$.

Q3 - Soient $a \in]0, 1]$, $x \in [a, 1]$. Si $n \geq \left\lceil \frac{1}{a} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil$, alors $f_n(x) = 0$. Donc $\sup_{x \in [a, 1]} |f_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui implique la convergence uniforme.



Exercice 5.5 (Intégration et série de fonctions) ★★

Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la série $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2 + x^2}$.

Q1 - Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}$.

Q2 - Soit $x > 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_n^{n+1} \frac{x}{x^2 + t^2} dt \leq \frac{x}{x^2 + n^2} \leq \int_{n-1}^n \frac{x}{x^2 + t^2} dt$$

Q3 - Montrer que S admet une limite lorsque $x \mapsto +\infty$ et la calculer.

Solution

Q1 - Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a > 0$. On a $\frac{|x|}{n^2 + x^2} \leq \frac{a}{n^2}$ donc $\sum_{n \geq 1} \sup_{x \in [-a, a]} \left| \frac{x}{n^2 + x^2} \right| \leq \sum_{n \geq 1} \frac{a}{n^2}$. Cette série est bien convergente (série de Riemann), ce qui implique la convergence normale et donc uniforme de S sur $[-a, a]$. Donc S est continue sur $[-a, a]$ pour tout $a > 0$, i.e. S est continue sur $\mathbb{R}$.

Q2 - Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{x}{x^2 + t^2}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$, donc, par croissance de l'intégrale, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_n^{n+1} \frac{x}{x^2 + t^2} dt \leq \frac{x}{x^2 + n^2} \leq \int_{n-1}^n \frac{x}{x^2 + t^2} dt.$$

Q3 - Soient $x > 0$, $N \in \mathbb{N}^*$. Par sommation de l'inégalité précédente, on a

$$\int_1^{N+1} \frac{x}{x^2 + t^2} dt \leq \sum_{n=1}^N \frac{x}{x^2 + n^2} \leq \int_0^N \frac{x}{x^2 + t^2} dt.$$

Par intégration, on a

$$\operatorname{Arctan} \left(\frac{N+1}{x} \right) - \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right) \leq \sum_{n=1}^N \frac{x}{x^2 + n^2} \leq \operatorname{Arctan} \left(\frac{N}{x} \right).$$

Ainsi, lorsque $N \rightarrow +\infty$, on a $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right) \leq S(x) \leq \frac{\pi}{2}$.

Par encadrement, on a $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$.

■

5.3 Utilisation des séries alternées

Exercice 5.6 (Fonction Zeta de Riemann alternée) ★★

Soit $x \in]0, +\infty[$, on considère la série donnée par $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

Q1 - Montrer que F converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Q2 - Montrer que pour tous $p \in \mathbb{N}$, $a > 0$, pour tout $x \geq a$, la suite $\left(\frac{\ln(n)^p}{n^x}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante à partir d'un certain rang indépendant de x .

Q3 - En déduire que F est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

Q4 - Calculer la limite de F en $+\infty$.

Solution

Q1 - Si $x > 0$, alors la suite $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et de limite nulle, donc, en appliquant le théorème des séries alternées, F converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Q2 - Soient $a > 0$, $p \in \mathbb{N}$ et $x \geq a$. Étudions la fonction

$$g : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{\ln(t)^p}{t^x}.$$

Par quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, g est dérivable sur $[1, +\infty[$ et, pour tout $t \geq 1$, $g'(t) = \frac{\ln(t)^{p-1}}{t^{x+1}} (p - x \ln(t))$. Ainsi, pour $t \geq e^{\frac{p}{a}}$, on a $t \geq e^{\frac{p}{x}}$ et donc $g'(t) \leq 0$, donc g est décroissante.

Ainsi, la suite $\left(\frac{\ln(n)^p}{n^x}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante à partir du rang $\lfloor e^{\frac{p}{a}} \rfloor + 1$, qui est bien indépendant de x .

Q3 - On pose, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$ $f_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$. Soit $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe C^∞ sur $[a, +\infty[$ et sa dérivée p -ième est donnée, pour tout $x \geq a$, par $f_n^{(p)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} (-\ln(n))^p}{n^x}$. On a ainsi, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $x \geq a$, $|f_n(x)| = \frac{\ln(n)^p}{n^x}$. La suite $(|f_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante à partir d'un certain rang (indépendant de x) et de limite nulle (par croissance comparée). D'après le théorème des séries alternées, la série $\sum_{n \geq 1} f_n^{(p)}$ converge simplement sur $[a, +\infty[$. De plus, le résultat du théorème portant sur la majoration du reste assure que, pour tout $x \geq a$,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} \ln(k)^p}{k^x} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} \ln(k)^p}{k^x} \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} \ln(k)^p}{k^x} \right| \\
&\leq \frac{\ln(n)^p}{(n+1)^x} \\
&\leq \frac{\ln(n)^p}{(n+1)^a} \\
&\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.
\end{aligned}$$

On a donc la convergence uniforme de la série $\sum_{n \geq 1} f_n^{(p)}$. Donc par le théorème de dérivation des séries de fonctions, F est bien de classe C^p sur $[a, +\infty[$ pour tous $a > 0$ et $p \in \mathbb{N}$, donc $F \in C^\infty([0, +\infty, \mathbb{R}))$.

Q4 - D'une part, F converge uniformément sur $]0, +\infty[$. D'autre part, on a $f_0(x) = 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi, d'après le théorème d'interversion des limites pour une série de fonctions, on a $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.

■

5.4 Suite de fonctions abstraites

Exercice 5.7 (Convergence d'une suite de fonctions croissantes) ★

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissantes définies sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles. On suppose que pour tout $x \in [0, 1]$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Montrer que cette convergence est uniforme.

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est croissante, donc pour tout $x \in [0, 1]$, $f_n(0) \leq f_n(x) \leq f_n(1)$. On a ainsi $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| \leq \max\{|f_n(0)|, |f_n(1)|\} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

■

Exercice 5.8 (Convergence uniforme de polynômes) ★★

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes telles que $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - P_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Q1 - Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq N$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |P_N(x) - P_n(x)| \leq 1$.

Q2 - Montrer que pour tout entier $n \geq N$, $P_n - P_N$ est constant.

Q3 - En déduire que f est polynomiale.

Solution

Q1 - Par convergence uniforme de $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f sur $\mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{1}{2}$. Ainsi, l'inégalité triangulaire assure que pour tous $n \geq N$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |P_N(x) - P_n(x)| &\leq |P_N(x) - P_n(x)| + |P_n(x) - f(x)| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |P_N(x) - P_n(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |P_n(x) - f(x)| \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, en passant à la borne supérieure à gauche, on a, pour tout entier $n \geq N$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |P_N(x) - P_n(x)| \leq 1$.

Q2 - $P_n - P_N$ est un polynôme borné sur $\mathbb{R}$, donc il est constant.

Q3 - Pour tout entier $n \geq N$, il existe $C_n \in \mathbb{R}$ tel que $P_n = P_N + C_n$. C_n étant une constante, on a $C_n = P_N(0) - P_n(0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P_N(0) - f(0)$. Notons C cette limite. On a ainsi d'une part, $P_n = P_N + C_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P_N + C$ et d'autre part, $P_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$. Par unicité de la limite, $f = P_N + C$ (et la convergence est bien uniforme).

■

Chapitre 6

Dénombrément et familles sommables

6.1 Ensembles dénombrables

Exercice 6.1 (Suites de fonctions de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$) ★

Q1 - Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ p &\longmapsto f_p(p) + 1. \end{aligned}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \neq f$.

Q2 - En déduire que l'ensemble des fonctions $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

Solution

Q1 - Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $f(n) = f_n(n) + 1 \neq f_n(n)$ donc $f_n \neq f$.

Q2 - Supposon que l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ soit dénombrable. Alors cet ensemble peut-être indexé par $\mathbb{N}$, et représenté par une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Or, $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mais pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f \neq f_n$. On a donc construit une fonction $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ qui n'appartient pas à $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sensé toutes les représenter. Contradiction. Cet ensemble n'est donc pas dénombrable.



Exercice 6.2 (Suites d'entiers naturels) ★★

Q1 - Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{A}_p$ l'ensemble des suites d'entiers naturels nulles à partir du rang p . Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi_p : \quad \mathbb{N}^p &\longrightarrow \mathbb{A}_p \\ (u_0, \dots, u_{p-1}) &\longmapsto (u_0, \dots, u_{p-1}, 0, \dots) \end{aligned}$$

est bijective.

Q2 - En déduire que l'ensemble des suites d'entiers naturels nuls à partir d'un certain rang est dénombrable.

Q3 - Montrer que l'ensemble des suites d'entiers naturels stationnaires est dénombrable.

Solution

Q1 - On considère deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nulles à partir du rang p telles que $\varphi_p(u_0, \dots, u_{p-1}) = (u_0, \dots, u_{p-1}, 0, \dots) = (v_0, \dots, v_{p-1}, 0, \dots) = \varphi_p(v_0, \dots, v_{p-1})$. On a ainsi $(u_0, \dots, u_{p-1}) = (v_0, \dots, v_{p-1})$, ce qui montre l'injectivité de φ_p . De plus, si $(u_0, \dots, u_{p-1}, 0, \dots) \in \mathbb{A}_p$, alors on a $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \varphi_p(u_0, \dots, u_{p-1})$. φ_p est surjective.

Q2 - Notons $\mathbb{A}$ l'ensemble des suites d'entiers naturels nulles à partir d'un certain rang. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{A}$ si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq p$, $u_n = 0$, i.e. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{A}_p$, ce qui est équivalent à dire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \mathbb{A}_p$. On a donc $\mathbb{A} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \mathbb{A}_p$.

$\mathbb{A}_0$ est réduit à la suite nulle, et, pour tout entier $p \geq 1$, $\mathbb{A}_p$ est en bijection avec $\mathbb{N}^p$, qui est dénombrable comme produit fini d'ensemble dénombrables. Donc $\mathbb{A}_p$ est dénombrable, et $\mathbb{A}$ est donc dénombrable comme réunion dénombrable d'ensemble dénombrables.

Q3 - De même, notons, pour $p \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{B}_p$ des suites stationnaires à partir du rang p . On considère l'application

$$\begin{aligned} \psi_p : \quad \mathbb{N}^{p+1} &\longrightarrow \mathbb{B}_p \\ (u_0, \dots, u_{p-1}, u_p) &\longmapsto (u_0, \dots, u_{p-1}, u_p, u_p, \dots). \end{aligned}$$

On montre d'une manière analogue à la première question que ψ_p est bijective (injectivité évidente, surjectivité en identifiant les p premiers termes d'une suite stationnaire à partir du rang p).

De plus, on note $\mathbb{B}$ l'ensemble des suites d'entiers naturels stationnaires. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{B}$ si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq p$, $u_n = u_p$, i.e. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{B}_p$, ce qui est équivalent à dire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \mathbb{B}_p$. On a donc $\mathbb{B} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \mathbb{B}_p$.

Pour tout entier $p \geq 0$, $\mathbb{B}_p$ est en bijection avec $\mathbb{N}^{p+1}$, qui est dénombrable comme produit fini d'ensemble dénombrables. Donc $\mathbb{B}_p$ est dénombrable, et $\mathbb{B}$ est donc dénombrable comme réunion dénombrable d'ensemble dénombrables.

Exercice 6.3 (Points de discontinuité d'une fonction croissante) ★ ★ ★

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. Pour tout $x \in]a, b[$, on note $\delta(x) = \lim_{y \rightarrow x^+} f(y) - \lim_{y \rightarrow x^-} f(y)$. f est continue en x si et seulement si $\delta(x) = 0$.

Q1 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $E_n := \left\{ x \in]a, b[: \delta(x) > \frac{1}{n} \right\}$. Montrer que E_n est fini.

Q2 - En déduire que le nombre de points de discontinuité de f est dénombrable.

Q3 - Ce résultat est-il encore valide pour une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante ?

Solution

Q1 - Soit $k \in \mathbb{N}^*$ (le cas $k = 0$ revient à dire que soit f est continue, soit elle possède des points de discontinuité avec des sauts plus petits) et soient $x_1, \dots, x_k \in E_n$ tels que $a < x_1 < \dots < x_k < b$. Ils existent alors $y_1, \dots, y_k, y_{k+1} \in]a, b[$ tels que $a < y_1 < x_1 < \dots < y_k < x_k < y_{k+1} < b$. On a ainsi, pour tout entier $1 \leq i \leq k$, $f(y_{i+1}) - f(y_i) > \frac{1}{n}$. Donc, par croissance de f , on a

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &\geq f(y_{k+1}) - f(a) \geq \sum_{i=1}^k [f(y_{i+1}) - f(y_i)] + f(y_1) - f(a) \\ &\geq \sum_{i=1}^k [f(y_{i+1}) - f(y_i)] \geq \frac{k}{n}. \end{aligned}$$

Donc $k \leq n[f(b) - f(a)]$. k est nécessairement fini.

Q2 - Soit E l'ensemble des points de discontinuité de f . On peut écrire $E = \{x \in]a, b[: \delta(x) > 0\}$. On a ainsi

$$x \in E \iff \delta(x) > 0 \iff \exists n \in \mathbb{N}^* : \delta(x) > \frac{1}{n} \iff \exists n \in \mathbb{N}^* : x \in E_n \iff x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n.$$

Donc $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. E est une réunion dénombrable d'ensembles finis, donc est dénombrable.

Q3 - Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante, alors, pour $p \in \mathbb{N}^*$, notons $F_p := \{x \in \mathbb{R} : \delta(x) > \frac{1}{p}\}$. Par la question précédente, F_p est dénombrable, et on a $F = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} F_p$, donc F est dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles dénombrables.

6.2 Calculs de sommes

Exercice 6.4 (Sommabilité d'une famille) ★

Montrer que les familles suivantes sont sommables et calculer leur somme.

Q1 - $\left(\frac{z^{p+q}}{q!} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}, z \in \mathbb{C} : |z| < 1.$

Q2 - $\left(\frac{q^p z^p}{p! q!} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}, z \in \mathbb{C}.$

Q3 - $\left(\frac{e^{pz}}{q^2} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}, z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0. \text{ On admettra que } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

Solution

Q1 - Soit $z \in \mathbb{C} : |z| < 1$. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on a $\frac{z^{p+q}}{q!} = z^p \times \frac{z^q}{q!}$. Les familles $(z^p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $\left(\frac{z^q}{q!} \right)_{q \in \mathbb{N}}$ sont sommables (série géométrique avec $|z| < 1$ et série exponentielle) donc par produit la famille $\left(\frac{z^{p+q}}{q!} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable. On a ainsi

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{z^{p+q}}{q!} = \left(\sum_{p=0}^{\infty} z^p \right) \cdot \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^p}{p!} \right) = \frac{e^z}{1-z}.$$

Q2 - Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour $q \in \mathbb{N}$, la famille $\left(\frac{q^p z^p}{p!} \right)_{p \in \mathbb{N}}$ est sommable (convergence d'une série exponentielle). De plus, pour $q \in \mathbb{N}$, $\sum_{p=0}^{+\infty} \left| \frac{q^p z^p}{p!} \right| = \frac{(e^{|z|})^q}{q!}$ donc la famille $\left(\sum_{p=0}^{+\infty} \left| \frac{q^p z^p}{p!} \right| \right)_{q \in \mathbb{N}}$ est sommable (toujours par convergence d'une série exponentielle). Par le théorème de Fubini, la famille $\left(\frac{q^p z^p}{p! q!} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est donc sommable et on a

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{q^p z^p}{p! q!} = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{q!} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(qz)^p}{p!} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(e^z)^q}{q!} = e^{e^z}.$$

Q3 - Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) < 0$. Les familles $(e^{pz})_{p \in \mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{q^2} \right)_{q \in \mathbb{N}^*}$ sont sommables (convergence d'une série géométrique pour la première car $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} < 1$ et d'une série de Riemann pour la seconde). Par produit, la famille $\left(\frac{e^{pz}}{q^2} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ est donc sommable, et on a

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{e^{pz}}{q^2} = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} (e^z)^p \right) \cdot \left(\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2} \right) = \frac{\pi^2}{6(1-e^z)}.$$

Exercice 6.5 (Somme télescopique) ★★

Q1 - Montrer que, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, la série $\left(\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \right)$ converge.

Q2 - Pour tous $q \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{N}^*$, simplifier la somme $\sum_{p=0}^P \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$.

En déduire que la famille $\left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \right)_{q \in \mathbb{N}^*}$ est sommable.

Q3 - En déduire que la famille $\left(\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ est sommable ainsi que la valeur de la somme $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$.

Solution

Q1 - Soit $q \in \mathbb{N}^*$. On a $\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p^2}$. Par comparaison avec une série de Riemann, la série $\left(\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \right)$ converge.

Q2 - Soient $q \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq p \leq P$. En notant que $\frac{1}{p+q^2} - \frac{1}{p+q^2+1} = \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$, la somme $\sum_{p=0}^P \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$ est donc télescopique et vaut $\frac{1}{q^2} - \frac{1}{P+1+q^2}$. Ainsi, lorsque $P \rightarrow +\infty$, on a $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \frac{1}{q^2}$. Toujours par comparaison avec une série de Riemann, la famille $\left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \right)_{q \in \mathbb{N}^*}$ est donc sommable.

Q3 - Les hypothèses du théorème de Fubini étant vérifiées, la famille $\left(\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ est sommable et on a

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{q=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \right) = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 6.6 (Produit de Cauchy) ★★

Soient $a > 1$ et $n \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{a^n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!}$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument et calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Solution

Soient $a > 1$, $b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{b}{a}\right)^k \left(\frac{1}{a}\right)^{n-k}$. Or, les séries $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(\frac{b}{a}\right)^n$ et $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{a}\right)^n$ convergent absolument (convergence d'une série exponentielle et géométrique), donc, par produit de Cauchy, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{b}{a}\right)^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n \right) = \frac{ae^{\frac{b}{a}}}{a-1}.$$

6.3 Sommation par paquets

Exercice 6.7 (Somme et diviseurs d'un entier) ★★★

Q1 - Soit $x \in]-1, 1[$. Montrer que la famille $(x^{pq})_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

Q2 - Montrer que $(\mathbb{N}^*)^2 = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 : pq = n\}$.

Q3 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs d'un entier. Montrer que $\sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2} x^{pq} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} d(n)x^n$.

Solution

Q1 - Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La famille $(|x|^{pq})_{q \in \mathbb{N}^*} = ((|x|^q)^p)_{q \in \mathbb{N}^*}$ est sommable (convergence d'une série géométrique) et on a $\sum_{q=1}^{+\infty} |x|^{pq} = \frac{|x|^p}{1 - |x|^p} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} |x|^p$. La famille $\left(\sum_{q=1}^{+\infty} |x|^{pq} \right)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est donc sommable. Par le théorème de Fubini, la famille $(x^{pq})_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

Q2 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $I_n := \{(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 : pq = n\}$.

- Soit $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On a $pq \neq 0$ et ainsi, $(p, q) \in I_{pq}$ donc $(\mathbb{N}^*)^2 \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n$.

- Réciproquement, soit $(p, q) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $pq = n$. On a donc $p, q \neq 0$ soit $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. D'où $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n \subseteq (\mathbb{N}^*)^2$.
- On a $(\mathbb{N}^*)^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n$. Montrons que cette réunion est disjointe. Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que $n_1 \neq n_2$, et supposons que $I_{n_1} \cap I_{n_2} \neq \emptyset$. Soit $(p, q) \in I_{n_1} \cap I_{n_2}$. On a $n_1 = pq = n_2$, ce qui est absurde. Donc $I_{n_1} \cap I_{n_2} = \emptyset$, donc la réunion est bien disjointe.

Q3 - Pour tous $x \in]-x, x[$, $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(|x|^{pq})_{(p,q) \in I_n}$ est sommable, car comporte un nombre fini d'éléments. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $\left(\sum_{(p,q) \in I_n} |x|^{pq} \right)_{n \in \mathbb{N}^*} = (|I_n| |x|^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable car $|I_n| \leq n$ et la série de terme général $(n|x|^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge (par croissance comparée). Ainsi, le théorème de sommation par paquets assure que

$$\sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2} x^{pq} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} |I_n| x^n.$$

Or, le cardinal de I_n est égal au nombre de couples d'entiers dont le produit vaut n , soit au nombre de diviseurs positifs de n , i.e. $d(n)$, ce qui conclut.

■

6.4 Familles sommables abstraites

Exercice 6.8 (Familles de carré sommable) ★★

Soit I un ensemble fini ou dénombrable. On définit l'ensemble des familles de carré sommable sur I et à valeurs réelles, noté $\ell^2(I, \mathbb{R})$ par

$$\ell^2(I, \mathbb{R}) := \left\{ (u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I : \sum_{i \in I} u_i^2 < +\infty \right\}.$$

En d'autres termes, $(u_i)_{i \in I} \in \ell^2(I, \mathbb{R})$ si et seulement si $(u_i^2)_{i \in I}$ est une famille sommable.

Q1 - Montrer que si $(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I} \in \ell^2(I, \mathbb{R})$, alors $(u_i v_i)_{i \in I}$ est une famille sommable. En déduire que $\ell^2(I, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Q2 - Soient $(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I} \in \ell^2(I, \mathbb{R})$. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left| \sum_{i \in I} u_i v_i \right| \leq \left(\sum_{i \in I} u_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i \in I} v_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Q3 - Trouver un ensemble dénombrable I et une famille $(u_i)_{i \in I} \in \ell^2(I, \mathbb{R})$ qui n'est pas sommable.

Solution

Q1 - Soit $i \in I$. On a $|u_i v_i| \leq \frac{1}{2} (u_i^2 + v_i^2)$. Comme les familles $(u_i^2)_{i \in I}$ et $(v_i^2)_{i \in I}$ sont sommables, la famille $(u_i v_i)_{i \in I}$ est donc sommable.

Ainsi, si $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ sont deux familles de carré sommable, alors pour tout $i \in I$, $(u_i + v_i)^2 = u_i^2 + 2u_i v_i + v_i^2$. Les familles $(u_i^2)_{i \in I}$, $(u_i v_i)_{i \in I}$ et $(v_i^2)_{i \in I}$ étant sommables, la famille $((u_i + v_i)^2)_{i \in I}$ est également sommable, ce qui montre la stabilité par addition.

De plus, si $\lambda \in \mathbb{R}$, la famille $((\lambda u_i)^2)_{i \in I} = (\lambda^2 u_i^2)_{i \in I}$ est également sommable par linéarité de la somme, donc la famille $(\lambda u_i)_{i \in I}$ est de carré sommable, ce qui prouve la stabilité par multiplication par un scalaire et montre que $\ell^2(I, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Q2 - Soient $(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I} \in \ell^2(I, \mathbb{R})$. Considérons la fonction

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\longmapsto \sum_{i \in I} (u_i + \lambda v_i)^2. \end{aligned}$$

Cette fonction est bien définie, car $\ell^2(I, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On a ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$P(\lambda) = \sum_{i \in I} u_i^2 + 2\lambda \sum_{i \in I} u_i v_i + \lambda^2 \sum_{i \in I} v_i^2.$$

P est polynomiale de degré 2, et est par ailleurs positive sur $\mathbb{R}$. Ainsi, son discriminant est négatif ou nul (P admet au plus une racine réelle), donnant ainsi

$$4 \left(\sum_{i \in I} u_i v_i \right)^2 \leq 4 \left(\sum_{i \in I} u_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i \in I} v_i^2 \right).$$

Après division par 4 et passage à la racine carrée, on a

$$\left| \sum_{i \in I} u_i v_i \right| \leq \left(\sum_{i \in I} u_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i \in I} v_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Q3 - Prenons $I = \mathbb{N}^*$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $u_i = \frac{1}{i}$. La famille $(u_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable (divergence de la série harmonique). En revanche, $(u_i^2)_{i \in I} = \left(\frac{1}{i^2} \right)_{i \in I}$ est sommable (convergence d'une série de Riemann), donc la famille $(u_i)_{i \in I}$ est bien de carré sommable, ce qui conclut.

■

Chapitre 7

Probabilités I

7.1 Cas pratiques

Exercice 7.1 (Jeu de fléchettes) ★★

Deux joueurs (1 et 2) jouent aux fléchettes. Ils tirent à tour de rôle sur une cible en alternant. Le jeu s'arrête dès que l'un des joueurs touche la cible et gagne ainsi la partie. Le joueur 1 commence en tirant, puis le joueur 2 tire, et ainsi de suite. A chaque lancer, le joueur 1 a une probabilité p_1 de toucher la cible, tandis que le joueur 2 a une probabilité p_2 de toucher cette même cible.

On remarque que le joueur 1 joue aux tours impairs $(1, 3, 5, \dots)$ tandis que le joueur 2 joue aux tours pairs $(2, 4, 6, \dots)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note les événements

- A_n : Le joueur 1 l'emporte au rang $2n + 1$.
- B_n : Le joueur 2 l'emporte au rang $2n + 2$.
- Pour $i \in \{1, 2\}$, G_i : Le joueur i gagne le jeu.

Q1 - Calculer $\mathbb{P}(A_n)$ et $\mathbb{P}(B_n)$.

Q2 - En déduire $\mathbb{P}(G_1)$ et $\mathbb{P}(G_2)$, puis que le jeu dure indéfiniment.

Q3 - Montrer que le jeu est équitable (autrement dit les joueurs 1 et 2 ont la même probabilité de gagner) si et seulement si $p_2 = \frac{p_1}{1 - p_1}$.

Solution

Q1 - Soit $n \in \mathbb{N}$. L'évènement A_n correspond au scénario suivant:

- A n reprises, le joueur 1 rate la cible puis le joueur 2 rate la cible.
- Le joueur 1 atteint la cible.

Les lancers étant indépendants, on a $\mathbb{P}(A_n) = (1 - p_1)^n (1 - p_2)^n p_1$.

De même, l'évènement B_n correspond au scénario suivant:

- A n reprises, le joueur 1 rate la cible puis le joueur 2 rate la cible.
- Le joueur 1 rate la cible
- Le joueur 2 atteint la cible.

Les lancers étant indépendants, on a $\mathbb{P}(B_n) = (1 - p_1)^{n+1}(1 - p_2)^n p_2$.

Q2 - L'évènement G_1 a lieu si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que A_n a lieu, autrement dit, $G_1 = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$. Un joueur ne pouvant gagner simultanément à deux rangs distincts,

les évènements A_n sont deux à deux disjoints. On a donc $G_1 = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} A_n$, donnant ainsi

$$\mathbb{P}(G_1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \frac{p_1}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}. \quad \text{De la même manière, on a}$$

$$\mathbb{P}(G_2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \frac{(1 - p_1)p_2}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}.$$

Notons I l'évènement "Le jeu dure indéfiniment". I, G_1 et G_2 forment un système complet d'évènements, donc on a $\mathbb{P}(I) = 1 - \mathbb{P}(G_1) - \mathbb{P}(G_2) = 0$, donc le jeu s'arrête presque sûrement.

Q3 - Le jeu est équitable si et seulement si $\mathbb{P}(G_1) = \mathbb{P}(G_2)$, i.e. si et seulement si $p_1 = (1 - p_1)p_2$, i.e. $p_2 = \frac{p_1}{1 - p_1}$.

Exercice 7.2 (Nombre au hasard) ★★

On tire au hasard un nombre entier strictement positif. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité d'obtenir n vaut $p_n = \frac{1}{2^n}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'évènement "Choisir un multiple de k ".

Q1 - Vérifier qu'on définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

Q2 - Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité de A_k .

Q3 - Calculer $\mathbb{P}(A_2 \cup A_3)$.

Q4 - Soient $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Que vaut $A_p \cap A_q$. Les évènements A_k sont-ils deux à deux indépendants ?

Solution

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $p_n \in [0, 1]$, de plus, la série géométrique $\sum p_n$ converge, et sa somme est donnée par $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = 1$. On définit bien une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
2. On a $\mathbb{P}(A_k) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ k|n}} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{nk}} = \frac{1}{2^k} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^k}} = \frac{1}{2^k - 1}$.
3. Sélectionner un nombre divisible à la fois par 2 et 3 revient à sélectionner un nombre divisible par 6, donnant ainsi $A_2 \cap A_3 = A_6$. On a donc $\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_6) = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} - \frac{1}{63} = \frac{29}{63}$.
4. Si $p, q \in \mathbb{N}^*$, alors sélectionner un nombre divisible à la fois par p et par q revient à sélectionner un nombre divisible par $p \vee q$, où $p \vee q$ désigne le PPCM de p et q . On a donc $A_p \cap A_q = A_{p \vee q}$.

Posons $m = p \vee q$. Si, pour $p, q \geq 2$, A_p et A_q sont indépendants, alors $\mathbb{P}(A_m) = \mathbb{P}(A_p)\mathbb{P}(A_q)$, soit $\frac{1}{2^m - 1} = \frac{1}{(2^p - 1)(2^q - 1)}$, donnant ainsi $2^m - 1 = 2^{p+q} - (2^p + 2^q) + 1$, i.e. $2^m = 2^{p+q} - (2^p + 2^q) + 2$. Le nombre de gauche est divisible par 4 (car $m \geq 2$). A droite, le premier terme est divisible par 4 (car $p + q \geq 2$), tout comme le second terme (car $p, q \geq 2$). En revanche, le troisième terme ne l'est pas. On a donc à gauche un nombre divisible par 4 et à droite un nombre qui ne l'est pas. Contradiction. A_p et A_q ne sont pas indépendants.

Exercice 7.3 (Lancer de dé) ★ ★ ★

On lance un dé équilibré. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note les évènements

- B_n : Le n -ième lancer donne un 2 ou un 4.
- S_n : Le n -ième lancer donne un 6.

Q1 - On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'évènement A_n : On obtient un 2 et un 4 aux $n - 1$ premiers lancers puis un 6 au n -ième. Ecrire A_n en fonction de $B_1, \dots, B_{n-1}, S_n$.

Q2 - On lance le dé jusqu'à l'obtention d'un 6. Quelle est la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs ?

Solution

Q1 - Puisque l'on a un 2 ou un 4 aux $n - 1$ premiers lancers du dé, les évènements $B_1, \dots, B_{n-1}$ ont lieu. De plus, en faisant un 6 au n -ième lancer, l'évènement S_n a lieu. On a ainsi $A_n = B_1 \cap \dots \cap B_{n-1} \cap S_n$.

- Q2 - Notons A l'évènement "Tous les lancers de dé donnent un nombre pair". Puisque l'on s'arrête en ayant fait un 6, on doit avoir fait aux lancers précédents un 2 ou un 4. Autrement dit, nous avons $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Comme, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ $S_n \cap B_n = \emptyset$ (on ne peut pas faire un 6 et un autre nombre en même temps), on a donc, pour tous entiers $i, j \geq 1$ tels que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$. La réunion est donc disjointe, donnant ainsi $\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$. Les lancers de dés étant indépendants, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, donnant ainsi
- $$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{6} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{4}.$$

Exercice 7.4 (La ruine du joueur) ★ ★ ★

Soient $N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$. Un joueur dispose de k euros, où k est un entier compris entre 0 et N . ce joueur joue à pile ou face à l'aide d'une pièce. Avec une probabilité p , il tombe sur pile et gagne 1 euro. Avec une probabilité q , il tombe sur face et perd un euro. Le jeu s'arrête lorsque le joueur possède 0 ou N euros (ruine ou fortune). On note p_k la probabilité d'être ruiné (i.e. à 0 euros en partant de k euros).

On note les évènements

- P_1 : Le premier lancer donne pile.
- R : Le joueur finit ruiné.

Q1 - Déterminer p_0 et p_N .

Q2 - Montrer que pour tout entier k compris entre 1 et $N - 1$, on a $p_k = pp_{k+1} + qp_{k-1}$.

Q3 - En déduire la valeur de p_k pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq N$.

Solution

- Q1 - Puisque le jeu s'arrête quand le joueur possède 0 ou N euros, on a ainsi $p_0 = 1$ (ruiné dès le départ) et $p_N = 0$ (ne pourra jamais être ruiné s'il possède la somme maximale dès le départ).
- Q2 - Supposons que le joueur dispose de k euros au départ. $\{P_1, \overline{P_1}\}$ forme un système complet d'évènements. On a ainsi

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(R|P_1)\mathbb{P}(P_1) + \mathbb{P}(R|\overline{P_1})\mathbb{P}(\overline{P_1}) = p\mathbb{P}(R|P_1) + q\mathbb{P}(R|\overline{P_1}).$$

Si le joueur fait pile (évènement P_1), le joueur dispose donc de $k + 1$ euros et se retrouve ruiné avec une probabilité p_{k+1} . De même, si le joueur fait face (évènement $\overline{P_1}$), le joueur dispose de $k - 1$ euros et se retrouve ruiné avec une probabilité p_{k-1} . On a donc $\mathbb{P}(R|P_1) = p_{k+1}$ et $\mathbb{P}(R|\overline{P_1}) = p_{k-1}$, donnant le résultat souhaité.

Q3 - On a ainsi une suite récurrente d'ordre 2 $p_{k+1} - \frac{1}{p}p_k + \frac{q}{p}p_{k-1} = 0$. Le polynôme caractéristique associé à cette suite est donné par $X^2 - \frac{1}{p}X + \frac{q}{p}$. Le discriminant vaut $\frac{(2p-1)^2}{p^2}$.

- Si $p \neq q$, les deux racines du polynôme caractéristique sont 1 et $\frac{q}{p}$. Il existent donc $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout entier k compris entre 0 et N , $p_k = \alpha + \beta \left(\frac{q}{p}\right)^k$. Les conditions $p_0 = 1$ et $p_N = 0$ mènent au système linéaire

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + \beta \left(\frac{q}{p}\right)^N = 0 \end{cases}.$$

La résolution de ce système donne, pour tout entier $0 \leq k \leq N$, $p_k = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}$.

- Si $p = q = \frac{1}{2}$, alors le polynôme caractéristique possède 1 comme racine double. Ils existent donc $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout entier k compris entre 0 et N , $p_k = \alpha + \beta k$. Les conditions $p_0 = 1$ et $p_N = 0$ donnent ce système linéaire

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha + \beta N = 0 \end{cases}.$$

La résolution de ce système donne, pour tout entier $0 \leq k \leq N$, $p_k = 1 - \frac{k}{N}$.



7.2 Limites de probabilités

Exercice 7.5 (Rumeur) ★★

Une information de type vrai/faux est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité $p \in [0, 1]$, l'information reçue d'une personne est transmise de façon correcte à la personne suivante. Avec une probabilité $1 - p$, l'information reçue d'une personne est transmise de façon contraire à la personne suivante. On note

- p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.
- I_n l'évènement: "L'information après n transmissions est correcte".

Q1 - Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n . En déduire la valeur de p_n en fonction de p et n .

Q2 - Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. Que se passe-t-il ? Discuter en fonction de p .

Solution

Q1 - Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\{I_n, \overline{I_n}\}$ forme un système complet d'évènements, la formule des probabilités totales assure que

$$\mathbb{P}(I_{n+1}) = \mathbb{P}(I_{n+1}|I_n)\mathbb{P}(I_n) + \mathbb{P}(I_{n+1}|\overline{I_n})\mathbb{P}(\overline{I_n}),$$

$$\text{soit } p_{n+1} = \mathbb{P}(I_{n+1}|I_n)p_n + \mathbb{P}(I_{n+1}|\overline{I_n})(1 - p_n).$$

- $\mathbb{P}(I_{n+1}|I_n)$ représente la probabilité que l'information reçue soit vraie tout en étant vraie au départ. Elle est donc correctement transmise, donc $\mathbb{P}(I_{n+1}|I_n) = p$.
- $\mathbb{P}(I_{n+1}|\overline{I_n})$ représente la probabilité que l'information reçue soit vraie tout en étant fausse au départ. Elle est donc incorrectement transmise, donc $\mathbb{P}(I_{n+1}|\overline{I_n}) = 1 - p$.

On a ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = (2p - 1)p_n + 1 - p$. Il s'agit d'une relation décrivant une suite arithmético-géométrique. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ell = (2p - 1)\ell + 1 - p$. On a $\ell = \frac{1}{2}$. En posant $q_n = p_n - \ell = p_n - \frac{1}{2}$, on a $q_{n+1} = (2p - 1)q_n$, soit $q_n = (2p - 1)^n q_0$, i.e.

$$p_n = \frac{1}{2}(2p - 1)^n + \frac{1}{2}.$$

Q2 - On a plusieurs comportements distincts suivant la valeur de p .

- Si $p = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = 1$, l'information est presque-sûrement transmise de manière correcte.
- Si $p = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{2n} = 1$ et $p_{2n+1} = 0$. L'information est presque-sûrement transmise de manière correcte.
- Si $0 < p < 1$, $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$, l'information est transmise de manière confuse (correctement et incorrectement de manière équiprobable à long terme).

■

Exercice 7.6 (D'une ville à l'autre) ★★

On considère deux villes A et B . Chaque année, une partie de la population de chacune des deux villes déménage dans l'autre ville. Ainsi, d'une année à l'autre:

- 10% de la population de la ville A déménage dans la ville B .
- 20% de la population de la ville B déménage dans la ville A .

On suit l'évolution d'un habitant au fil des années, on note les évènements:

- A_n : L'habitant habite dans la ville A l'année n .
- B_n : L'habitant habite dans la ville B l'année n .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_n = \mathbb{P}(A_n)$ et $b_n = \mathbb{P}(B_n)$. L'habitant en question habite initialement dans la ville A .

Q1 - En notant $X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$, écrire une relation entre $X_{n+1} = MX_n$ où $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est une matrice que l'on précisera.

Q2 - Calculer les puissances de M , en déduire une expression de X_n en fonction de n .

Q3 - Quelle est la limite de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Sur le long terme, quelle est la probabilité que notre habitant habite dans la ville A ?

Solution

Q1 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{A_n, B_n\}$ est un système complet d'évènements, donc d'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|B_n)\mathbb{P}(B_n) \\ \mathbb{P}(B_{n+1}) &= \mathbb{P}(B_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}|B_n)\mathbb{P}(B_n) \end{cases},$$

soit ainsi

$$\begin{cases} a_{n+1} &= \mathbb{P}(A_{n+1}|A_n)a_n + \mathbb{P}(A_{n+1}|B_n)b_n \\ b_{n+1} &= \mathbb{P}(B_{n+1}|A_n)a_n + \mathbb{P}(B_{n+1}|B_n)b_n \end{cases},$$

- $\mathbb{P}(A_{n+1}|A_n)$ correspond à la probabilité de rester dans la ville A entre l'année n et l'année $n+1$, donc $\mathbb{P}(A_{n+1}|A_n) = \frac{9}{10}$.
- $\mathbb{P}(A_{n+1}|B_n)$ correspond à la probabilité de déménager de la ville A à la ville B entre l'année n et l'année $n+1$, donc $\mathbb{P}(A_{n+1}|B_n) = \frac{1}{10}$.
- $\mathbb{P}(B_{n+1}|B_n)$ correspond à la probabilité de rester dans la ville B entre l'année n et l'année $n+1$, donc $\mathbb{P}(B_{n+1}|B_n) = \frac{4}{5}$.
- $\mathbb{P}(B_{n+1}|A_n)$ correspond à la probabilité de déménager de la ville B à la ville A entre l'année n et l'année $n+1$, donc $\mathbb{P}(B_{n+1}|A_n) = \frac{1}{5}$.

On a ainsi

$$\begin{cases} a_{n+1} &= \frac{9}{10}a_n + \frac{1}{5}b_n \\ b_{n+1} &= \frac{1}{10}a_n + \frac{4}{5}b_n \end{cases},$$

soit $X_{n+1} = MX_n$, où $M = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$

Q2 - Recherchons les valeurs propres de M . Le polynôme caractéristique de M est donné par $\chi_M = X^2 - \frac{17}{10}X + \frac{7}{10} = \left(X - \frac{7}{10}\right)(X - 1)$. M est bien diagonalisable (valeurs propres distinctes). La recherche de sous espaces propres donne

$$E_{\frac{7}{10}}(M) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, \quad E_1(M) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Une matrice de passage est donc donnée par $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, et on retrouve bien $P^{-1}MP = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} M^n &= P \cdot \frac{1}{10^n} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \cdot P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \left(\frac{7}{10}\right)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \left(\frac{7}{10}\right)^n & 2 \\ -\left(\frac{7}{10}\right)^n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 + \left(\frac{7}{10}\right)^n & 2\left(1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n\right) \\ 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n & 2\left(\frac{7}{10}\right)^n + 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Puisque $X_n = M^n X_0$, et comme l'habitant est dans la ville A à l'année 0, on a $X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 + \left(\frac{7}{10}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n \end{bmatrix}$$

Q3 - On a ainsi $X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ainsi, sur le long terme, notre habitant habitera la ville A avec une probabilité $\frac{2}{3}$.

■

7.3 Inégalités probabilistes

Exercice 7.7 (Probabilité d'une intersection) ★

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A, B \in \mathcal{F}$. Montrer que

$$\max \{0, \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1\} \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \min \{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\}.$$

Solution

Tout d'abord, nous avons $A \cap B \subseteq A$, donc $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)$. De même, on a $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$, ce qui mène à l'inégalité de droite.

De plus, nous avons $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$ et $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0$, ce qui donne l'inégalité de gauche.

Exercice 7.8 (Inégalité de Bonferroni) ★★

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ des événements. Montrer que $\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) \geq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) - (n-1)$.

Solution

Montrons le résultat par récurrence.

- Initialisation: Dans le cas $n = 1$, on a, pour $A_1 \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A_1) \geq \mathbb{P}(A_1) - (1 - 1)$, ce qui montre l'initialisation.
- Hérédité: Considérons l'inégalité vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$ pour des événements $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}) &= \mathbb{P}((A_1 \cup \dots \cup A_n) \cup A_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\ &\quad - \mathbb{P}((A_1 \cup \dots \cup A_n) \cap A_{n+1}) \\ &\stackrel{[HR]}{\geq} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) - (n-1) - \mathbb{P}((A_1 \cup \dots \cup A_n) \cap A_{n+1}) \\ &\geq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) - (n-1) - 1 \\ &\geq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) - n, \end{aligned}$$

ce qui montre l'hérédité.

Exercice 7.9 (Majoration de la probabilité d'une réunion) ★★

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ des évènements (pour $n \in \mathbb{N}^*$).

Q1 - Montrer que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, $A_k \cup \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n A_i \setminus A_k = \bigcup_{i=1}^n A_i$.

Q2 - Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \min_{1 \leq k \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \mathbb{P}(A_i \cap A_k) \right\}$

Solution

Q1 - Montrons le résultat par double inclusion. Soit k un entier compris entre 1 et n .

- Soit $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$. Il existe donc i , entier compris entre 1 et n tel que $x \in A_i$. Si $i = k$, alors $x \in A_k$. Si $i \neq k$, alors $x \notin A_k$ mais $x \in A_i$, soit $x \in A_i \setminus A_k$, donc $x \in A_k \cup \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n A_i \setminus A_k$. On a finalement $\bigcup_{i=1}^n A_i \subseteq A_k \cup \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n A_i \setminus A_k$.
- Réciproquement, comme, pour tout entier i compris entre 1 et n tel que $i \neq k$, $A_i \setminus A_k \subseteq A_i$, on a ainsi $\bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n A_i \setminus A_k \subseteq \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n A_i$ soit $A_k \cup \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n A_i \setminus A_k \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$.

Q2 - Soit k un entier compris entre 1 et n . On a

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \mathbb{P}(A_i \cap A_k) = \mathbb{P}(A_k) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \mathbb{P}(A_i) - \mathbb{P}(A_i \cap A_k) = \mathbb{P}(A_k) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \mathbb{P}(A_i \setminus A_k).$$

L'inégalité de Boole ainsi que la question précédente assurent que

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \mathbb{P}(A_i \cap A_k) \geq \mathbb{P}\left(A_k \cup \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n A_i \setminus A_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right).$$

Cette inégalité étant vraie pour tout entier k compris entre 1 et n , on obtient ainsi le résultat souhaité. ■

Chapitre 8

Polynôme minimal et réduction

8.1 Arithmétique des polynômes

Exercice 8.1 (PGCD de deux polynômes) ★★

Calculer $P \wedge Q$ où P, Q sont donnés par:

Q1 - $P = X^4 - 10X^3 + 35X^2 - 50X + 24$ et $Q = X^3 - 8X^2 + 17X - 10$.

Q2 - $P = X^4 - 11X^3 + 41X^2 - 61X + 30$ et $Q = X^3 - 7X^2 + 14X - 8$.

Q3 - $P = X^4 - 12X^3 + 49X^2 - 78X + 40$ et $Q = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$.

Solution

Q1 - Appliquons l'algorithme d'Euclide.

- La division euclidienne de P par Q donne

$$\begin{array}{r|l} X^4 - 10X^3 + 35X^2 - 50X + 24 & X^3 - 8X^2 + 17X - 10 \\ - X^4 + 8X^3 - 17X^2 + 10X & \hline - 2X^3 + 18X^2 - 40X + 24 & \\ - 2X^3 - 16X^2 + 34X - 20 & \hline 2X^2 - 6X + 4 & \end{array} .$$

On a donc $P = (X - 2)Q + 2X^2 - 6X + 4$.

- La division euclidienne de Q par $2X^2 + 6X + 4$ donne

$$\begin{array}{r|l} X^3 - 8X^2 + 17X - 10 & 2X^2 - 6X + 4 \\ - X^3 + 3X^2 - 2X & \hline - 5X^2 + 15X - 10 & \\ + 5X^2 - 15X + 10 & \hline 0 & \end{array} .$$

Le reste de cette division euclidienne étant nul, on retient le dernier reste non nul (normalisé) dans l'algorithme d'Euclide, donnant ainsi

$$P \wedge Q = X^2 - 3X + 2.$$

Q2 - Appliquons l'algorithme d'Euclide.

- La division euclidienne de P par Q donne

$$\begin{array}{r|l} X^4 - 11X^3 + 41X^2 - 61X + 30 & X^3 - 7X^2 + 14X - 8 \\ - X^4 + 7X^3 - 14X^2 + 8X & X - 4 \\ \hline - 4X^3 + 27X^2 - 53X + 30 & \\ + 4X^3 - 28X^2 + 56X - 32 & \\ \hline - X^2 + 3X - 2 & \end{array}.$$

On a donc $P = (X - 4)Q - X^2 + 3X - 2$.

- La division euclidienne de Q par $2X^2 + 6X + 4$ donne

$$\begin{array}{r|l} X^3 - 7X^2 + 14X - 8 & -X^2 + 3X - 2 \\ - X^3 + 3X^2 - 2X & -X + 4 \\ \hline - 4X^2 + 12X - 8 & \\ + 4X^2 - 12X + 8 & \\ \hline 0 & \end{array}.$$

Le reste de cette division euclidienne étant nul, on retient le dernier reste non nul (normalisé) dans l'algorithme d'Euclide, donnant ainsi

$$P \wedge Q = X^2 - 3X + 2.$$

Q3 - Appliquons l'algorithme d'Euclide.

- La division euclidienne de P par Q donne

$$\begin{array}{r|l} X^4 - 12X^3 + 49X^2 - 78X + 40 & X^3 - 6X^2 + 11X - 6 \\ - X^4 + 6X^3 - 11X^2 + 6X & X - 6 \\ \hline - 6X^3 + 38X^2 - 72X + 40 & \\ + 6X^3 - 36X^2 + 66X - 36 & \\ \hline 2X^2 - 6X + 4 & \end{array}.$$

On a donc $P = (X - 6)Q + 2X^2 - 6X + 4$.

- La division euclidienne de Q par $2X^2 + 6X + 4$ donne

$$\begin{array}{r|l} X^3 - 6X^2 + 11X - 6 & 2X^2 - 6X + 4 \\ - X^3 + 3X^2 - 2X & \frac{1}{2}X - \frac{3}{2} \\ \hline - 3X^2 + 9X - 6 & \\ + 3X^2 - 9X + 6 & \\ \hline 0 & \end{array}.$$

Le reste de cette division euclidienne étant nul, on retient le dernier reste non nul (normalisé) dans l'algorithme d'Euclide, donnant ainsi

$$P \wedge Q = X^2 - 3X + 2.$$

■

8.2 Trigonalisation de matrices

Exercice 8.2 (Trigonalisation de matrices - Piste bleue) ★★

Justifier que les matrices suivantes ne sont pas diagonalisables. Les trigonaliser (recherche de valeurs et d'une base de vecteurs propres que l'on complètera, forme réduite triangulaire supérieure):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution

A - Le polynôme caractéristique de A est donné par $\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 & -1 \\ 0 & X-2 & 0 \\ 1 & -1 & X-2 \end{vmatrix}$. On a ainsi

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} X & -1 & -1 \\ 0 & X-2 & 0 \\ 1 & -1 & X-2 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + (X-2)L_1} \begin{vmatrix} X & -1 & -1 \\ 0 & X-2 & 0 \\ X^2 - 2X + 1 & -X + 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\downarrow C_3}{=} - \begin{vmatrix} 0 & X-2 \\ X^2 - 2X + 1 & -X + 1 \end{vmatrix} = (X-2)(X^2 - 2X + 1) \\ &= (X-2)(X-1)^2 \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc 2 et 1, respectivement de multiplicité 1 et 2.

Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_2(A)$. On a

$$\begin{aligned}
AX = 2X &\iff \begin{cases} y + z = 2x \\ 2y = 2y \\ -x + y + 2z = 2z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = y \\ z = y \end{cases}, y \in \mathbb{R} \\
&\iff E_2(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

De plus, soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_1(A)$. On a

$$\begin{aligned}
AX = X &\iff \begin{cases} y + z = x \\ 2y = y \\ -x + y + 2z = z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ y = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}, z \in \mathbb{R} \\
&\iff E_1(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres de A ne vaut pas 3, donc A n'est pas diagonalisable. On peut compléter la famille de vecteurs propres en une base de $\mathbb{R}^3$, par

exemple en ajoutant le vecteur $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. On remarque ainsi que

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Donc, en posant $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, on a $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

B - Le polynôme caractéristique de B est donné par $\chi_B = \begin{vmatrix} X-2 & -1 & -1 \\ 0 & X-1 & 1 \\ 1 & 1 & X-1 \end{vmatrix}$. On a ainsi

$$\begin{aligned}
\chi_B &= \begin{vmatrix} X-2 & -1 & -1 \\ 0 & X-1 & 1 \\ 1 & 1 & X-1 \end{vmatrix} \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 - (X-2)L_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & -X+1 & -X^2+3X-3 \\ 0 & X-1 & 1 \\ 1 & 1 & X-1 \end{vmatrix} \\
&\stackrel{\downarrow C_1}{=} \begin{vmatrix} -X+1 & X^2-3X-3 \\ X-1 & 1 \end{vmatrix} = (X-1)(X^2-3X+2) \\
&= (X-2)(X-1)^2
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de B sont donc 2 et 1, respectivement de multiplicité 1 et 2.

Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_2(B)$. On a

$$\begin{aligned}
BX = 2X &\iff \begin{cases} 2x + y + z = 2x \\ y - z = 2y \\ -x - y + z = 2z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y + z = 0 \\ -y - z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} z = -y \\ x = 0 \end{cases}, \quad y \in \mathbb{R} \\
&\iff E_2(B) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

De plus, soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_1(B)$. On a

$$\begin{aligned}
BX = X &\iff \begin{cases} 2x + y + z = x \\ y - z = y \\ -x - y + z = z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ z = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}, \quad y \in \mathbb{R} \\
&\iff E_1(B) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres de B ne vaut pas 3, donc B n'est pas diagonalisable. On peut compléter la famille de vecteurs propres en une base de $\mathbb{R}^3$, par

exemple en ajoutant le vecteur $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. On remarque ainsi que

$$B \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Donc, en posant $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, on a $P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

C - Le polynôme caractéristique de C est donné par $\chi_C = \begin{vmatrix} X & -1 & -1 \\ 0 & X-2 & 0 \\ 1 & -1 & X-2 \end{vmatrix}$. On a ainsi

$$\begin{aligned} \chi_C &= \begin{vmatrix} X & -1 & -1 \\ 0 & X-2 & 0 \\ 1 & -1 & X-2 \end{vmatrix} \stackrel{L_3 \leftarrow L_3 + (X-2)L_1}{=} \begin{vmatrix} X & -1 & -1 \\ 0 & X-2 & 0 \\ X^2 - 2X + 1 & -X + 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\downarrow C_3}{=} - \begin{vmatrix} 0 & X-2 \\ X^2 - 2X + 1 & -X + 1 \end{vmatrix} = (X-2)(X^2 - 2X + 1) \\ &= (X-2)(X-1)^2 \end{aligned}$$

Les valeurs propres de C sont donc 2 et 1, respectivement de multiplicité 1 et 2.

Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_2(C)$. On a

$$\begin{aligned} CX = 2X &\iff \begin{cases} x & & + z & = 2x \\ x & + 2y & - z & = 2y \\ x & + y & + z & = 2z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x & & + z & = 0 \\ x & & - z & = 0 \\ x & + y & - z & = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}, \quad z \in \mathbb{R} \\ &\iff E_2(C) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

De plus, soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_1(C)$. On a

$$\begin{aligned}
CX = X &\iff \begin{cases} x & & + z = x \\ x + 2y & - z = y \\ x + y & + z = z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} & & z = 0 \\ x + y & - z = 0 \\ x + y & = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -y, & y \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases} \\
&\iff E_1(C) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres de C ne vaut pas 3, donc C n'est pas diagonalisable. On peut compléter la famille de vecteurs propres en une base de $\mathbb{R}^3$, par exemple en ajoutant le vecteur $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. On remarque ainsi que

$$C \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Donc, en posant $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, on a $P^{-1}CP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

■

Exercice 8.3 (Trigonalisation de matrices - Piste rouge) ★ ★ ★

Justifier que les matrices suivantes ne sont pas diagonalisables. Les trigonaliser (recherche de valeurs et d'une base de vecteurs propres que l'on complètera, forme réduite triangulaire supérieure):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & -6 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -7 & -11 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -4 & -8 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solution

A - Le polynôme caractéristique de A est donné par $\chi_A = \begin{vmatrix} X & -2 & -1 \\ 2 & X-4 & -1 \\ -5 & 6 & X \end{vmatrix}$. On a ainsi

$$\begin{aligned}
\chi_A &= \begin{vmatrix} X & -2 & -1 \\ 2 & X-4 & -1 \\ -5 & 6 & X \end{vmatrix} \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{=} \begin{vmatrix} X-2 & -X+2 & 0 \\ 2 & X-4 & -1 \\ -5 & 6 & X \end{vmatrix} \\
&= (X-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & X-4 & -1 \\ -5 & 6 & X \end{vmatrix} \stackrel{L_1 \leftarrow L_3 + XL_2}{=} (X-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & X-4 & -1 \\ 2X-5 & X^2-4X+6 & 0 \end{vmatrix} \\
&\stackrel{\downarrow C_3}{=} (X-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2X-5 & X^2-4X+6 & 0 \end{vmatrix} = (X-2)(X^2-2X+1) \\
&= (X-2)(X-1)^2
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc 2 et 1, respectivement de multiplicité 1 et 2.

Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_2(A)$. On a

$$\begin{aligned}
AX = 2X &\iff \begin{cases} -2x + 2y + z = 2x \\ 5x - 6y + z = 2y \\ = 2z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -2x + 2y + z = 0 \\ 5x - 6y - 2z = 0 \end{cases} \\
&\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\iff} \begin{cases} -2x + 2y + z = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 2y \\ z = 2y \end{cases}, \quad y \in \mathbb{R} \\
&\iff E_2(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

De plus, soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_1(A)$. On a

$$\begin{aligned}
AX = X &\iff \begin{cases} 2y + z = x \\ -2x + 4y + z = y \\ 5x - 6y = z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ -2x + 3y + z = 0 \\ 5x - 6y - z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ -y - z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases} \\
&\iff E_2(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres de A ne vaut pas 3, donc A n'est pas diagonalisable. On peut compléter la famille de vecteurs propres en une base de $\mathbb{R}^3$, par

exemple en ajoutant le vecteur $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. On remarque ainsi que

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Donc, en posant } P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ on a } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

B - Le polynôme caractéristique de B est donné par $\chi_B = \begin{vmatrix} X & 3 & 1 \\ -2 & X-5 & -1 \\ 7 & 11 & X+1 \end{vmatrix}$. On a ainsi

$$\begin{aligned}
\chi_B &= \begin{vmatrix} X & 3 & 1 \\ -2 & X-5 & -1 \\ 7 & 11 & X+1 \end{vmatrix} \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{=} \begin{vmatrix} X-2 & X-2 & 0 \\ -2 & X-5 & -1 \\ 7 & 11 & X+1 \end{vmatrix} \\
&= (X-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & X-5 & -1 \\ 7 & 11 & X+1 \end{vmatrix} \\
&\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 + (X+1)L_2}{=} (X-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & X-5 & -1 \\ -2X+5 & X^2-4X+6 & 0 \end{vmatrix} \\
&\stackrel{\downarrow C_3}{=} (X-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2X+5 & X^2-4X+6 \end{vmatrix} = (X-2)(X^2-2X+1) \\
&= (X-2)(X-1)^2
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de B sont donc 2 et 1, respectivement de multiplicité 1 et 2.

Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_2(B)$. On a

$$\begin{aligned}
 BX = 2X &\iff \begin{cases} -3y - z = 2x \\ 2x + 5y + z = 2y \\ -7x - 11y - z = 2z \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ -7x - 11y - 3z = 0 \end{cases} \\
 L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 &\iff \begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = -2y \\ z = y \end{cases}, \quad y \in \mathbb{R} \\
 &\iff E_2(B) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}
 \end{aligned}$$

De plus, soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_1(B)$. On a

$$\begin{aligned}
 BX = X &\iff \begin{cases} -3y - z = x \\ 2x + 5y + z = y \\ -7x - 11y - z = z \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -x - 3y - z = 0 \\ 2x + 4y + z = 0 \\ -7x - 11y - 2z = 0 \end{cases} \\
 L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\
 L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 - L_1 &\iff \begin{cases} -x - 3y - z = 0 \\ -2y - z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = -y \\ z = -2y \end{cases}, \quad y \in \mathbb{R} \\
 &\iff E_1(B) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}
 \end{aligned}$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres de B ne vaut pas 3, donc B n'est pas diagonalisable. On peut compléter la famille de vecteurs propres en une base de $\mathbb{R}^3$, par

exemple en ajoutant le vecteur $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. On remarque ainsi que

$$B \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Donc, en posant $P = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, on a $P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

C - Le polynôme caractéristique de C est donné par $\chi_C = \begin{vmatrix} X+4 & 8 & -2 \\ -3 & X-6 & 1 \\ 1 & 1 & X-2 \end{vmatrix}$. On a ainsi

$$\begin{aligned}
 \chi_C &= \begin{vmatrix} X+4 & 8 & -2 \\ -3 & X-6 & 1 \\ 1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2}{=} \begin{vmatrix} X-2 & 2X-4 & 0 \\ -3 & X-6 & 1 \\ 1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} \\
 &= (X-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & X-6 & 1 \\ 1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - (X-2)L_2}{=} (X-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & X-6 & 1 \\ 3X-5 & -X^2+4X-11 & 0 \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\downarrow C_3}{=} -(X-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3X-5 & -X^2+8X-11 \end{vmatrix} = -(X-2)(-X^2+2X-1) \\
 &= (X-2)(X-1)^2
 \end{aligned}$$

Les valeurs propres de C sont donc 2 et 1, respectivement de multiplicité 1 et 2.

Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_2(C)$. On a

$$\begin{aligned}
 CX = 2X &\iff \begin{cases} -4x - 8y + 2z = 2x \\ 3x + 6y - z = 2y \\ -x - y + 2z = 2z \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -6x - 8y + 2z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 3x + 4y - z = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3}{\iff} \begin{cases} y - z = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = -y \\ z = y \end{cases}, \quad y \in \mathbb{R} \\
 &\iff E_2(C) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}
 \end{aligned}$$

De plus, soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_1(C)$. On a

$$\begin{aligned}
CX = X &\iff \begin{cases} -4x - 8y + 2z = x \\ 3x + 6y - z = y \\ -x - y + 2z = z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -5x - 8y + 2z = 0 \\ 3x + 5y - z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases} \\
\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 5L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3 \end{matrix} &\iff \begin{cases} -3y - 3z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = -z, \quad z \in \mathbb{R} \\ x = 2z \end{cases} \\
&\iff E_2(C) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres de C ne vaut pas 3, donc C n'est pas diagonalisable. On peut compléter la famille de vecteurs propres en une base de $\mathbb{R}^3$, par

exemple en ajoutant le vecteur $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. On remarque ainsi que

$$C \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Donc, en posant $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, on a $P^{-1}CP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.



8.3 Polynômes d'endomorphismes

Exercice 8.4 (Polynôme annulateur et représentation matricielle) ★ ★ ★

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ un endomorphisme tel que $u^3 + u = 0$.

Q1 - Montrer que $\text{Im}(u) \oplus \ker(u) = \mathbb{R}^3$.

Q2 - On suppose de plus que $u \neq 0$. Montrer que $\ker(u) \oplus \ker(u^2 + Id) = \mathbb{R}^3$, avec $\dim(\ker(u^2 + Id)) = 2$.

Q3 - Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Solution

Q1 - Soit $x \in \mathbb{R}^3$. On a $x = -u^2(x) + x + u^2(x)$. Or, $u(x + u^2(x)) = u(x) + u^3(x) = 0$ donc $x + u^2(x) \in \ker(u)$ puisque $-u^2(x) = u(-u(x)) \in \text{Im}(u)$, on a $\mathbb{R}^3 = \ker(u) + \text{Im}(u)$.

De plus, si $x \in \ker(u) \cap \text{Im}(u)$, alors il existe $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $x = u(v)$. Comme $u + u^3 = 0$, on a $x = -u^3(v) = -u^2(x)$. Or, $x \in \ker(u)$ donc $x = 0$. On a donc la décomposition en somme directe.

Q2 - Le polynôme $X^3 + X = X(X^2 + 1)$ est un polynôme annulateur de u , et $X \wedge (X^2 + 1) = 1$, donc le lemme de décomposition des noyaux assure que $\ker(u^2 + Id) \oplus \ker(u) = \ker(u^3 + u) = \mathbb{R}^3$.

Comme $u \neq 0$, on a $\text{rg}(u) \geq 1$ donc le théorème du rang assure que $\dim(\ker(u)) \leq 2$. La décomposition en somme directe des noyaux assure que $\dim(\ker(u^2 + Id)) \geq 1$.

- Si $\dim(\ker(u^2 + Id)) = 1$, alors il existe un vecteur $e \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $\ker(u^2 + Id) = \text{Vect}\{e\}$. Or, $\ker(u^2 + Id)$ est stable par u , donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(e) = \lambda e$. On a ainsi, puisque $u^2 + Id = 0$, $u^2(e) = \lambda^2 e = -e$ ce qui conduit à $\lambda^2 = -1$. Contradiction. $\dim(\ker(u^2 + Id)) \geq 2$.
- Si $\dim(\ker(u^2 + Id)) = 3$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $u^2(x) = -x$. Ainsi, le polynôme caractéristique de u , de degré 3, admet au moins une racine réelle, donc ils existent $\lambda \in \mathbb{R}$ et $e \in \mathbb{R}^3$ non nul tels que $u(e) = \lambda e$. On a ainsi $u^2(e) = \lambda^2 e = -e$, donc $\lambda^2 = -1$. Contradiction. $\dim(\ker(u^2 + Id)) \leq 2$.

Q3 - Puisque $\dim(\ker(u^2 + Id)) = 2$, on a $\dim(\ker(u)) = 1$, donc il existe $v_1 \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $\ker(u) = \text{Vect}\{v_1\}$.

De plus, il existe $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $v \in \ker(u^2 + Id)$ et $u(v) \neq 0$. Montrons que la famille $\{v, u(v)\}$ est libre. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda v + \mu u(v) = 0$. Appliquons u à cette relation. On a $\lambda u(v) - \mu v = 0$, soit le "système" suivant

$$\begin{cases} \lambda v + \mu u(v) = 0 \\ \lambda u(v) - \mu v = 0 \end{cases}.$$

Supposons que $\lambda \neq 0$. À l'aide du système précédent, on a $u(v) = \frac{\mu}{\lambda} v = -\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 u(v)$, donc $u(v) = 0$, ce qui est contradictoire. On a ainsi $\lambda = 0$, soit $\mu = 0$. Donc la famille $\{v, u(v)\}$ est libre dans $\ker(u^2 + Id)$. Comme ce noyau est de dimension 2, c'est une base de $\ker(u^2 + Id)$.

Posons $v_2 = u(v)$ et $v_3 = v$. On a $u(v_2) = -v_3$ et $u(v_3) = v_2$. De plus, la famille $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (c'est une base adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^3 =$

$\ker(u) \oplus \ker(u^2 + Id)$). Comme $u(v_1) = 0$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

■

Exercice 8.5 (Somme directe et polynôme annulateur) ★ ★ ★

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $P(u) = 0$.

Q1 - Que peut-on dire sur les coefficients de P ?

Q2 - Montrer que $E = \text{Im}(u) \oplus \ker(u)$.

Solution

Q1 - Si P est de degré $n \in \mathbb{N}^*$, on écrit $P = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$. Les conditions $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$ donnent respectivement $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$.

Q2 - Montrons la décomposition en somme directe. Soit $y \in E$. Si $y \in \ker(u) \cap \text{Im}(u)$, alors $u(y) = 0$ et il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Donc, pour tout $k \geq 1$, $u^k(y) = 0$ et $u^{k+1}(x) = 0$. On a ainsi

$$\begin{aligned} 0 &= P(u)(x) \\ &= \underbrace{a_n u^n(x) + \cdots + a_2 u^2(x)}_{=0} + a_1 \underbrace{u(x)}_{=y} + \underbrace{a_0}_{=0} x \\ &= a_1 y. \end{aligned}$$

Comme $a_1 \neq 0$, on a $y = 0$.

De plus, le théorème du rang assure que $\text{rg}(u) + \dim(\ker(u)) = \dim(E)$, donc ici, $\dim(\text{Im}(u)) + \dim(\ker(u)) = \dim(E)$, ce qui montre donc que $E = \text{Im}(u) \oplus \ker(u)$.

**8.4 Puissance de matrices****Exercice 8.6 (Puissance d'une matrice) ★**

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Q1 - Soit le polynôme $P = X^2 - 3X + 2$. Montrer que P est un polynôme annulateur de la matrice A . Quelles sont ses racines ?

Q2 - En réalisant une division euclidienne de X^n par P (pour $n \geq 2$), calculer A^n .

Solution

Q1 - On a

$$\begin{aligned}
 P(A) &= A^2 - 3A + 2I_2 \\
 &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

On a $P = (X - 1)(X - 2)$.

Q2 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut calculer A^n . Comme P est de degré 2, une division euclidienne de X^n par P assure qu'ils existent $Q_n, R_n \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg(R_n) < \deg(P) = 2$ tels que $X^n = PQ_n + R_n$. En évaluant en A , comme $P(A) = 0$, on a $A^n = a_n A + b_n I_2$ où $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

De plus, comme $P = (X - 1)(X - 2)$, on a $P(I_2) = P(2I_2) = 0$, donc, en évaluant en I_2 et $2I_2$, on obtient le système

$$\begin{cases} a_n + b_n = 1 \\ 2a_n + b_n = 2^n \end{cases}.$$

La résolution de ce système donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2^n - 1$ et $b_n = 2 - 2^n$, soit

$$\begin{aligned}
 A^n &= (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_2 \\
 &= \begin{bmatrix} 3(2^n - 1) & 2^n - 1 \\ -2(2^n - 1) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 - 2^n & 0 \\ 0 & 2 - 2^n \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2 - 2^n \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

■

Exercice 8.7 (Matrice ne comportant que des 1) ★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille n dont les coefficients sont tous égaux à 1.

Q1 - Calculer J^2 et en déduire un polynôme annulateur de J .

Q2 - En déduire les puissances de J .

Solution

Q1 - Soit la matrice $J = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$. On a

$$J^2 = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n & \cdots & n \end{bmatrix} = nJ.$$

Ainsi, $J^2 - nJ = 0$, donc $P := X^2 - nX$ est un polynôme annulateur de J .

Q2 - Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On veut calculer J^k . Comme P est de degré 2, une division euclidienne de X^k par P assure qu'ils existent $Q_k, R_k \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg(R_k) < \deg(P) = 2$ tels que $X^k = PQ_k + R_k$. En évaluant en J , comme $P(J) = 0$, on a $J^k = a_k J + b_k I_n$ où $a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

De plus, comme $P = X(X - n)$, on a $P(nI_n) = P(0_n) = 0$, donc, en évaluant en nI_n et 0_n , on obtient le système

$$\begin{cases} na_k + b_k = n^k \\ b_k = 0 \end{cases}.$$

On trouve, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = n^{k-1}$, soit $J^k = n^{k-1}J$. Tous les coefficients de J^k sont égaux et valent n^{k-1} .



8.5 Reduction de matrices

Exercice 8.8 (Polynôme caractéristique et commutativité) ★

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Q1 - Si A ou B est inversible, montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Q2 - On considère les matrices $M = \begin{bmatrix} BA & -B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} 0 & -B \\ 0 & AB \end{bmatrix}$ et $P = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{bmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. Calculer MP et PN puis en déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Solution

Q1 - Si A est inversible, alors $BA = A^{-1}ABA = A^{-1}(AB)A$. Si B est inversible, alors $AB = B^{-1}BAB = B^{-1}(BA)B$. Dans les deux cas, A et B sont semblables donc ont le même polynôme caractéristique.

Q2 - On a

$$PN = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -B \\ 0 & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } MP = \begin{bmatrix} BA & -B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a ainsi $PN = MP$. On a $\det(P) = 1 \neq 0$ donc P est inversible et $N = P^{-1}MP$. M et N sont donc semblables, donc ont le même polynôme caractéristique. On a ainsi $X^n \chi_{BA} = \chi_M = \chi_N = X^n \chi_{AB}$, soit $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.



Exercice 8.9 (Matrice diagonalisable solution d'une équation) ★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^n = I_n$.

Solution

Puisque A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ses valeurs propres sont toutes réelles et sont racines du polynôme $X^n - 1$. Deux cas se distinguent:

- Si n est pair, alors 1 et -1 sont les seules racines réelles de $X^n - 1$, donc les seules valeurs propres de A sont -1 et 1. L'ensemble des solutions est donc donné par

$$\left\{ P^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{bmatrix} P, P \in GL_n(\mathbb{R}), (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \{-1, 1\}^n \right\}$$

- Si n est impair, 1 est la seule racine réelle de $X^n - 1$, donc 1 est la seule valeur propre possible de A , et comme A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des solutions est donc donné par $\{I_n\}$.



Exercice 8.10 (Valeurs propres complexes d'une matrice réelle) ★★

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Q1 - Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A . Montrer que $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A de même multiplicité algébrique.
- Q2 - On suppose que $A^3 + A - 2I_n = 0$. Montrer que $\det(A) > 0$.
- Q3 - On suppose que $A^2 + A + I_n = 0$. Montrer que $\text{Tr}(A) \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ (i.e. que la trace de A est un entier naturel strictement négatif).

Solution

Q1 - Soit χ_A le polynôme caractéristique de A . Puisque λ est valeur propre de A avec une multiplicité algébrique notée m_λ , il existe donc $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\lambda) \neq 0$ et $\chi_A = (X - \lambda)^{m_\lambda} P(X)$.

En passant à la conjugaison, on a $\overline{\chi_A} = (X - \bar{\lambda})^{m_\lambda} \overline{P}(X)$. De plus, on a $\overline{P(\bar{\lambda})} = \overline{P(\lambda)} \neq 0$. Comme $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$, on a $\chi_A = (X - \bar{\lambda})^{m_\lambda} \overline{P}(X)$. Donc $\bar{\lambda}$ est racine de χ_A avec multiplicité m_λ . λ et $\bar{\lambda}$ sont donc valeurs propres de A avec la même multiplicité algébrique.

Q2 - Puisque $A^3 + A - 2I_n = 0$, les valeurs propres de A sont donc racines du polynôme $X^3 + X - 2 = (X - 1)(X^2 + X + 2)$. Or, les racines de $X^2 + X + 2$ sont complexes conjuguées (non réelles). Notons-les λ et $\bar{\lambda}$. La multiplicité algébrique de λ et $\bar{\lambda}$ est la même, on la notera m .

Le déterminant étant égal au produit des valeurs propres comptées avec multiplicité, on a ainsi $\det(A) = \lambda^m \bar{\lambda}^m = |\lambda|^{2m} > 0$.

Q3 - Puisque $A^2 + A + I_n = 0$, les valeurs propres de A sont donc racines du polynôme $X^2 + X - 1 = (X - j)(X - \bar{j})$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. j et $\bar{j}$ sont donc valeurs propres de A , et, étant conjuguées, de même multiplicité algébrique, que l'on notera m .

La trace étant donnée par la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité, on a ainsi $\text{Tr}(A) = m(j + \bar{j}) = -m$. C'est bien un entier naturel strictement négatif.

■

Chapitre 9

Espaces vectoriels normés I

9.1 Dimension finie

Exercice 9.1 (Norme dérivant d'un produit scalaire) ★

Soit l'application

$$\begin{aligned} N : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x_1, x_2) &\longmapsto \sqrt{x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2}. \end{aligned}$$

Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Solution

Considérons l'application

$$\begin{aligned} \langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &\longmapsto x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 5x_2y_2. \\ &= \frac{1}{2} [N(x_1 + y_1, x_2 + y_2)^2 - N(x_1, x_2)^2 - N(y_1, y_2)^2] \end{aligned}$$

Cette application est clairement bilinéaire (c'est une forme bilinéaire). Pour la symétrie, on a, si $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \langle (y_1, y_2) | (x_1, x_2) \rangle &= y_1x_1 + y_1x_2 + y_2x_1 + 5y_2x_2 \\ &= x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 5x_2y_2 \\ &= \langle (x_1, x_2) | (y_1, y_2) \rangle. \end{aligned}$$

De plus, on a $\langle (x_1, x_2) | (x_1, x_2) \rangle = x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + 4x_2^2 \geq 0$ donc on a la positivité.

Enfin, si $\langle (x_1, x_2) | (x_1, x_2) \rangle = x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + 4x_2^2 = 0$, alors $x_2 = 0$ et $x_1 + x_2 = 0$, soit $x_1 = 0$, l'application est donc définie.

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ est donc un produit scalaire, et N dérive de ce produit scalaire, c'est donc une norme.



Exercice 9.2 (Norme d'algèbre) ★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application

$$N : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \longmapsto n \cdot \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|.$$

Justifier que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

Solution

$N = n \cdot \|\cdot\|_\infty$, où $\|\cdot\|_\infty$ est la norme infinie sur les matrices (le plus grand coefficient en valeur absolue). Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$, $B = [b_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$ et $C = [c_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$. On a, pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$. Donc

$$|c_{i,j}| \leq \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| |b_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^n \|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty = n \cdot \|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty = \frac{1}{n} N(A) N(B).$$

En passant au Max à gauche, on a $\|AB\|_\infty \leq \frac{1}{n} N(A) N(B)$, soit, en multipliant à gauche par n , $N(AB) \leq N(A) N(B)$.

■

Exercice 9.3 (Invariance par conjugaison) ★★

Q1 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Trouver une matrice P , diagonale et inversible telle que $P^{-1}AP = 2A$.

Q2 - Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $\|P^{-1}AP\| = \|A\|$?

Solution

Q1 - Si P est inversible et diagonale, alors on peut écrire

$$P = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & (0) \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \alpha_n \end{bmatrix},$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \neq 0$. De plus, on a $P^{-1}AP = 2A \iff AP = 2PA$, soit, matriciellement,

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & (0) \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha_1 & & & (0) \\ & 2\alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 2\alpha_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

soit, en multipliant les matrices de part et d'autre de l'égalité,

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 2\alpha_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donc $2\alpha_1 = \alpha_n$ est la seule condition. Prenons alors

$$P = \begin{bmatrix} 1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ (0) & & & 2 \end{bmatrix}$$

Q2 - Prenons A et P les matrices de la question précédente. Si une telle norme existe, alors $\|P^{-1}AP\| = \|A\|$, mais comme $P^{-1}AP = 2A$, on a $\|2A\| = \|A\|$, ce qui est impossible car nous ne respectons pas la condition d'homogénéité. Une telle norme n'existe donc pas.

■

9.2 Suites

Exercice 9.4 (Suites réelles sommables) ★ ★ ★

On note $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel (réel) des suites sommables sur $\mathbb{N}$ à valeurs réelles. Autrement dit,

$$\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \left\{ (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| < +\infty \right\}.$$

Q1 - Montrer que l'application $\|\cdot\|_{\ell^1} : (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$ définit une norme sur $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Q2 - Montrer que l'application

$$\begin{aligned} N : \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (u_k)_{k \in \mathbb{N}} &\longmapsto |u_0| + \sum_{k=0}^{+\infty} |u_{k+1} - u_k| \end{aligned}$$

est bien définie et est une norme sur $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Q3 - $\|\cdot\|_{\ell^1}$ et N sont-elles équivalentes sur $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$?

Indication: On pourra considérer les suites $u^{(n)} = \left(e^{-\frac{k}{n}}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^$.*

Solution

Q1 - Par définition de $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $\|\cdot\|_{\ell^1}$ est bien définie. Montrons que c'est une norme. Soient $u = (u_k)_{k \in \mathbb{N}}, v = (v_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Homogénéité: Comme $\lambda u = (\lambda u_k)_{k \in \mathbb{N}}$, par multiplicativité de la valeur absolue, on a $\|\lambda u\|_{\ell^1} = \sum_{k=0}^{+\infty} |\lambda u_k| = |\lambda| \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| = |\lambda| \|u\|_{\ell^1}$. La linéarité de la somme assure donc que $\|\lambda u\|_{\ell^1} = |\lambda| \cdot \|u\|_{\ell^1}$.
- Inégalité triangulaire: Comme $u + v = (u_k + v_k)_{k \in \mathbb{N}}$, l'inégalité triangulaire sur la valeur absolue assure que $\|u + v\|_{\ell^1} = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k + v_k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} [|u_k| + |v_k|] = \|u\|_{\ell^1} + \|v\|_{\ell^1}$. Finalement, la linéarité de la somme assure que $\|u + v\|_{\ell^1} \leq \|u\|_{\ell^1} + \|v\|_{\ell^1}$.
- Séparation: Si $\|u\|_{\ell^1} = 0$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|u_k| = 0$, soit $u_k = 0$, ce qui conclut.

Q2 - Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $u = (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. On a

$$|u_0| + \sum_{k=0}^{n_0} |u_{k+1} - u_k| \leq |u_0| + \sum_{k=0}^{n_0} |u_{k+1}| + \sum_{k=0}^{n_0} |u_k| = 2 \sum_{k=0}^{n_0} |u_k| \leq 2 \|u\|_{\ell^1}.$$

Donc, lorsque l'on fait tendre n_0 vers $+\infty$ à gauche, on a $N(u) < +\infty$. N est donc bien définie sur $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Montrons que c'est une norme. Soient $u = (u_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $v = (v_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Homogénéité: Comme $\lambda u = (\lambda u_k)_{k \in \mathbb{N}}$, par multiplicativité de la valeur absolue, on a $N(u) = |\lambda| |u_0| + \sum_{k=0}^{+\infty} |\lambda| |u_{k+1} - u_k|$. La linéarité de la somme assure donc que $N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$.
- Inégalité triangulaire: Comme $u + v = (u_k + v_k)_{k \in \mathbb{N}}$, l'inégalité triangulaire sur la valeur absolue assure que, si $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |u_0 + v_0| + \sum_{k=0}^N |u_{k+1} + v_{k+1} - (u_k + v_k)| &\leq |u_0| + \sum_{k=0}^{n_0} |u_{k+1} - u_k| \\ &\quad + |v_0| + \sum_{k=0}^{n_0} |v_{k+1} - v_k| \\ &\leq N(u) + N(v). \end{aligned}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient donc l'inégalité triangulaire avec N .

- Séparation: Si $N(u) = 0$, alors $u_k = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} - u_k = 0$, soit $u_k = 0$, ce qui conclut.

Q3 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Considérons la suite (paramétrée par n) $u^{(n)} = \left(e^{-\frac{k}{n}}\right)_{k \in \mathbb{N}}$. C'est une suite géométrique de raison $e^{-\frac{1}{n}} < 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^{(n)} \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. On a ainsi

$$\|u^{(n)}\|_{\ell^1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^k = \frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{n}}},$$

De plus, on a

$$N(u^{(n)}) = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \left|e^{-\frac{k+1}{n}} - e^{-\frac{k}{n}}\right| = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\frac{k}{n}} \left|e^{-\frac{1}{n}} - 1\right| = 1 + \left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right) \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\frac{k}{n}},$$

soit $N(u^{(n)}) = 2$. Si N et $\|\cdot\|_{\ell^1}$ sont équivalentes, alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute suite $u \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $\|u\|_{\ell^1} \leq CN(u)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u^{(n)}\|_{\ell^1} \leq CN(u^{(n)})$ i.e. $\frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{n}}} \leq 2C$. Or, le membre de gauche tend vers $+\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, ce qui aboutit à une contradiction. Les deux normes ne sont donc pas équivalentes. ■

9.3 Espaces de fonctions

Exercice 9.5 (Une Norme 1 sur les fonctions de classe C^1) ★★

On considère le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ ainsi que les applications

$$N_1 : E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad N_2 : E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f \longmapsto |f(0)| + \|f'\|_\infty \quad \quad f \longmapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty .$$

Q1 - Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E .

Q2 - Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes.

Q3 - N_1 et N_2 sont-elles équivalentes à $\|\cdot\|_\infty$?

Indication: On pourra considérer les fonctions $f_n : x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution

Q1 - Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g \in E$. Montrons que N_1 et N_2 sont des normes.

- Homogénéité et Inégalité triangulaire: Découlent directement de la multiplicativité de la valeur absolue (en fait homogénéité de la norme $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}$), l'homogénéité de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$ et de l'inégalité triangulaire sur la valeur absolue et $\|\cdot\|_\infty$.
- Séparation: Si $N_1(f) = 0$, alors $f' = 0$ sur $[0, 1]$, f est donc constante sur $[0, 1]$, égale à $f(0) = 0$. Donc $f = 0$ sur $[0, 1]$. De plus, si $N_2(f) = 0$, alors $\|f\|_\infty = 0$, donc $f = 0$ sur $[0, 1]$.

Q2 - Soit $f \in E$. On a $|f(0)| \leq \|f\|_\infty$, donc $N_1(f) \leq N_2(f)$.

De plus, si $x \in [0, 1]$, on a $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$. En passant à la valeur absolue, l'inégalité triangulaire (sur les réels et sur une intégrale) assure que

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)| dt.$$

La croissance de $x \mapsto \int_0^x |f'(t)| dt$ donne $|f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt$. L'inégalité de la moyenne donne ainsi $|f(x)| \leq |f(0)| + \|f'\|_\infty$. En passant au Sup à gauche, on a $\|f\|_\infty \leq |f(0)| + \|f'\|_\infty$. On a finalement $N_2(f) \leq |f(0)| + 2\|f'\|_\infty \leq 2N_1(f)$. Les deux normes sont bien équivalentes.

Q3 - Si N_1 et N_2 sont équivalentes à $\|\cdot\|_\infty$, alors ils existent deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que pour tout $f \in E$, $N_1(f) \leq C_1\|f\|_\infty$ et $N_2(f) \leq C_2\|f\|_\infty$.

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, la fonction $f_n \in E$ donnée par $f_n : x \mapsto x^n$. On a donc, pour tout $x \in [0, 1]$, $f'_n(x) = nx^{n-1}$. $N_1(f_n) = n$, $N_2(f_n) = n + 1$ et $\|f_n\|_\infty = 1$. Si N_1 et N_2 sont équivalentes à $\|\cdot\|_\infty$, alors les inégalités d'équivalence donnent, pour tout

$n \in \mathbb{N}$, $n \leq C_1$ et $n+1 \leq C_n$, ce qui est impossible car les membres de gauche ne sont pas bornés. Il n'y a donc pas d'équivalence.

Exercice 9.6 (Une norme 2 sur les fonctions de classe C^1) ★★

On considère le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ ainsi que l'application

$$N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f \longmapsto \left(f(0)^2 + \int_0^1 (f'(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Q1 - Montrer que N est une norme sur E .

Q2 - Montrer que pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$, où $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme de la convergence uniforme.

Q3 - Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

Indication: On pourra considérer les fonctions $f_n : x \mapsto x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution

Q1 - Considérons l'application

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) \longmapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$$

Le fait que $fg = gf$ ainsi que $f'g' = g'f'$ assurent que cette application est symétrique. De plus, la linéarité de la dérivation et de l'intégrale assurent que cette application est bilinéaire.

De plus, $\langle f | f \rangle = f(0)^2 + \int_0^1 (f'(t))^2 dt$. La positivité de l'intégrale assure que $\langle f | f \rangle \geq 0$, donnant la positivité. Enfin, si $\langle f | f \rangle = 0$, alors $f(0) = 0$ et, puisque $(f')^2$ est continue et d'intégrale nulle sur $[0, 1]$, elle est donc identiquement nulle sur $[0, 1]$, donc $f' = 0$ sur $[0, 1]$, f est donc constante, égale à $f(0) = 0$.

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ est donc un produit scalaire, et N est donc une norme dérivant de ce produit scalaire.

Q2 - Soit $x \in [0, 1]$. On a $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$. Le passage à la valeur absolue et l'inégalité triangulaire assurent que $|f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|dt$. Sur l'intégrale, l'inégalité de Cauchy-Schwarz (appliquée aux fonctions 1 et f') donne

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \left(\int_0^x f'(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Enfin, l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathbb{R}^2$ donne

$$|f(x)| \leq \sqrt{2} \left(f(0)^2 + \int_0^x f'(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} N(f).$$

En passant au Sup à gauche sur $[0, 1]$, on a le résultat souhaité.

Q3 - Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^n. \end{aligned}$$

On a ainsi

$$N(f_n) = \left(\int_0^1 n^2 t^{2(n-1)} dt \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{n}{\sqrt{2n-1}} \quad \text{et} \quad \|f_n\|_\infty = 1.$$

Si les deux normes sont équivalentes, alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in E$, $N(f) \leq C \|f\|_\infty$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N(f_n) \leq C \|f_n\|_\infty$, soit $\frac{n}{\sqrt{2n-1}} \leq C$. Or, la suite de gauche tend vers $+\infty$, ce qui est absurde. Les deux normes ne sont donc pas équivalentes.

■

9.4 Polynômes

Exercice 9.7 (Norme à paramètre sur les polynômes) ★★

Soient $a \geq 0$. On définit l'application

$$\begin{aligned} N_a : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ P &\longmapsto |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| dt. \end{aligned}$$

Q1 - Montrer que N_a est une norme.

Q2 - Montrer que si $a, b \geq 0$ tels que $a < b$ et $b > 1$, alors N_a et N_b ne sont pas équivalentes.

Q3 - Montrer que pour tous $a, b \in [0, 1]$, N_a et N_b sont bien équivalentes.

Solution

Q1 - Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

- Homogénéité: Puisque $(\lambda P)(X) = \lambda P(X)$ et $(\lambda P)'(X) = \lambda P'(X)$, on a ainsi (par multiplicativité de la valeur absolue) $N_a(\lambda P) = |\lambda| |P(a)| + \int_0^1 |\lambda| |P'(t)| dt$. La linéarité de l'intégrale assure ainsi que $N_a(\lambda P) = |\lambda| N_a(P)$.
- Inégalité triangulaire: Puisque $(P+Q)(X) = P(X)+Q(X)$ et $(P+Q)'(X) = P'(X)+Q'(X)$, on a $N_a(P+Q) = |P(a)+Q(a)| + \int_0^1 |P'(t)+Q'(t)| dt$. Par inégalité triangulaire sur la valeur absolue et croissance de l'intégrale, on a $N_a(P+Q) \leq N_a(P) + N_a(Q)$.
- Séparation: Si $N_a(P) = 0$, alors, puisque la fonction $t \mapsto |P'(t)|$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0, 1]$, donc, pour tout $t \in [0, 1]$, $P'(t) = 0$ donc $P(t) = P(0) = 0$. P a un nombre infini de racines, donc est nul. $P = 0$.

Q2 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prenons $P_n = X^n$. On a $N_a(P_n) = a^n + n \int_0^1 t^{n-1} dt = a^n + 1$. De la même manière, $N_b(P_n) = b^n + 1$. Si N_a et N_b sont équivalentes, alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $N_b(P) \leq C N_a(P)$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $N_b(P_n) \leq C N_a(P_n)$, soit $1 + \frac{1}{b^n} \leq C \left[\left(\frac{a}{b} \right)^n + \frac{1}{b^n} \right]$. Le membre de gauche tend vers 1 tandis que celui de droite tend vers 0. Contradiction. Les normes ne sont pas équivalentes.

Q3 - Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $b \geq a$, alors puisque $P(b) = P(a) + \int_a^b P'(t) dt$, on obtient

$$N_a(P) \leq |P(b)| + \int_a^b |P'(t)| dt + \int_0^1 |P'(t)| dt \leq |P(b)| + 2 \int_0^1 |P'(t)| dt,$$

soit $N_a(P) \leq 2N_b(P)$. On procède de la même manière si $b \leq a$ (en échangeant les bornes d'intégration) et arrive au même résultat.

De même, en échangeant a et b , on a $N_b(P) \leq 2N_a(P)$. On a donc

$$\frac{1}{2} N_b(P) \leq N_a(P) \leq 2 N_b(P)$$

.

Les deux normes sont équivalentes.

■

Exercice 9.8 (Normes infinie et avec dérivation sur les polynômes) ★★

On considère les applications

$$N_1 : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad P \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} |P^{(n)}(0)| \quad \text{et} \quad N_2 : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad P \longmapsto \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|.$$

Q1 - Montrer que N_1 et N_2 sont bien définies et sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

Q2 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \frac{1}{n}X^n$. Calculer $N_1(P_n)$ et $N_2(P_n)$.

Q3 - Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Solution

Q1 - Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. P étant un polynôme, $P^{(n)} = 0$ est nul pour n assez grand, donc $|N_1(P)| < +\infty$. De plus, la fonction $t \mapsto P(t)$ est continue (car polynomiale), elle admet un maximum sur $[-1, 1]$, donc $|N_2(P)| < +\infty$. N_1 et N_2 sont bien définies, montrons que ce sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

- Homogénéité: Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda P)^{(n)}(X) = \lambda P^{(n)}(X)$, on a, par multiplicativité de la valeur absolue, $N_1(\lambda P) = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda| |P^{(n)}(0)|$. La linéarité de la somme assure donc que $N_1(\lambda P) = |\lambda| N_1(P)$.

De plus, si $t \in [-1, 1]$, alors $|\lambda P(t)| = |\lambda| |P(t)| \leq |\lambda| N_2(P)$, donc, en passant au Sup à gauche, on a $N_2(\lambda P) \leq |\lambda| N_2(P)$. De plus, si $\lambda \neq 0$, alors $|P(t)| = \frac{1}{|\lambda|} |\lambda P(t)| \leq \frac{1}{|\lambda|} N_2(\lambda P)$. En passant au Sup à gauche et en multipliant par $|\lambda|$, on a $|\lambda| N_2(P) \leq N_2(\lambda P)$. L'inégalité restant vraie pour $\lambda = 0$, cela montre bien que $N_2(\lambda P) = |\lambda| N_2(P)$.

- Inégalité triangulaire: Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(P + Q)^{(n)}(X) = P^{(n)}(X) + Q^{(n)}(X)$, on a, par inégalité triangulaire sur la valeur absolue, $N_1(P + Q) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} [|P^{(n)}(0)| + |Q^{(n)}(0)|]$. La linéarité de la somme assure que $N_1(P + Q) \leq N_1(P) + N_1(Q)$.

De plus, si $t \in [-1, 1]$, alors $|P(t) + Q(t)| \leq |P(t)| + |Q(t)| \leq N_2(P) + N_2(Q)$. En passant au Sup à gauche, on a $N_2(P + Q) \leq N_2(P) + N_2(Q)$.

- Séparation: Si $N_1(P) = 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P^{(n)}(0) = 0$. Or, le coefficient de degré n vaut $\frac{P^{(n)}(0)}{n!}$, donc est nul. Les coefficients de P sont tous nuls, P est donc nul.

Si $N_2(P) = 0$, alors pour tout $t \in [-1, 1]$, $P(t) = 0$. P a un nombre infini de racines, donc est nul.

Q2 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)} = (n-1) \cdots (n-k+1)X^{n-k}$. Donc si $k \neq n$, $P_n^{(k)}(0) = 0$ et $P_n^{(n)}(0) = (n-1)!$, donc $N_1(P_n) = (n-1)!$.

De plus, $N_2(P_n) = N_2(X^n) = \frac{1}{n}$.

Q3 - Si N_1 et N_2 sont équivalentes, alors il existe $C > 0$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $N_1(P) \leq CN_2(P)$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N_1(P_n) \leq CN_2(P_n)$ soit $(n-1)! \leq \frac{C}{n}$. Or, le membre de gauche tend vers $+\infty$, celui de droite vers 0. Contradiction, les deux normes ne sont donc pas équivalentes.

■

Exercice 9.9 (Une condition pour avoir une norme sur les polynômes) ★ ★ ★

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_A : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ P &\longmapsto \sup_{x \in A} |P(x)|. \end{aligned}$$

1. Montrer que pour que $\|\cdot\|_A$ soit bien définie, A doit-être nécessairement bornée.
2. Que dire de $\|\cdot\|_A$ si A est finie ?
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A pour que $\|\cdot\|_A$ définisse une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

Solution

1. Si A n'est pas bornée, alors, en prenant le polynôme $P = X$, $\|X\|_A = \sup_{x \in A} |x| = +\infty$. Si A est bornée, alors il existe $M > 0$ tel que $A \subseteq [-M, M]$. On a, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\|P\|_A = \sup_{x \in A} |P(x)| \leq \sup_{x \in [-M, M]} |P(x)| < +\infty,$$

donc $\|\cdot\|_A$ est bien définie.

2. Si A est finie, alors on peut écrire $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ pour un certain entier naturel n . Si $P = (X - a_1) \cdots (X - a_n)$, alors $\|P\|_A = 0$. Pourtant, $P \neq 0$, donc on n'a pas la propriété de séparation. $\|\cdot\|_A$ n'est pas une norme.
3. Montrons que $\|\cdot\|_A$ est une norme si et seulement si A est une partie infinie bornée de $\mathbb{R}$.

Si A n'est pas infinie bornée, A est donc soit finie, soit non bornée. Or, d'après les questions précédentes, $\|\cdot\|_A$ n'est pas une norme (cas où A est une partie finie) ou n'est pas définie (cas où A est une partie non bornée). $\|\cdot\|_A$ ne peut donc pas définir une norme.

Réciproquement, si A est infinie bornée, alors montrons que $\|\cdot\|_A$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

- Homogénéité: Soit $x \in A$. $|\lambda P(x)| = |\lambda| |P(x)| \leq |\lambda| \|P\|_A$, donc, en passant au Sup à gauche, on a $\|\lambda P\|_A \leq |\lambda| \cdot \|P\|_A$. De plus, si $\lambda \neq 0$, alors $\frac{1}{|\lambda|} |\lambda P(x)| \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda P\|_A$. En passant au Sup à gauche et en multipliant par $|\lambda|$, on a $|\lambda| \cdot \|P\|_A \leq \|\lambda P\|_A$. Cette inégalité reste vraie si $\lambda = 0$. On a donc $\|\lambda P\|_A = |\lambda| \cdot \|P\|_A$.
- Inégalité triangulaire: Soit $x \in A$. On a

$$|P(x) + Q(x)| \leq |P(x)| + |Q(x)| \leq \|P\|_A + \|Q\|_A$$

.

En passant au Sup à gauche, on a $\|P + Q\|_A \leq \|P\|_A + \|Q\|_A$.

- Séparation: Si $\|P\|_A = 0$, alors pour tout $x \in A$, $P(x) = 0$. Comme A est infinie, P possède un nombre infini de racines, donc $P = 0$.

■

Chapitre 10

Séries entières

10.1 Calcul de rayon de convergence

Exercice 10.1 (Calcul de rayon de convergence) ★

Calculer le rayon de convergence pour chacune des séries entières suivantes.

$$Q1 - \sum_{n \geq 0} \frac{n!}{(2n)!} z^n \quad Q2 - \sum_{n \geq 1} (\ln n) z^n \quad Q3 - \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n + n} z^n$$

Solution

Q1 - Soit $n \geq 0$. On a, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{(n+1)!|z|^{n+1}}{(2n+2)!} \times \frac{(2n)!}{n!|z|^n} = \frac{n}{(2n+2)(2n+1)}|z| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc, par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence est infini.

Q2 - Soit $n \geq 2$. On a, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{\ln(n+1)|z|^{n+1}}{\ln(n)|z|^n} = \frac{\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}|z| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |z|,$$

donc, par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence est 1.

Q3 - Soit $n \geq 0$. On a, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{|z|^{n+1}}{2^{n+1} + n + 1} \times \frac{2^n + n}{|z|^n} = \frac{2^n + n}{2^{n+1} + n + 1}|z| = \frac{1 + \frac{n}{2^n}}{2 + \frac{n+1}{2^n}}|z| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{|z|}{2},$$

donc, par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence est 2.



10.2 Manipulation de séries entières

Exercice 10.2 (Une inégalité) ★

Q1 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n n! \leq (2n)!$.

Q2 - En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) \leq e^{\frac{x^2}{2}}$.

Solution

Q1 - Montrons cette inégalité par récurrence.

- Initialisation: Si $n = 0$, alors $2^0 \cdot 0! = 1 \leq 1 = (2 \cdot 0)!$.
- Hérédité: Supposons la formule vraie pour un entier n : $2^n n! \leq (2n)!$. Comme on a $2^{n+1}(n+1)! = 2(n+1) \cdot 2^n n!$, l'hypothèse de récurrence assure que $2^{n+1}(n+1)! \leq 2(n+1)(2n)! = (2n+2)(2n)! \leq (2n+2)(2n+1)(2n)! = (2(n+1))!$, ce qui conclut.

Q2 - Soit $x \in \mathbb{R}$. ch et $x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}}$ sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$ (somme de deux série exponentielles pour la première fonction et exponentielle d'un polynôme pour la seconde fonction). On a

$$\begin{aligned} \text{ch}(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n + (-x)^n}{n!} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{x^n + (-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n n! \leq (2n)!$, donc on a

$$\text{ch}(x) \geq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^n = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

■

Exercice 10.3 (Estimation de Cauchy & Théorème de Liouville) ★★

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Soit $r \in]0, R[$.

Q1 - Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série de fonctions $\theta \mapsto \sum_{n \geq 0} a_n r^n e^{i(n-k)\theta}$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$.

Q2 - En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \frac{1}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta$.

Q3 - On suppose que $R = +\infty$. Montrer que si la fonction f est bornée sur $\mathbb{C}$ alors elle est constante.

Solution

Q1 - Soient $k, n \in \mathbb{N}$. On a $\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |a_n r^n e^{i(n-k)\theta}| = |a_n| r^n$. On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n \geq 0} \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |a_n r^n e^{i(n-k)\theta}| = \sum_{n \geq 0} |a_n| r^n.$$

Comme $r \in]0, R[$, par définition du rayon de convergence, la série $\sum_{n \geq 0} |a_n| r^n$ converge,

ainsi, la série $\sum_{n \geq 0} \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |a_n r^n e^{i(n-k)\theta}|$ converge normalement.

Q2 - Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \geq 0} \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |a_n r^n e^{i(n-k)\theta}|$ converge normalement (donc uniformément), le théorème d'interversion de série et d'intégrale sur un segment assure que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{i(n-k)\theta} \right) d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} a_n r^n e^{i(n-k)\theta} d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta.$$

D'une part, on a

$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta} \right) e^{-ik\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{i(n-k)\theta} \right) d\theta.$$

D'autre part, si $n = k$, alors $\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$. Si $n \neq k$, alors

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta = \left[\frac{e^{i(n-k)\theta}}{n-k} \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0.$$

On a ainsi, pour $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta = 2\pi a_k r^k$, ce qui conclut.

Q3 - Si $R = +\infty$, alors, si f est bornée sur $\mathbb{C}$, il existe $M > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq M$. Ainsi, pour tous $r > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$,

$$|a_k| \leq \frac{1}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| |e^{-ik\theta}| d\theta = \frac{1}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} M d\theta = \frac{M}{r^k}.$$

En faisant tendre r vers $+\infty$, on a $a_k = 0$, donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = a_0$. f est donc constante sur $\mathbb{C}$.

Exercice 10.4 (Calcul d'une série entière) ★★

Q1 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\prod_{j=0}^{n-1} (1 + 2j) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

Q2 - Soit f la fonction définie pour tout $x \in]-1, 1[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. Ecrire f comme le produit des fonctions $x \mapsto 1+x$ et g , où g est une fonction que l'on précisera.

Q3 - En déduire le développement en série entière de f sur $] -1, 1[$.

Solution

Q1 - Par convention sur les produits, $\prod_{j=0}^{-1} (2j+1) = 1 = \frac{(2 \cdot 0)!}{2^0 \cdot 0!}$. Montrons le résultat par récurrence sur $n > 0$:

- Initialisation: On a, si $n = 1$, $\prod_{j=0}^0 (2j+1) = 1 = \frac{(2 \cdot 1)!}{2^1 \cdot 1!}$.

- Supposons le résultat vrai pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, montrons que la formule est vraie au rang $n+1$. On a ainsi $\prod_{j=0}^n (2j+1) = (2n+1) \prod_{j=0}^{n-1} (2j+1)$. L'hypothèse de récurrence assure donc que

$$\prod_{j=0}^n (2j+1) = (2n+1) \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{2(n+1)2^n n!} = \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!},$$

ce qui conclut.

Q2 - Soit $x \in]-1, 1[$. On a $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}$ après multiplication au numérateur et au dénominateur par $1+x$. Ainsi, pour tout $x \in]-1, 1[$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Q3 - $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ sont développables en série entière sur $] -1, 1[$, donc f l'est aussi. On a donc, pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (1+x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \\
 &= (1+x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}-1\right) \cdots \left(-\frac{1}{2}-n+1\right) (-x^2)^n \\
 &= (1+x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[\prod_{j=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}-j\right) \right] x^{2n} \\
 &= (1+x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[\prod_{j=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right) (1+2j) \right] x^{2n} \\
 &= (1+x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left[\prod_{j=0}^{n-1} (1+2j) \right] x^{2n} \\
 &= (1+x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!} \left[\prod_{j=0}^{n-1} (1+2j) \right] x^{2n}.
 \end{aligned}$$

D'après la question 1, on peut réécrire le produit à l'intérieur du crochet, donnant donc, pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$f(x) = (1+x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!} \left[\frac{(2n)!}{2^n n!} \right] x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} (x^{2n} + x^{2n+1})$$

■

10.3 Lien avec une équation différentielle

Exercice 10.5 (Recherche de la solution d'une équation différentielle) ★★

On considère l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y'' + xy' + y = 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Q1 - Supposons qu'il existe une solution à cette équation différentielle développable en série entière $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence strictement positif. Trouver une relation de récurrence sur la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Q2 - Calculer a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quel est le rayon de convergence de f .

Q3 - Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Solution

Q1 - Soit f une solution de l'équation. On a, pour $x \in]-R, R[$, où R désigne le rayon de convergence de la série entière,

$$\begin{aligned}
 & f''(x) + xf'(x) + f(x) = 1 \\
 \Leftrightarrow & \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1 \\
 \Leftrightarrow & \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1 \\
 \Leftrightarrow & \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} x^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_n x^n = 1 \\
 \Leftrightarrow & \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) [(n+2)a_{n+2} + a_n] x^n = 1.
 \end{aligned}$$

En identifiant les termes de cette égalité (termes égaux devant chaque puissance de x), on a $2a_2 + a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+2} = \frac{-1}{n+2}a_n$.

Q2 - f étant solution, on a $f(0) = f'(0) = 0$, soit $a_0 = a_1 = 0$. La relation $2a_2 + a_0 = 1$ donne donc $a_2 = \frac{1}{2}$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+1} = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_{2k+2} = \frac{-1}{2(k+1)}a_{2k}$.

On obtient donc

$$\begin{aligned}
 a_{2k} &= \left(\frac{-1}{2k}\right) \times \left(\frac{-1}{2(k-1)}\right) \times \cdots \times \left(\frac{-1}{2 \cdot 2}\right) a_2 \\
 &= \left(\frac{-1}{2k}\right) \times \left(\frac{-1}{2(k-1)}\right) \times \cdots \times \left(\frac{-1}{2 \cdot 2}\right) \times \frac{1}{2} \\
 &= \frac{(-1)^{k+1}}{2^k k!}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, on a, pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n}$. Pour tout $r > 0$, la suite

$\left(\frac{r^{2n}}{2^n n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, le rayon de convergence de cette série entière est donc infini.

Q3 - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-x^2}{2}\right)^n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-x^2}{2}\right)^n = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

et $f'(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}}$, $f''(x) = (1 - x^2) e^{-\frac{x^2}{2}}$. Ainsi, on a bien

$$f''(x) + x f'(x) + f(x) = (1 - x^2) e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} + 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} = 1.$$



Exercice 10.6 (Méthode de l'équation différentielle) ★★

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \end{aligned}$$

Q1 - Etudier la parité de f .

Q2 - Montrer que f est développable en série entière avec rayon de convergence infini et est solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' - xy = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Q3 - En déduire le développement en série entière de f .

Solution

Q1 - Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(-x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Le changement de variable $t = -s$ assure que $\int_0^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\int_0^x e^{-\frac{s^2}{2}} ds$, donnant ainsi $f(-x) = -f(x)$. f est impaire sur $\mathbb{R}$.

Q2 - Les fonction $x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}}$ et $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$ (leur rayon de convergence est infini). Par primitivation, la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Par produit, f est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$ (rayon de convergence infini).

De plus, f étant régulière sur $\mathbb{R}$ (car développable en série entière), on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + x e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, soit $f'(x) = 1 + x f(x)$, de plus, $f(0) = 0$, donc f est bien solution de l'équation différentielle demandée.

Q3 - f étant impaire et développable en série entière sur $\mathbb{R}$, on peut écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$. A l'aide de l'équation différentielle, on va trouver une relation de récurrence sur la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On a ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f'(x) - xf(x) = 1 &\iff \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)a_n x^{2n} - x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1} = 1 \\
&\iff \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)a_n x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+2} = 1 \\
&\iff a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (2n+1)a_n x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+2} = 1 \\
&\iff a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+3)a_{n+1} x^{2n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+2} = 1 \\
&\iff a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} [(2n+3)a_{n+1} - a_n] x^{2n+2} = 1.
\end{aligned}$$

Par identification des coefficients devant chaque puissance de x , on a $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2n+3}a_n$. On a ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(\frac{1}{2n+1}\right) \times \left(\frac{1}{2n-1}\right) \times \cdots \times \left(\frac{1}{2 \cdot 1 + 1}\right) a_0 \\
&= \frac{(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times (2 \cdot 1)}{(2n+1) \times (2n) \times (2n-1) \times (2n-2) \times \cdots \times (2 \cdot 1 + 1) \times (2 \cdot 1)} \\
&= \frac{(2n) \times (2 \cdot (n-1)) \times \cdots \times (2 \cdot 1)}{(2n+1) \times (2n) \times (2n-1) \times (2n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1} \\
&= \frac{2^n \times n \times (n-1) \times \cdots \times 1}{(2n+1)!} \\
&= \frac{2^n \cdot n!}{(2n+1)!}.
\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

■

10.4 Séries entières abstraites

Exercice 10.7 (Modification du rayon de convergence) ★★

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière, de rayon de convergence $R > 0$.

Q1 - Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$?

Q2 - On suppose que pour tout $n \geq 0$, $a_n > 0$. Soit $\alpha > 0$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n^\alpha x^n$?

Solution

Q1 - Par définition du rayon de convergence, pour tout $r \in]0, R[$, la suite $(|a_n| r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| r^n \leq C$. Soit $\rho > 0$. On a ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{|a_n|}{n!} \rho^n = |a_n| r^n \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \frac{1}{n!} \leq \frac{C}{n!} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n.$$

Le terme à droite de l'inégalité est de limite nulle (par croissance comparée) donc est borné. La suite $\left(\frac{|a_n|}{n!} \rho^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bornée, et ce pour tout $\rho > 0$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$ est donc infini.

Q2 - Par définition du rayon de convergence, pour tout $r \in]0, R[$, la suite $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n r^n \leq C$.

- Si $\rho \in]0, R^\alpha[$, alors $\rho^{\frac{1}{\alpha}} \in]0, R[$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n^\alpha \rho^n = \left(a_n \left(\rho^{\frac{1}{\alpha}}\right)^n\right)^\alpha \leq C^\alpha.$$

La suite $(a_n^\alpha \rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bornée pour tout $\rho \in]0, R^\alpha[$, donc le rayon de convergence est au moins R^α .

- De plus, si $\rho > R^\alpha$, alors $\rho^{\frac{1}{\alpha}} > R$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n^\alpha \rho^n = \left(a_n \left(\rho^{\frac{1}{\alpha}}\right)^n\right)^\alpha.$$

La suite $\left(a_n \left(\rho^{\frac{1}{\alpha}}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ n'étant pas bornée, la suite $(a_n^\alpha \rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc non-bornée. Le rayon de convergence est donc inférieur à R^α .

Ainsi, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n^\alpha x^n$ est donc R^α .

Exercice 10.8 (Suite des décimales d'un nombre) ★★

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des décimales de π . Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

Solution

Soit $n \in \mathbb{N}$. $a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$, donc, si $x \in \mathbb{R}$, $a_n |x|^n \leq 9|x|^n$. Si $|x| < 1$, alors la suite $(a_n |x|^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Donc le rayon de convergence est au moins égal à 1.

Comme π est un nombre irrationnel, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre a_n prend une infinité de fois la valeur $\{1, \dots, 9\}$ (ce n'est pas un nombre décimal), donc la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge (elle diverge même grossièrement). Donc le rayon de convergence vaut 1.

Chapitre 11

Espaces préhilbertiens réels I

11.1 Produit scalaire et orthogonalité

Exercice 11.1 (Hypothèse de linéarité supprimée) ★★

Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : E \rightarrow E$ une application (à priori non linéaire). On suppose que pour tous $x, y \in E$, $\langle f(x)|f(y) \rangle = \langle x|y \rangle$.

Q1 - Montrer que l'image d'une base orthonormée par f est une base orthonormée.

Q2 - Montrer que f est linéaire.

Solution

Q1 - Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormée de E , où $n \in \mathbb{N}^*$ est la dimension de E . Posons, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u_k = f(e_k)$. On a ainsi, pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\langle u_i|u_j \rangle = \langle f(e_i)|f(e_j) \rangle = \langle e_i|e_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

Ainsi, $\{u_1, \dots, u_n\}$ est une famille orthonormée de vecteurs non nuls de E (puisque f préserve le produit scalaire) de cardinal n , c'est donc une base orthonormée de E .

Q2 - Soit $x \in E$. Considérons une base orthonormée $\{e_1, \dots, e_n\}$ (qui existe bien car tout espace vectoriel admet une base que l'on peut orthonormaliser via l'algorithme de Gram-Schmidt). On a donc $x = \sum_{k=1}^n \langle x|e_k \rangle e_k$. Puisque $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ est aussi une base orthonormée de E , on a ainsi

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \langle f(x)|f(e_k) \rangle f(e_k) = \sum_{k=1}^n \langle x|e_k \rangle f(e_k).$$



Exercice 11.2 (Equation normale) ★★

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (où n et p sont deux entiers naturels non nuls) et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice colonne $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\|AX_0 - B\| = d(B, \text{Im}(A))$$

vérifie l'équation $A^T AX_0 = A^T B$, appelée *équation normale*.

Indication: On pourra s'aider en dessinant une figure.

Solution

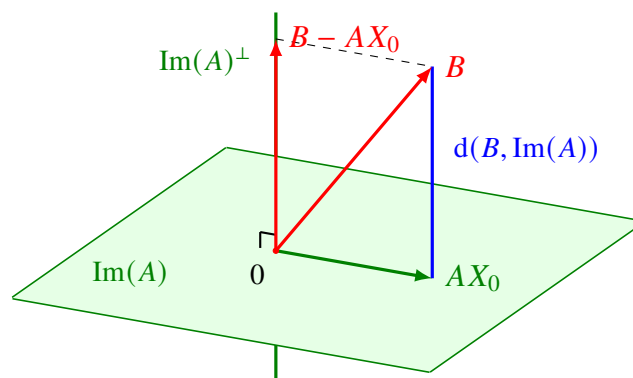
Soit $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. On a

$$\|AX_0 - B\|^2 = \min_{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})} \|AX - B\|^2.$$

De plus, $AX_0 - B \perp \text{Im}(A)$ (cf. image ci-dessous). Ainsi, pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$$\langle AX_0 - B | AX \rangle = (AX_0 - B)^T AX = 0,$$

soit, pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $(A^T(AX_0 - B))^T X = 0$. On obtient ainsi $A^T AX_0 - A^T B = 0$, ce qui correspond à l'équation normale.



Exercice 11.3 (Un espace qui est de dimension finie) ★★

Soient E un espace préhilbertien réel et $\{e_1, \dots, e_n\}$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) une famille de vecteurs de E de norme 1 telle que pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x | e_k \rangle^2$.

Q1 - Montrer que la famille $\{e_1, \dots, e_n\}$ est orthonormale.

Q2 - Montrer que E est de dimension n et que la famille $\{e_1, \dots, e_n\}$ est en fait une base (orthonormée) de E .

Solution

Q1 - Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Puisque l'on a $1 = \|e_i\|^2 = \|e_i\|^2 + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} \langle e_i | e_k \rangle^2$, on a ainsi pour tout $k \neq i$, $\langle e_i | e_k \rangle = 0$. La famille est donc orthogonale, et même orthonormée puisque les vecteurs sont unitaires.

Q2 - On a montré que la famille $\{e_1, \dots, e_n\}$ est orthonormée, elle est donc libre. Montrons qu'elle est génératrice dans E . Soient $x \in E$ et $y = \sum_{k=1}^n \langle x | e_k \rangle e_k$.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a $\langle y | e_i \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \langle x | e_k \rangle e_k \middle| e_i \right\rangle = \sum_{k=1}^n \langle x | e_k \rangle \langle e_k | e_i \rangle$. La famille $\{e_1, \dots, e_n\}$ étant orthonormée, on a finalement $\langle y | e_i \rangle = \langle x | e_i \rangle$, soit $\langle x - y | e_i \rangle = 0$.

Or, par hypothèse, on a $\|x - y\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x - y | e_k \rangle^2$, donc $\|x - y\|^2 = 0$, donc $x = y$. La famille $\{e_1, \dots, e_n\}$ est donc génératrice dans E , c'est donc une base de E .

■

Exercice 11.4 (Algorithme de Gram-Schmidt) ★ ★ ★

Orthogonaliser les familles de vecteurs suivantes à l'aide de l'algorithme de Gram-Schmidt après avoir montré que ce sont des bases de $\mathbb{R}^3$:

Q1 - $\{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$.

Q2 - $\{(0, 1, 1), (1, 0, -1), (1, -1, 0)\}$.

Q3 - $\{(0, 1, -1), (1, 0, 1), (1, -1, 0)\}$.

Solution

Q1 - Posons $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 0)$. En notant C la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a

$$\det_C \{u_1, u_2, u_3\} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est donc bien une base de $\mathbb{R}^3$. Orthonormalisons-la en une base orthonormée $\{e_1, e_2, e_3\}$.

(i) - Posons $v_1 = u_1$. On a ainsi $v_1 = (0, 1, 1)$ et $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ soit alors, puisque $\|v_1\| = \sqrt{2}$,

$$e_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

(ii) - Posons $v_2 = u_2 - \langle u_2 | e_1 \rangle e_1$, on obtient alors

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2 | v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = u_2 - \frac{1}{2} \langle u_2 | v_1 \rangle v_1,$$

soit

$$v_2 = (1, 0, 1) - \frac{1}{2}(0, 1, 1) = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

On a ainsi $e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$, soit alors, puisque $\|v_2\| = \sqrt{\frac{3}{2}}$,

$$e_2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

(iii) - Posons $v_3 = u_3 - \langle u_3 | e_1 \rangle e_1 - \langle u_3 | e_2 \rangle e_2$, on obtient alors

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3 | v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3 | v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 = u_3 - \frac{1}{2} \langle u_3 | v_1 \rangle v_1 - \frac{2}{3} \langle u_3 | v_2 \rangle v_2,$$

soit

$$v_3 = (1, 1, 0) - \frac{1}{2}(0, 1, 1) - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

On a ainsi $e_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}$, soit alors, puisque $\|v_3\| = \frac{2}{\sqrt{3}}$,

$$e_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Q2 - Posons $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 0)$. En notant C la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a

$$\det_C \{u_1, u_2, u_3\} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est donc bien une base de $\mathbb{R}^3$. Orthonormalisons-la en une base orthonormée $\{e_1, e_2, e_3\}$.

(i) - Posons $v_1 = u_1$. On a ainsi $v_1 = (0, 1, 1)$ et $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ soit alors, puisque $\|v_1\| = \sqrt{2}$,

$$e_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

(ii) - Posons $v_2 = u_2 - \langle u_2 | e_1 \rangle e_1$, on obtient alors

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2 | v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = u_2 - \frac{1}{2} \langle u_2 | v_1 \rangle v_1,$$

soit

$$v_2 = (1, 0, -1) + \frac{1}{2}(0, 1, 1) = \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

On a ainsi $e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$, soit alors, puisque $\|v_2\| = \sqrt{\frac{3}{2}}$,

$$e_2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

(iii) - Posons $v_3 = u_3 - \langle u_3 | e_1 \rangle e_1 - \langle u_3 | e_2 \rangle e_2$, on obtient alors

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3 | v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3 | v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 = u_3 - \frac{1}{2} \langle u_3 | v_1 \rangle v_1 - \frac{2}{3} \langle u_3 | v_2 \rangle v_2,$$

soit

$$v_3 = (1, -1, 0) - \frac{1}{2} \cdot (-1)(0, 1, 1) - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

On a ainsi $e_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}$, soit alors, puisque $\|v_3\| = \frac{2}{\sqrt{3}}$,

$$e_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Q3 - Posons $u_1 = (0, 1, -1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3 = (1, -1, 0)$. En notant C la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a

$$\det_C \{u_1, u_2, u_3\} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est donc bien une base de $\mathbb{R}^3$. Orthonormalisons-la en une base orthonormée $\{e_1, e_2, e_3\}$.

(i) - Posons $v_1 = u_1$. On a ainsi $v_1 = (0, 1, -1)$ et $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ soit alors, puisque $\|v_1\| = \sqrt{2}$,

$$e_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

(ii) - Posons $v_2 = u_2 - \langle u_2 | e_1 \rangle e_1$, on obtient alors

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2 | v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = u_2 + \frac{1}{2} \langle u_2 | v_1 \rangle v_1,$$

soit

$$v_2 = (1, 0, 1) + \frac{1}{2}(0, 1, -1) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

On a ainsi $e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$, soit alors, puisque $\|v_2\| = \sqrt{\frac{3}{2}}$,

$$e_2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right).$$

(iii) - Posons $v_3 = u_3 - \langle u_3 | e_1 \rangle e_1 - \langle u_3 | e_2 \rangle e_2$, on obtient alors

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3 | v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3 | v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 = u_3 - \frac{1}{2} \langle u_3 | v_1 \rangle v_1 - \frac{2}{3} \langle u_3 | v_2 \rangle v_2,$$

soit

$$v_3 = (1, -1, 0) - \frac{1}{2} \cdot (-1)(0, 1, -1) - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right).$$

On a ainsi $e_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}$, soit alors, puisque $\|v_3\| = \frac{2}{\sqrt{3}}$,

$$e_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

■

11.2 Adjoint d'un endomorphisme

Exercice 11.5 (Calcul de l'adjoint) ★

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien et $a, b \in E$. Déterminer l'adjoint de l'endomorphisme

$$\begin{aligned} u : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \langle a | x \rangle b - \langle b | x \rangle a \end{aligned}$$

Solution

Soient u^* l'adjoint de u et $x, y \in E$. Par définition d'endomorphisme adjoint, on a

$$\begin{aligned} \langle u^*(x) | y \rangle &= \langle x | \langle a | y \rangle b - \langle b | y \rangle a \rangle = \langle a | y \rangle \langle x | b \rangle - \langle b | y \rangle \langle x | a \rangle \\ &= \langle x | b \rangle \langle a | y \rangle - \langle x | a \rangle \langle b | y \rangle \\ &= \langle \langle x | b \rangle a - \langle x | a \rangle b | y \rangle = \langle \langle b | x \rangle a - \langle a | x \rangle b | y \rangle \\ &= \langle -u(x) | y \rangle. \end{aligned}$$

En prenant par exemple pour y chaque vecteur de la base canonique de E , on a donc $u^*(x) = -u(x)$, soit $u^* = -u$.

■

Exercice 11.6 (Adjoint de la multiplication par une matrice) ★

Soient $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace euclidien $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ donné pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\langle A | B \rangle = \text{Tr}(A^T B)$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère les endomorphismes de multiplication à gauche et à droite par M respectivement donnés par

$$G_M : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad D_M : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$X \longmapsto MX \quad \quad X \longmapsto XM.$$

Déterminer les adjoints de ces deux endomorphismes.

Solution

Soient G_M^* et D_M^* les adjoints respectifs de G_M et D_M et $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par définition d'endomorphisme adjoint, on a

$$\begin{aligned} \langle G_M^*(X) | Y \rangle &= \text{Tr}(X^T (MY)) \\ &= \text{Tr}(X^T MY) = \text{Tr}(X^T M^T Y) \\ &= \text{Tr}\left(\left(M^T X\right)^T Y\right) \\ &= \langle G_{M^T}(X) | Y \rangle. \end{aligned}$$

On a ainsi, si l'on teste Y avec toutes les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $G_M^*(X) = G_{M^T}(X)$, soit $G_M^* = G_{M^T}$.

De la même manière, on a

$$\begin{aligned} \langle D_M^*(X) | Y \rangle &= \text{Tr}(X^T (YM)) = \text{Tr}\left(\left(X^T Y\right) M\right) \\ &= \text{Tr}\left(M \left(X^T Y\right)\right) = \text{Tr}\left(\left(M X^T\right) Y\right) \\ &= \text{Tr}\left(\left(X M^T\right)^T Y\right) \\ &= \langle D_{M^T}(X) | Y \rangle. \end{aligned}$$

De la même manière, on a $D_M^* = D_{M^T}$.



Exercice 11.7 (Adjoint d'un polynôme d'endomorphisme) ★★

Soient E un espace euclidien (muni du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$) et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Q1 - Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $P(u)^* = P(u^*)$

Q2 - Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes premiers entre eux. Montrer que $\text{Ker}(P(u)) \perp \text{Ker}(Q(u^*))$.

Solution

Q1 - Ecrivons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, où $n = \deg(P)$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. On a ainsi

$$\begin{aligned}
 P(u)^* &= (a_0 Id + a_1 u + \dots + a_n u \circ \dots \circ u)^* \\
 &= a_0 Id^* + a_1 u^* + \dots + a_n (u \circ \dots \circ u)^* \\
 &= a_0 Id + a_1 u^* + \dots + a_n (u^* \circ \dots \circ u^*) \\
 &= a_0 Id + a_1 u^* + \dots + a_n (u^*)^n \\
 &= P(u^*).
 \end{aligned}$$

Q2 - Puisque $P \wedge Q = 1$, alors ils existent $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $AP + BQ = 1$.

Soit $x \in \text{Ker}(P(u))$. On a $P(u)(x) = 0$, donc

$$x = A(u)(P(u)(x)) + B(u)(Q(u)(x)) = B(u)(Q(u)(x)).$$

Soit $y \in \text{Ker}(Q(u^*))$. On a donc

$$\begin{aligned}
 \langle x|y \rangle &= \langle B(u)(Q(u)(x))|y \rangle \\
 &= \langle Q(u)(B(u)(x))|y \rangle \\
 &= \langle B(u)(x)|Q(u)^*(y) \rangle \\
 &= \langle B(u)(x)|Q(u^*)(y) \rangle \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

■

11.3 Matrices orthogonales**Exercice 11.8 (Factorisation QR) ★★**

Q1 - Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{C}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ obtenue à partir de $\mathcal{B}$ via l'algorithme de Gram-Schmidt. Montrer que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ est triangulaire supérieure et inversible.

Q2 - Montrer que pour tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$, ils existent une matrice triangulaire supérieure inversible R et une matrice orthogonale Q telles que $A = QR$.

Solution

Q1 - Notons $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $\mathcal{C} = \{e_1, \dots, e_n\}$. L'algorithme de Gram-Schmidt assure que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$e_k = \begin{cases} \pm \frac{x_1}{\|x_1\|} & \text{si } k = 1 \\ \pm \frac{x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_j | e_j \rangle e_j}{\left\| x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_j | e_j \rangle e_j \right\|} & \text{si } k > 2 \end{cases}.$$

Or, pour tout $j < k$, $e_j \in \text{Vect}\{x_1, \dots, x_j\}$, donc pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e_k \in \text{Vect}\{x_1, \dots, x_k\}$. Donc $P_{\mathcal{B}}^C$ est triangulaire supérieure.

De plus, en notant a_k le k -ième coefficient diagonal de $P_{\mathcal{B}}^C$, on a

$$a_k = \begin{cases} \pm \frac{1}{\|x_1\|} & \text{si } k = 1 \\ \pm \frac{1}{\left\| x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_j | e_j \rangle e_j \right\|} & \text{si } k > 2 \end{cases}.$$

donc $a_k \neq 0$, donc $P_{\mathcal{B}}^C$ est inversible.

Q2 - Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Notons $x_1, \dots, x_n$ les colonnes de A^{-1} . $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Notons $\mathcal{C} = \{e_1, \dots, e_n\}$ la base orthonormée obtenue à partir de $\mathcal{B}$ via l'algorithme de Gram-Schmidt.

La formule de changement de base assure que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_k = P_{\mathcal{B}}^C e_k$. En notant Q' la matrice orthogonale dont les colonnes sont $e_1, \dots, e_n$ et $R' = P_{\mathcal{B}}^C$, on a $A^{-1} = R'Q'$.

En passant à l'inverse, $A = (Q')^{-1}(R')^{-1}$ (R' est bien inversible). On a ainsi, en notant $Q = (Q')^{-1} = (Q')^T$ (qui est bien orthogonale) et $R = (R')^{-1}$ (qui est bien triangulaire supérieure), $A = QR$.

■

11.4 Isométries vectorielles

Exercice 11.9 (Symétrie orthogonale sur les polynômes) ★

Soient $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

Q1 - Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\longmapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt \end{aligned}$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Q2 - Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\longmapsto P(-X) \end{aligned}$$

est une symétrie orthogonale sur $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Solution

Q1 - La linéarité de l'intégrale assure que l'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bilinéaire. De plus, comme $P(X)Q(X) = Q(X)P(X)$ pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, l'application est symétrique.

De plus, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $t \in [-1, 1]$, $P(t)^2 \geq 0$, donc $\langle P | P \rangle \geq 0$ par positivité de l'intégrale.

Enfin, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifie $\langle P | P \rangle = 0$, alors, puisque la fonction $t \mapsto P(t)^2$ est positive et continue (car polynomiale) et d'intégrale nulle sur $[-1, 1]$, elle est identiquement nulle sur $[-1, 1]$. Donc, pour tout $t \in [-1, 1]$, $P(t) = 0$. P possède un nombre infini de racines, donc c'est le polynôme nul.

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Q2 - Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a $(\phi \circ \phi)(P) = \phi(P(-X)) = P(-(-X)) = P(X)$, donc, $\phi \circ \phi = Id$. ϕ est donc une symétrie.

Montrons que c'est une symétrie orthogonale. On a $\langle \phi(P) | \phi(P) \rangle = \int_{-1}^1 P(-t)^2 dt$. Le changement de variable $t \mapsto -t$ assure donc que $\langle \phi(P) | \phi(P) \rangle = \langle P | P \rangle$, ce qui conclut.

■

Exercice 11.10 (Symétrie orthogonale) ★★

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On note l'application

$$\begin{aligned}\sigma_v : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto x - 2 \frac{\langle v|x \rangle}{\langle v|v \rangle} v.\end{aligned}$$

Q1 - Montrer que σ_v est une symétrie orthogonale.

Q2 - Calculer $\text{Ker}(\sigma_v - Id)$ et $\text{Ker}(\sigma_v + id)$.

Q3 - Décrire géométriquement σ_v .

Solution

Q1 - Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\begin{aligned}(\sigma_v \circ \sigma_v)(x) &= \sigma_v(x) - 2 \frac{\langle v|\sigma_v(x) \rangle}{\langle v|v \rangle} v \\ &= x - 2 \frac{\langle v|x \rangle}{\langle v|v \rangle} v - \frac{2}{\langle v|v \rangle} \left\langle v \left| x - 2 \frac{\langle v|x \rangle}{\langle v|v \rangle} v \right. \right\rangle v \\ &= x - 2 \frac{\langle v|x \rangle}{\langle v|v \rangle} v - 2 \frac{\langle v|x \rangle}{\langle v|v \rangle} v + 4 \frac{\langle v|x \rangle}{\langle v|v \rangle^2} \langle v|v \rangle v \\ &= x.\end{aligned}$$

σ_v est donc bien une symétrie.

Montrons que c'est une symétrie orthogonale. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\begin{aligned}\langle \sigma_v(x) | \sigma_v(x) \rangle &= \left\langle x - 2 \frac{\langle v|x \rangle}{\langle v|v \rangle} v \left| x - 2 \frac{\langle v|x \rangle}{\langle v|v \rangle} v \right. \right\rangle \\ &= \langle x|x \rangle - 4 \frac{\langle v|x \rangle}{\langle v|v \rangle} \langle x|v \rangle + 4 \frac{\langle v|x \rangle^2}{\langle v|v \rangle^2} \langle v|v \rangle \\ &= \langle x|x \rangle.\end{aligned}$$

σ_v est donc bien une symétrie orthogonale (préservation du produit scalaire).

Q2 - Notons $F = \text{Vect} \{v\}^\perp$, on a $\mathbb{R}^n = F \oplus F^\perp$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On peut donc écrire $x = \lambda v + y$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y \in F$. On a ainsi

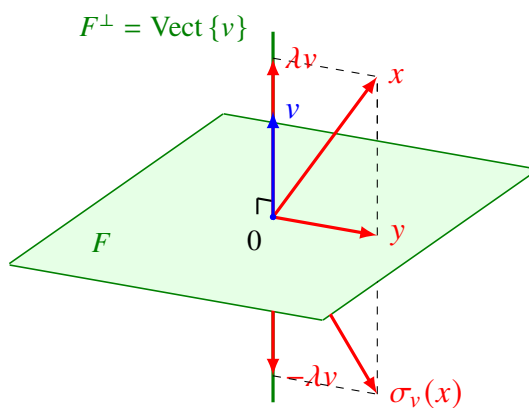
$$(\sigma_v - Id)(x) = -2 \frac{\langle v|\lambda v + y \rangle}{\langle v|v \rangle} v = -2\lambda v \in F^\perp$$

donc $\text{Ker}(\sigma_v - Id) = F$ et

$$(\sigma_v + Id)(x) = 2(\lambda v + y) - 2 \frac{\langle v | \lambda v + y \rangle}{\langle v | v \rangle} v = y \in F$$

donc $\text{Ker}(\sigma_v + Id) = F^\perp$. On retrouve ainsi la décomposition en somme directe $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(\sigma_v + Id) \oplus \text{Ker}(\sigma_v - Id)$.

Q3 - σ_v est donc la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $F = \text{Vect}\{v\}^\perp$.



■

Chapitre 12

Probabilités II

12.1 Etude de variables aléatoires discrètes

Exercice 12.1 (Couple géométrique) ★

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que pour un certain $a > 0$ et pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \frac{a}{2^{i+j}}.$$

Q1 - Calculer a .

Q2 - Calculer les lois marginales de X et Y .

Q3 - Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution

Q1 - La série $\sum_{i \geq 1} \frac{1}{2^i}$ étant convergente, le théorème de Fubini assure ainsi que la famille $\left(\frac{a}{2^{i+j}}\right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ est sommable. De plus, on a

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) &= a \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \right) \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \right) \\ &= a. \end{aligned}$$

Or, on doit avoir $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = 1$, donc $a = 1$.

Q2 - Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On a $\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \frac{1}{2^i} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^i}$. X et Y jouant des rôles symétriques, on a donc, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y = j) = \frac{1}{2^j}$. X et Y suivent une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

Q3 - Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(X = i) \times \mathbb{P}(Y = j) = \frac{1}{2^{i+j}} = \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\})$. X et Y sont donc indépendantes.

Exercice 12.2 (Exponentielle d'une loi géométrique) ★

Soient $p \in]0, 1[$ et $X \in \mathcal{G}(p)$. Pour quelle.s valeur.s de p e^X admet-elle une espérance ? Dans le cas où e^X admet une espérance, calculer cette dernière.

Solution

D'après le théorème de transfert, on a

$$\mathbb{E}[e^X] = \sum_{k=1}^{+\infty} e^k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^k p(1-p)^{k-1} = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{+\infty} [e(1-p)]^k.$$

Or, la série $\sum_{k \geq 1} [e(1-p)]^k$ converge si et seulement si $e(1-p) < 1$, i.e. $p > 1 - e^{-1}$, donc e^X admet une espérance si et seulement si $p > 1 - e^{-1}$. Dans ce cas, on a donc

$$\mathbb{E}[e^X] = \frac{pe(1-p)}{1-p} \sum_{k=0}^{+\infty} [e(1-p)]^k = \frac{pe(1-p)}{1-p} \cdot \frac{1}{1-e(1-p)} = \frac{pe}{1-e+pe}.$$

Exercice 12.3 (Nombre de naissances) ★★

On suppose que le nombre N d'enfants dans une famille suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose qu'à chaque naissance, la probabilité que l'enfant soit une fille est $p \in]0, 1[$ et celle que ce soit un garçon est $q = 1 - p$. On suppose aussi que les sexes des naissances successives sont indépendants. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de filles par familles, et Y celle du nombre de garçons.

Q1 - Soit $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Calculer $\mathbb{P}(X = k | N = n)$.

Q2 - En déduire la loi conjointe du couple (N, X) .

Q3 - Déterminer la loi de X , puis celle de Y .

Solution

Q1 - Pour n naissances, le nombre de filles suit une loi binomiale de paramètres (n, p) . On a donc

$$\mathbb{P}(X = k | N = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q2 - On a donc, pour $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{N = n\}) &= \mathbb{P}(X = k | N = n) \mathbb{P}(N = n) \\ &= \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Q3 - Soit $k \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{N = n\}) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \left(\frac{p}{1-p} \right)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} (1-p)^n \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{p}{1-p} \right)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(1-p)^n \lambda^n}{(n-k)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{p}{1-p} \right)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-p)^{n+k} \lambda^{n+k}}{n!} \\ &= \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{p}{1-p} \right)^k (1-p)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-p)^n \lambda^n}{n!} \\ &= \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^n}{n!} \\ &= \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda}}{k!} e^{\lambda(1-p)} \\ &= \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}{k!}. \end{aligned}$$

X suit donc une loi de Poisson de paramètre λp . $X \sim \mathcal{P}(\lambda p)$. En remplaçant p par q , un raisonnement similaire assure que $Y \sim \mathcal{P}(\lambda q)$.

■

Exercice 12.4 (Variable aléatoire inverse d'une loi de Poisson) ★★

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ ($X \sim \mathcal{P}(\lambda)$). Calculer l'espérance de la variable aléatoire $\frac{1}{1+X}$.

Solution

La série $\sum_{k \geq 0} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{(k+1)k!}$ étant convergente (négligeabilité du terme général devant $\left(\frac{1}{k^2}\right)_{k \geq 1}$ lorsque

$k \rightarrow +\infty$ par croissance comparée), $\frac{1}{1+X}$ admet donc une espérance. D'après le théorème de transfert, on a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\left[\frac{1}{1+X}\right] &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{(k+1)k!} \\
 &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} \\
 &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \\
 &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \\
 &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} - 1 \right] \\
 &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} [e^{\lambda} - 1] \\
 &= \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}
 \end{aligned}$$

Exercice 12.5 (Loi du deuxième pile) ★★

On considère une suite de lancers de pile ou face indépendants, la probabilité d'obtenir pile étant $p \in]0, 1[$. On note X (respectivement Y) le rang du premier (respectivement du deuxième) pile. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les évènements

- P_n : "Faire un pile au n -ième lancer".
- F_n : "Faire un face au n -ième lancer".

Q1 - Pour $i, j \in \mathbb{N}^*$. Ecrire l'évènement $\{X = i\} \cap \{Y = j\}$ à l'aide des évènements P_n et F_n . Discuter selon i et j .

Q2 - Donner la loi du couple (X, Y) .

Q3 - Donner la loi de Y .

Solution

Q1 - Soient $i, j \in \mathbb{N}^*$. Si $i \geq j$, alors l'évènement $\{X = i\} \cap \{Y = j\}$ est impossible car le deuxième lancer ne peut pas survenir avant le premier. Si $i < j$, alors on a

$$\{X = i\} \cap \{Y = j\} = F_1 \cap \cdots \cap F_{i-1} \cap P_i \cap F_{i+1} \cap \cdots \cap F_{j-1} \cap P_j$$

Q2 - Par indépendance des évènements $F_1, \dots, F_{i-1}, P_i, F_{i+1}, \dots, F_{j-1}, P_j$, on a, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \begin{cases} (1-p)^{j-2}p^2 & \text{si } i < j \\ 0 & \text{si } i \geq j \end{cases}$$

Q3 - Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On a donc, pour tout $j \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} (1-p)^{j-2}p^2 \\ &= \left(\frac{p}{1-p}\right)^2 \sum_{i=1}^{j-1} (1-p)^j \\ &= (j-1)p^2(1-p)^{j-2}. \end{aligned}$$

■

Exercice 12.6 (Probabilité qu'une matrice soit diagonalisable) ★★

Soient deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. $X, Y \sim \mathcal{G}(p)$. Calculer la probabilité que la matrice $\begin{bmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{bmatrix}$ soit diagonalisable.

Solution

Si $X = Y$, alors, si la matrice est diagonalisable, elle devrait être semblable à XI_2 , donc égale à XI_2 , ce qui n'est ici pas le cas. Donc $\begin{bmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{bmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si $X \neq Y$ (le polynôme caractéristique est scindé). Calculons $\mathbb{P}(X \neq Y)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \neq Y) &= 1 - \mathbb{P}(X = Y) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{Y = k\}) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = k) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)^2 \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 (1-p)^{2k-2} \\
&= 1 - \left(\frac{p}{1-p}\right)^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{2k} \\
&= 1 - p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^{2k} \\
&= 1 - \frac{p^2}{1 - (1-p)^2} \\
&= \frac{1 - 1 + 2p - p^2 - p^2}{1 - 1 + 2p - p^2} \\
&= \frac{2p - 2p^2}{2p - p^2} \\
&= \frac{2(1-p)}{2-p}
\end{aligned}$$

■

12.2 Inégalités probabilistes

Exercice 12.7 (Lancer de dé) ★★

Un lance un dé équilibré 3600 fois. On suppose que tous les lancers sont indépendants.

- Q1 - Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'apparitions du chiffre 6. Quelle est la loi de X ? Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}(X)$.
- Q2 - Majorer $\mathbb{P}(|X - 600| > 100)$.
- Q3 - Minorer la probabilité que le chiffre 6 apparaisse entre 500 et 700 fois.

Solution

Q1 - On répète de manière indépendante 3600 lancers de dé où la probabilité d'obtenir un 6

est de $\frac{1}{6}$. Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres 3600 et $\frac{1}{6}$. $X \sim \mathcal{B}\left(3600, \frac{1}{6}\right)$. De plus, on a $\mathbb{E}[X] = 600$ et $\mathbb{V}(X) = 500$.

Q2 - Puisque $\mathbb{E}[X] = 600$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev assure que

$$\mathbb{P}(|X - 600| > 100) \leq \frac{500}{100^2} = \frac{5}{100}.$$

Q3 - On a $\{500 \leq X \leq 700\} = \overline{\{|X - 600| > 100\}}$, donc

$$\mathbb{P}(500 \leq X \leq 700) = 1 - \mathbb{P}(|X - 600| > 100) \geq \frac{95}{100}.$$

La probabilité que le chiffre 6 apparaisse entre 500 et 700 est donc supérieure à 95%.

■

Exercice 12.8 (Majoration de probabilités de loi géométrique) ★★

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire suivant une loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Q1 - Montrer que $\mathbb{P}(X \geq n^2) \leq \frac{1}{n}$.

Q2 - Montrer que $\mathbb{P}(|X - n| \geq n) \leq 1 - \frac{1}{n}$.

Q3 - En déduire que $\mathbb{P}(X \geq 2n) \leq 1 - \frac{1}{n}$.

Solution

Q1 - Comme $X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{n}\right)$, on a $\mathbb{E}[X] = n$ et $\mathbb{V}(X) = n(n-1)$. Ainsi, X étant positive, l'inégalité de Markov assure que $\mathbb{P}(X \geq n^2) \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$.

Q2 - Puisque $\mathbb{E}[X] = n$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev assure que

$$\mathbb{P}(|X - n| \geq n) \leq \frac{n(n-1)}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Q3 - On a $\{|X - n| \geq n\} = \{X \leq 0\} \sqcup \{X \geq n\}$. Or, X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ donc $\{X = 0\} = \emptyset$ et $\{|X - n| \geq n\} = \{X \geq n\}$, ce qui fournit le résultat souhaité.

■

Exercice 12.9 Estimation ★★

Q1 - Soient X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres (n, p) (avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$, $X \sim \mathcal{B}(n, p)$) et $\varepsilon > 0$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

Q2 - On lance de manière successive et indépendante un dé à 10 faces que l'on suppose équilibré. Quel est le nombre de lancers à effectuer pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition du 10 au cours de ces lancers diffère de $\frac{1}{10}$ d'au plus 10^{-3} ?

Solution

Q1 - Posons $Y = \frac{X}{n}$. On a $\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{n}\mathbb{E}[X] = p$. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a $\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}[Y]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(Y)}{\varepsilon^2}$. Or, on a $\mathbb{V}(Y) = \frac{\mathbb{V}(X)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$, donnant ainsi

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

Q2 - On effectue n lancers de dé. Soit X le nombre d'apparitions du 10. On a donc $X \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{10}\right)$. La fréquence d'apparition du 10 sera donc $\frac{X}{n}$. On veut donc trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{10}\right| \geq 10^{-3}\right) \leq \frac{5}{100}$. Or, d'après la question précédente, on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{10}\right| \geq 10^{-3}\right) \leq \frac{9}{100 \cdot (10^{-3})^2 \cdot n} = \frac{9 \cdot 10^4}{n}.$$

On veut que $\frac{9 \cdot 10^4}{n} \leq 0.05$, soit $n \geq 1\,800\,000$.

Exercice 12.10 (Inégalité de Paley-Zigmond) ★★

Soient X une variable aléatoire positive telle que $X \in L^2(\Omega, \mathbb{R}_+)$ et $\theta \in]0, 1[$.

Q1 - Montrer que $\mathbb{E}[X] \leq \theta \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{\{X \geq \theta \mathbb{E}[X]\}}]$.

Q2 - Montrer que $\mathbb{E}[X \mathbf{1}_{\{X \geq \theta \mathbb{E}[X]\}}] \leq \mathbb{E}[X^2]^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbb{P}(X \geq \theta \mathbb{E}[X])^{\frac{1}{2}}$.

Q3 - En déduire l'inégalité de Paley-Zigmond:

$$\mathbb{P}(X \geq \theta \mathbb{E}[X]) \geq (1 - \theta)^2 \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

Solution

Q1 - On a la décomposition puis majoration suivante (due au fait que X , donc $\mathbb{E}[X]$, soit positive):

$$\begin{aligned} X &= X\mathbf{1}_{\{X < \theta\mathbb{E}[X]\}} + X\mathbf{1}_{\{X \geq \theta\mathbb{E}[X]\}} \\ &\leq \theta\mathbb{E}[X]\mathbf{1}_{\{X < \theta\mathbb{E}[X]\}} + X\mathbf{1}_{\{X \geq \theta\mathbb{E}[X]\}} \\ &\leq \theta\mathbb{E}[X] + X\mathbf{1}_{\{X \geq \theta\mathbb{E}[X]\}}. \end{aligned}$$

On a l'inégalité souhaitée en passant à l'espérance.

Q2 - Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{\{X \geq \theta\mathbb{E}[X]\}}] &\leq \mathbb{E}[X^2]^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X \geq \theta\mathbb{E}[X]\}}^2]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \mathbb{E}[X^2]^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X \geq \theta\mathbb{E}[X]\}}]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \mathbb{E}[X^2]^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbb{P}(X \geq \theta\mathbb{E}[X])^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Q3 - En combinant les deux premières inégalités, on a

$$(1 - \theta)\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[X^2]^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbb{P}(X \geq \theta\mathbb{E}[X])^{\frac{1}{2}}.$$

On obtient l'inégalité finale en élevant au carré puis en divisant par $\mathbb{E}[X^2]$.

■

12.3 Fonctions génératrices

Exercice 12.11 (Condition pour avoir une loi de probabilité) ★★

Soient $a, b > 0$. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = a \left(\frac{b}{b+1} \right)^n$.

Q1 - Quelles doivent être les valeurs de a et b .

Q2 - Déterminer la fonction génératrice $t \mapsto G_X(t)$.

Q3 - Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}(X)$.

Solution

Q1 - La série $\sum_{n \geq 0} a \left(\frac{b}{b+1} \right)^n$ est une série géométrique de raison $\frac{b}{b+1} < 1$ donc est convergente. On doit avoir $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$. Or, $\sum_{n=0}^{+\infty} a \left(\frac{b}{b+1} \right)^n = \frac{a}{1 - \frac{b}{b+1}} = a(b+1)$. Donc $a(b+1) = 1$, soit $a = \frac{1}{b+1}$.

Q2 - Soit $t \in [-1, 1]$. On a $G_X(t) = a \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{bt}{b+1} \right)^n = \frac{a}{1 - \frac{bt}{b+1}} = \frac{a(b+1)}{b+1-bt} = \frac{1}{b+1-bt}$. Le rayon de convergence de cette série entière est en réalité donné par $\frac{b+1}{b}$.

Q3 - $t \mapsto G_X(t)$ est de classe C^∞ sur $[-1, 1]$. On a donc, pour tout $t \in [-1, 1]$, $G'_X(t) = \frac{b}{(b+1-bt)^2}$ et $G''_X(t) = \frac{2b^2}{(b+1-bt)^3}$. Ainsi, on a $\mathbb{E}[X] = G'_X(1) = b$ et $\mathbb{E}[X(X-1)] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X] = G''_X(1) = 2b^2$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2 \\ &= 2b^2 + b - b^2 \\ &= b^2 - b \end{aligned}$$

■

Exercice 12.12 (D'une fonction génératrice vers la loi de probabilités) ★★

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la fonction génératrice est donnée pour tout $t \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ par

$$G_X(t) = \frac{t}{2-t^2}$$

Q1 - Donner la loi de X .

Q2 - Quelle est la loi de $Y = \frac{1}{2}(X+1)$?

Q3 - Sans calculer les dérivées de G_X , donner $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}(X)$.

Solution

Q1 - Soit $t \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$. On a

$$G_X(t) = \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t^2}{2}} = \frac{t}{2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{t^2}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2^{n+1}}.$$

X prend donc ses valeurs dans $2\mathbb{N} + 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = 2n + 1) = \frac{1}{2^{n+1}}$.

Q2 - Y prend donc ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(X = 2n - 1) = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Y suit donc une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

Q3 - Comme $Y \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$, on a $\mathbb{E}[Y] = 2$ et $\mathbb{V}(Y) = 2$. Ainsi, la linéarité de l'espérance assure que $\mathbb{E}[X] = 3$ et la propriété de la variance assure que $\mathbb{V}(X) = 8$.

■

Exercice 12.13 (Lancer d'un dé truqué) ★ ★ ★

Q1 - Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $X^2 + \dots + X^{12} = P^2$.

Q2 - Existe-t-il un dé truqué tel que la somme de deux lancers consécutifs (et indépendants) de ce dé suive une loi uniforme sur $[[2, 12]]$?

Solution

Q1 - Les racines du polynôme $X^2 + \dots + X^{12}$ sont 0 (racine double) et les racines 11-ièmes de l'unité, qui sont toutes distinctes. Ce polynôme admet donc 0 comme racine double et des racines complexes simples. Il ne peut donc pas s'écrire comme un carré d'un autre polynôme.

Q2 - Notons X et Y les variables aléatoires donnant le résultat respectif du premier et second lancer du dé truqué. X et Y suivent la même loi. On a donc, pour tout $t \in [-1, 1]$,

$$G_X(t) = G_Y(t) = \sum_{n=1}^6 p_n t^n, \text{ avec } p_1, \dots, p_6 \in [0, 1].$$

De plus, comme X et Y sont indépendantes, on a, pour tout $t \in [0, 1]$, $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = G_X(t)^2$. Mais si $X + Y \sim \mathcal{U}([2, 12])$, alors pour tout

$$t \in [-1, 1], G_{X+Y}(t) = \frac{1}{11} \sum_{n=2}^{12} t^n. \text{ Or, d'après la question précédente, le polynôme}$$

$X^2 + \dots + X^{12}$ ne peut pas s'écrire comme un carré d'un autre polynôme. Il y a donc contradiction. On ne peut pas trouver un tel dé.

■

Chapitre 13

Espaces vectoriels normés II

13.1 Topologie des espaces vectoriels normés

Exercice 13.1 (Ensembles ouverts ou fermés)

Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés dans $\mathbb{R}^2$. Les représenter graphiquement.

Q1 - $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2\}$

Q2 - $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 1| + 2|y| < 2\}$

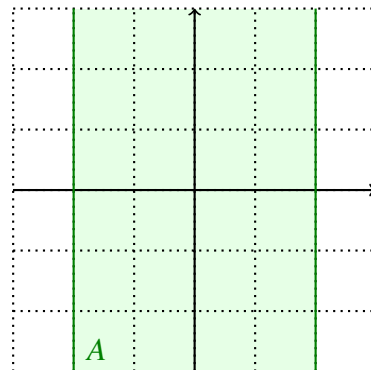
Q3 - $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0\}$

Solution

Q1 - On a $A = f^{-1}([0, 2])$ où la fonction f est donnée par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto |x|. \end{aligned}$$

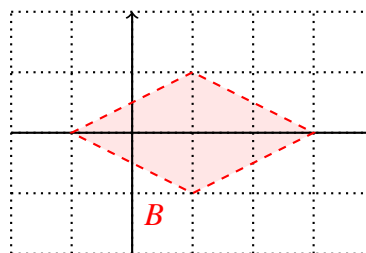
f est la composée de $e_1^* : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ (première coordonnée) et de $|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, qui sont des fonctions continues, donc est continue. $[0, 2]$ étant un fermé de $\mathbb{R}$ (intervalle fermé ou boule fermée de centre 1 et de rayon 1), A est donc un fermé de $\mathbb{R}^2$ comme image réciproque de $[0, 2]$ par f .



Q2 - On a $B = \mathbb{B}_{\|\cdot\|}((1,0), 2)$ où la norme $\|\cdot\|$ est donnée par

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto |x| + 2|y|. \end{aligned}$$

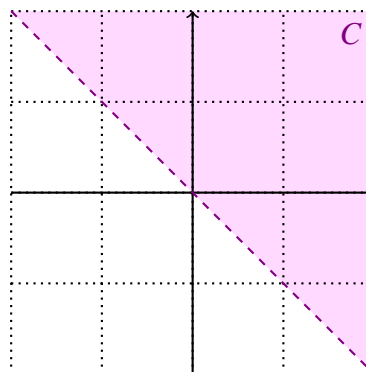
B est donc bien un ouvert de $\mathbb{R}^2$.



Q3 - On a $C = f^{-1}(]0, +\infty[)$ où la fonction f est donnée par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x + y. \end{aligned}$$

f est la somme de $e_1^* : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ (première coordonnée) et de $e_2^* : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ (seconde coordonnée), qui sont des fonctions continues, donc est continue. $]0, +\infty[$ étant un ouvert de $\mathbb{R}$ (intervalle ouvert), C est donc un ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme image réciproque de $]0, +\infty[$ par f .



Exercice 13.2 (Sous-espace vectoriel ouvert) ★★

Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E . On suppose que F est ouvert. Montrer que $F = E$.

Indication: On pourra considérer $x \in E \setminus \{0\}$ et $y = \frac{rx}{2\|x\|}$, où r est le rayon d'une boule ouverte de F .

Solution

Comme F est un sous-espace vectoriel, $0 \in F$. Puisque F est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $\mathbb{B}(0, r) \subseteq F$. Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Posons $y = \frac{r}{2\|x\|}x$. On a ainsi $\|y\| = \frac{r}{2}$ donc $y \in \mathbb{B}(0, r) \subseteq F$.

Comme F est un sous-espace vectoriel, $\frac{2\|x\|}{r}y \in F$. On a donc $F = E$.

Exercice 13.3 (Un sous-espace vectoriel fermé... ou dense) ★★

Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Soit $F = \{f \in E : f(0) = 0\}$ le sous-espace vectoriel de E .

Q1 - Montrer que F est fermé dans $(E, \|\cdot\|_{L^\infty})$.

Q2 - Montrer que F est dense dans $(E, \|\cdot\|_{L^1})$.

Solution

Q1 - Soit T l'application linéaire

$$\begin{aligned} T : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto f(0). \end{aligned}$$

T est continue sur E . En effet, on a, pour tout $f \in E$, $|T(f)| = |f(0)| \leq \|f\|_{L^\infty}$. T est 1-Lipschitzienne sur E donc est continue. $F = T^{-1}(\{0\})$ est l'image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ (le singleton $\{0\}$) par T qui est une application continue, donc c'est un fermé de E .

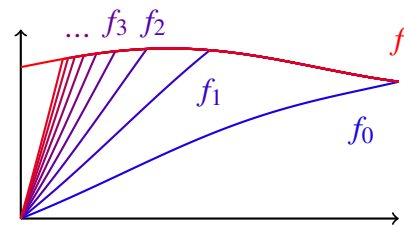
Q2 - Soit $f \in E$. Montrons qu'il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de F (i.e. telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$) vérifiant $\|f_n - f\|_{L^1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, considérons la fonction f_n définie par

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} (n+1)x f(x) & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n+1}\right] \\ f(x) & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n+1}, 1\right] \end{cases} \end{aligned}$$

On a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$, i.e. $f_n \in F$, ainsi que

$$\|f_n - f\|_{L^1} = \int_0^{\frac{1}{n+1}} |1 - (n+1)x| |f(x)| dx$$

soit $\|f_n - f\|_{L^1} \leq \frac{2\|f\|_{L^\infty}}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui conclut.



■

13.2 Applications continues

Exercice 13.4 (Une application Lipschitzienne) ★

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{1 + \|x\|} \end{aligned}$$

est 1-Lipschitzienne.

Solution

Soient $x, y \in E$. On a

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{1 + \|x\|} - \frac{1}{1 + \|y\|} \right| = \frac{|\|y\| - \|x\||}{(1 + \|x\|)(1 + \|y\|)} \leq \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$$

■

13.3 Applications linéaires continues et normes subordonnées

Exercice 13.5 (Une application linéaire continue... ou pas) ★★

On considère l'application linéaire

$$\begin{aligned} T : C^0([0, 1], \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto f(0). \end{aligned}$$

Q1 - Montrer que T est continue pour la norme uniforme $\|\cdot\|_{L^\infty}$.

Q2 - T est-elle continue pour la norme $\|\cdot\|_{L^1}$?

Solution

Q1 - Soit $f \in L^1([0, 1], \mathbb{R})$. On a $|T(f)| = |f(0)| \leq \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = \|f\|_{L^\infty}$, donc T est continue pour $\|\cdot\|_{L^\infty}$.

Q2 - Considérons la suite de fonctions définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par:

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (1 - x)^n. \end{aligned}$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T(f_n) = 1$ mais $\|f_n\|_{L^1} = \int_0^1 (1 - x)^n dx = \frac{1}{n+1}$. Cette suite tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$. Cela contredit la continuité de T pour la norme $\|\cdot\|_{L^1}$.

■

Exercice 13.6 (Une application linéaire jamais continue) ★★

Soit $E = C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions régulières sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles. On considère l'opérateur de dérivation

$$\begin{aligned} D : E &\longrightarrow E \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

Q1 - Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $f_\lambda \in E$ est donnée par $f_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$, que vaut $D(f_\lambda)$ en fonction de f_λ ?

Q2 - En déduire que pour toute norme $\|\cdot\|$ définie sur E , D n'est jamais continu.

Solution

- Q1 - Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto e^{\lambda x}$ est dérivable sur $[0, 1]$ et admet pour dérivée $e \mapsto e^{\lambda x}$, donc $D(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$.
- Q2 - Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une norme $\|\cdot\|$ définie sur E telle que D soit continu pour cette norme. Ainsi, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in E$, $\|D(f)\| \leq C \|f\|$. Donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|D(f_\lambda)\| = |\lambda| \|f_\lambda\| \leq C \|f_\lambda\|.$$

On a donc $|\lambda| \leq C$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui est absurde. D n'est pas continue pour $\|\cdot\|$.

Exercice 13.7 (Trace) ★★

Q1 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application

$$N : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ A \longmapsto \sup_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right\}$$

est une norme sur E .

Q2 - Montrer que l'application trace

$$\text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ A \longmapsto \sum_{i=1}^n a_{i,i}$$

est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour N et calculer sa norme d'opérateur.

Indication: On pourra calculer $\text{Tr}(I_n)$.

Solution

Q1 - Montrons que N définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Homogénéité: Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On écrit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\sum_{j=1}^n |\lambda a_{i,j}| = |\lambda| \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq |\lambda| N(A).$$

Donc, en prenant le Sup à gauche, on a $N(\lambda A) \leq |\lambda| N(A)$. De même, si $\lambda \neq 0$, alors

$$\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = \frac{1}{|\lambda|} \sum_{j=1}^n |\lambda a_{i,j}| \leq \frac{1}{|\lambda|} N(\lambda A).$$

Donc, en passant au Sup à gauche, on a $N(A) \leq \frac{1}{|\lambda|} N(\lambda A)$, soit $|\lambda| N(A) \leq N(\lambda A)$. Cette inégalité restant évidente si $\lambda = 0$, on a finalement $N(\lambda A) = |\lambda| N(A)$.

- Inégalité triangulaire: Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On écrit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a

$$\sum_{j=1}^n |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^n |b_{i,j}| \leq N(A) + N(B).$$

En passant au Sup à gauche, on a $N(A + B) \leq N(A) + N(B)$.

- Séparation: Si $N(A) = 0$, alors pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = 0$, donc, puisque tous les termes de la somme sont positifs, pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{i,j} = 0$, soit $A = 0$.

Q2 - Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On écrit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

$$|\text{Tr}(A)| = \left| \sum_{i=1}^n a_{i,i} \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_{i,i}| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq \sum_{i=1}^n N(A) = nN(A).$$

Ainsi, Tr est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on a $\|\text{Tr}\| \leq n$. Si $A = I_n$, alors $\text{Tr}(A) = n$, et $N(I_n) = \sup_{1 \leq j \leq n} |1| = 1$. La borne supérieure est bien atteinte, on a $\|\text{Tr}\| = n$.

Exercice 13.8 (Opérateur intégral) ★★

On considère la fonction signe donnée par

$$\begin{aligned} \text{sgn} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \begin{cases} -1 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On considère le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé des fonctions continues par morceaux sur $[-1, 1]$ et à valeurs réelles $E = C_M^0([-1, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$.

On considère également l'application linéaire

$$\begin{aligned} T : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_{-1}^1 \text{sgn}(t) f(t) dt. \end{aligned}$$

Montrer que T est continue et calculer sa norme subordonnée.

Solution

Soit $f \in E$. On a

$$T(f) = \int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(t) f(t) dt = \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt.$$

Ainsi, l'inégalité triangulaire assure que

$$|T(f)| \leq \int_{-1}^0 |f(t)| dt + \int_0^1 |f(t)| dt = \int_{-1}^1 |f(t)| dt,$$

puis l'inégalité de la moyenne donne $|T(f)| \leq 2 \|f\|_\infty$. T est donc continue.

De plus, si $f = \operatorname{sgn}$, alors $\|f\|_\infty = 1$ et $T(\operatorname{sgn}) = \int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(t)^2 dt = 2$, la borne est bien atteinte, donc $\|T\| = 2$.

**Exercice 13.9 (Shift à droite) ★★**

On note $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel (réel) des suites sommables sur $\mathbb{N}$ à valeurs réelles. Autrement dit,

$$\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \left\{ (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| < +\infty \right\}.$$

Q1 - Montrer que l'application $\|\cdot\|_{\ell^1} : (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$ définit une norme sur $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Q2 - Montrer que l'application linéaire

$$\begin{aligned} T : \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}) &\longrightarrow \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &\longmapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

est continue sur $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

En considérant la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$v_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } n > 0, \end{cases}$$

calculer la norme subordonnée de T .

Solution

Q1 - Par définition de $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $\|\cdot\|_{\ell^1}$ est bien définie. Montrons que c'est une norme. Soient $u = (u_k)_{k \in \mathbb{N}}, v = (v_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Homogénéité: Comme $\lambda u = (\lambda u_k)_{k \in \mathbb{N}}$, par multiplicativité de la valeur absolue, on a $\|\lambda u\|_{\ell^1} = \sum_{k=0}^{+\infty} |\lambda| |u_k| = |\lambda| \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| = |\lambda| \|u\|_{\ell^1}$. La linéarité de la somme assure donc que $\|\lambda u\|_{\ell^1} = |\lambda| \cdot \|u\|_{\ell^1}$.
- Inégalité triangulaire: Comme $u + v = (u_k + v_k)_{k \in \mathbb{N}}$, l'inégalité triangulaire sur la valeur absolue assure que $\|u + v\|_{\ell^1} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} [|u_k| + |v_k|] = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| + \sum_{k=0}^{+\infty} |v_k| = \|u\|_{\ell^1} + \|v\|_{\ell^1}$. Finalement, la linéarité de la somme assure que $\|u + v\|_{\ell^1} \leq \|u\|_{\ell^1} + \|v\|_{\ell^1}$.
- Séparation: Si $\|u\|_{\ell^1} = 0$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|u_k| = 0$, soit $u_k = 0$, ce qui conclut.

Q2 - Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. La série de terme général $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ étant absolument convergente, on a bien $T(u) \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. De plus,

$$\|T(u)\|_{\ell^1} = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_{n+1}| = \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| \leq \|u\|_{\ell^1}.$$

T est bien continue. Enfin, nous avons

$$\|T(v)\|_{\ell^1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \|v\|_{\ell^1}.$$

La borne est bien atteinte, donnant ainsi $\|T\| = 1$.

■

13.4 Connexité par arcs et compacité

Exercice 13.10 (Groupe orthogonal) ★★

Q1 - Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in SO_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'ils existent $P \in O_n(\mathbb{R})$, $\theta_1, \dots, \theta_m \in [0, 2\pi[$ (où $m \in \mathbb{N}^*$) et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$P^T M P = \begin{bmatrix} R_{\theta_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ & & R_{\theta_m} \\ (0) & & & I_p \end{bmatrix},$$

$$\text{avec, pour tout } \theta \in [0, 2\pi[, R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Q2 - En déduire que $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Q3 - $O_n(\mathbb{R})$ est-il connexe par arcs ?

Q4 - Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont compacts.

Solution

Q1 - D'après le théorème de réduction des isométries vectorielles, on peut trouver $Q \in O_n(\mathbb{R})$, $\theta_1, \dots, \theta_r \in [0, 2\pi[$ (où $r \in \mathbb{N}^*$), $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$Q^T M Q = \begin{bmatrix} R_{\theta_1} & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & R_{\theta_r} & \\ & & & I_p \\ (0) & & & & -I_q \end{bmatrix}.$$

Puisque $M \in SO_n(\mathbb{R})$, on a $\det(M) = 1$, et, d'après la forme réduite, $\det(M) = (-1)^q$, donc q est pair. Ainsi, on peut écrire

$$I_q = \begin{bmatrix} R_\pi & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & R_\pi \end{bmatrix},$$

où on a $\frac{q}{2}$ blocs. Ainsi, en posant $\theta_{r+1} = \dots = \theta_{r+\frac{q}{2}} = \pi$ (donc $m = r + \frac{q}{2}$), on a

$$Q^T M Q = \begin{bmatrix} R_{\theta_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & R_{\theta_r} & & & (0) \\ & & & I_p & & \\ & & & & R_{\theta_{r+1}} & \\ & (0) & & & & \ddots \\ & & & & & & R_{\theta_m} \end{bmatrix}.$$

Considérons alors la matrice de permutation

$$Q_\sigma = \begin{bmatrix} I_{2r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_p \\ 0 & I_q & 0 \end{bmatrix}.$$

Posons $P = Q Q_\sigma$, comme les matrices de permutation sont orthogonales, on a bien $P \in O_n(\mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned}
& P^T M P \\
&= \left[\begin{array}{c|c|c} I_{2r} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_q \\ \hline 0 & I_p & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c|c} R_{\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & R_{\theta_r} & 0 & 0 \\ \hline 0 & & I_p & 0 & \\ \hline & 0 & 0 & R_{\theta_{r+1}} & \ddots & R_{\theta_m} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c|c} I_{2r} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_p \\ \hline 0 & I_q & 0 \end{array} \right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c|c} R_{\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & R_{\theta_r} & 0 & 0 \\ \hline 0 & & R_{\theta_{r+1}} & \ddots & R_{\theta_m} \\ \hline 0 & I_p & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c|c} I_{2r} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_p \\ \hline 0 & I_q & 0 \end{array} \right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c|c} R_{\theta_1} & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ & & R_{\theta_r} & 0 & 0 \\ \hline 0 & & R_{\theta_{r+1}} & \ddots & R_{\theta_m} \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_p \end{array} \right] \cdot
\end{aligned}$$

Q2 - Soit l'application

$$\begin{aligned}
\gamma : [0, 1] &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\
t &\longmapsto \begin{bmatrix} R_{t\theta_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ & & R_{t\theta_m} & \\ (0) & & & I_p \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Les matrices de rotation de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ étant orthogonales, un produit matriciel par blocs assure que, pour tout $t \in [0, 1]$, $\gamma(t) \in O_2(\mathbb{R})$. De plus, un calcul de déterminant par bloc assure que $\det(\gamma(t)) = 1$, donc $\gamma(t) \in SO_2(\mathbb{R})$.

De plus, γ est la composée des applications f et g ($\gamma = g \circ f$), où

$$\begin{aligned}
f : [0, 1] &\longmapsto \mathbb{R}^{2m} \\
t &\longmapsto (\cos(t\theta_1), \sin(t\theta_1), \dots, \cos(t\theta_m), \sin(t\theta_m))
\end{aligned}$$

et

$$g : \mathbb{R}^{2m} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$(x_1, y_1, \dots, x_m, y_m) \longmapsto \begin{bmatrix} x_1 & -y_1 & & \\ y_1 & x_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_m & -y_m \\ & & & y_m & x_m \\ & & & & & I_p \end{bmatrix}$$

f et g sont continues car 1-Lipschitziennes en leur variable de départ. Ainsi, par composition, γ est continue.

On a donc trouvé un chemin $\gamma : [0, 1] \longrightarrow SO_n(\mathbb{R})$ tel que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma(1) = A$. Donc $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs (toutes les matrices de $SO_n(\mathbb{R})$ sont reliées à l'identité via un chemin continu).

Q3 - Si $O_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, alors son image par $\det$ devrait être connexe par arcs, puisque $\det$ est continue (car polynomiale). Or, $\det(O_n(\mathbb{R})) = \{-1, 1\}$ n'est pas connexe par arcs, donc $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

Q4 - Considérons la norme de Frobenius

$$\|\cdot\|_F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$A \longmapsto \text{Tr}(A^T A)^{\frac{1}{2}}.$$

Un rapide calcul montre (en utilisant le résultat de la première question) que pour tout $M \in O_n(\mathbb{R})$, $\|M\|_F = \sqrt{n}$, donc $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont bornées (pour toute norme, car on est en dimension finie).

De plus, on a

$$O_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{I_n\}) \text{ et } SO_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{I_n\}) \cap \det^{-1}(\{1\}),$$

où $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est le déterminant et φ est donnée par

$$\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$M \longmapsto M^T M.$$

$\det$ et φ sont des applications polynomiales, donc continues. Or, $\{I_n\}$ et $\{1\}$ sont des singletons, donc sont des fermés respectifs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$. Ainsi, leurs images réciproques respectives par φ et $\det$ sont également des fermés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $O_n(\mathbb{R})$ est donc un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $SO_n(\mathbb{R})$ est également un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme intersection de deux fermés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi, $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont fermés bornés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc sont des compacts car on est en dimension finie.

■

Exercice 13.11 (Groupe spécial linéaire) ★ ★ ★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit le groupe spécial linéaire comme étant le groupe des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de déterminant égal à 1.

$$SL_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}.$$

On appelle matrice de transvection toute matrice de la forme $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$, où $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $i \neq j$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $E_{i,j}$ est la matrice élémentaire d'indice (i, j) .

Q1 - Montrer que $SL_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Est-il compact ?

Q2 - Soit $A \in SL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe des matrices de transvection $T_1, \dots, T_p$ et $U_1, \dots, U_q$ (où $p, q \in \mathbb{N}^*$) telles que

$$T_p \cdots T_1 A U_1 \cdots U_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{bmatrix},$$

où $A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.

Q3 - Montrer que A est un produit de matrices de transvections

Q4 - En déduire que $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Solution

Q1 - On a $SL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\{1\})$, c'est donc l'image réciproque du singleton $\{1\}$, qui est fermé dans $\mathbb{R}$ par l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, qui est continue car polynomiale en les coefficients de la matrice d'entrée. $SL_n(\mathbb{R})$ est donc un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

De plus, si $\alpha > 0$, $A_\alpha = \text{diag}\left(\frac{1}{\alpha}, 1, \dots, 1, \alpha\right) \in SL_n(\mathbb{R})$. Ainsi, $\|A\|_\infty = \alpha$, donc $SL_n(\mathbb{R})$ n'est pas borné. Comme on est en dimension finie, cet ensemble n'est donc pas compact.

Q2 - Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On va suivre l'algorithme du pivot de Gauss.

- Si pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $a_{i,1} = 0$, alors, comme A est inversible, sa première colonne est non nulle et $a_{1,1} \neq 0$. On effectue donc les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_i \leftarrow L_i + \frac{1 - a_{i,1}}{a_{1,1}} L_1$.

$$\begin{array}{ccc}
\begin{bmatrix} a_{1,1} & \star & \cdots & \star \\ 0 & \star & \cdots & \star \\ 0 & \star & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \star & \cdots & \star \end{bmatrix} & \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_1 + L_2} & \begin{bmatrix} a_{1,1} & \star & \cdots & \star \\ a_{1,1} & \star & \cdots & \star \\ 0 & \star & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \star & \cdots & \star \end{bmatrix} \\
& & \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1-a_{1,1}}{a_{1,1}} L_2} \\
& & \begin{bmatrix} 1 & \star & \cdots & \star \\ a_{1,1} & \star & \cdots & \star \\ 0 & \star & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \star & \cdots & \star \end{bmatrix}
\end{array}$$

- S'il existe $i_0 \in \llbracket 2, n \rrbracket$ tel que $a_{i_0,1} \neq 0$, alors on fait l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1-a_{1,1}}{a_{i_0,1}} L_{i_0}$.

$$\begin{array}{ccc}
\begin{bmatrix} a_{1,1} & \star & \cdots & \star \\ \star & \star & \cdots & \star \\ a_{i_0,1} & \star & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \star & \star & \cdots & \star \end{bmatrix} & \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1-a_{1,1}}{a_{i_0,1}} L_{i_0}} & \begin{bmatrix} 1 & \star & \cdots & \star \\ \star & \star & \cdots & \star \\ a_{i_0,1} & \star & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \star & \star & \cdots & \star \end{bmatrix}
\end{array}$$

Dans les deux cas, on tombe sur une matrice de la forme

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \star & \cdots & \star \\ \star & \star & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \star & \star & \cdots & \star \end{bmatrix}$$

On réalise les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - b_{2,1}L_1, \dots, L_n \leftarrow L_n - b_{n,1}L_1$

$$\begin{array}{ccc}
L_2 \leftarrow L_2 - b_{2,1}L_1 & & \\
\vdots & & \\
L_n \leftarrow L_n - b_{n,1}L_1 & \xrightarrow{\quad} & \begin{bmatrix} 1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & \star & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \star & \cdots & \star \end{bmatrix},
\end{array}$$

puis les opérations élémentaires $C_2 \leftarrow C_2 - b_{1,2}C_1, \dots, C_n \leftarrow C_n - b_{1,n}C_1$

$$\begin{array}{ccc}
C_2 \leftarrow C_2 - b_{1,2}C_1 & & \\
\vdots & & \\
C_n \leftarrow C_n - b_{1,n}C_1 & \xrightarrow{\quad} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \star & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \star & \cdots & \star \end{bmatrix}.
\end{array}$$

Les opérations élémentaires du type $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ et $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ revenant respectivement à multiplier à gauche et à droite par une matrice de transvection $T_{i,j}(\lambda)$, on a donc fait une multiplication à gauche par $p = n$ ou $n + 1$ matrices de transvection (selon la condition) et à droite par $q = n - 1$ matrices de transvection.

- Q3 - En répétant le processus de la question sur la matrice A' , et en notant que si T est une matrice de transvection de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, alors la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}$ définie par blocs est une matrice de transvection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En procédant récursivement, on peut donc trouver des matrices de transvection $T_1, \dots, T_r$ et $U_1, \dots, U_s$ où $r, s \in \mathbb{N}^*$ telles que

$$T_r \cdots T_1 A U_1 \cdots U_s = \begin{bmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 & \\ & & & \alpha \end{bmatrix},$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme les matrices de gauche sont toutes de déterminant 1 (une matrice de transvection est de déterminant 1), on a $\alpha = 1$. Les matrices de transvection étant inversibles (car de déterminant 1), A peut donc s'écrire comme le produit de $r + s$ matrices de transvection (inversion à gauche et à droite).

- Q4 - On peut écrire $A \in SL_n(\mathbb{R})$ comme un produit de $m \in \mathbb{N}^*$ matrices de transvections $T_1(\lambda_1), \dots, T_m(\lambda_m)$: $A = T_1(\lambda_1) \cdots T_m(\lambda_m)$. Soit alors l'application

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t &\longmapsto T_1(\lambda_1 t) \cdots T_m(\lambda_m t). \end{aligned}$$

On a $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma(1) = T_1(\lambda_1) \cdots T_m(\lambda_m) = A$, de plus, pour tout $t \in [0, 1]$, $\det(\gamma(t)) = 1$ (produit de matrices de transvections de déterminant 1), donc $\gamma(t) \in SL_n(\mathbb{R})$. De plus, $t \mapsto \gamma(t)$ est polynomiale à valeurs matricielles (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le produit matriciel est polynomial en les coefficients des matrices), donc continue. Ainsi, $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

■

Chapitre 14

Espaces préhilbertiens réels II

14.1 Endomorphismes symétriques

Exercice 14.1 (La symétrie implique la linéarité) ★

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tous $x, y \in E$, $\langle u(x)|y \rangle = \langle x|u(y) \rangle$.
Montrer que u est linéaire.

Solution

Soient $x, y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\langle u(x + \lambda y) - u(x) - \lambda u(y)|z \rangle &= \langle u(x + \lambda y)|z \rangle - \langle u(x)|z \rangle - \lambda \langle u(y)|z \rangle \\ &= \langle x + \lambda y|u(z) \rangle - \langle x|u(z) \rangle - \lambda \langle y|u(z) \rangle \\ &= \langle x + \lambda y - x - \lambda y|u(z) \rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

L'égalité restant vraie pour tout $z \in E$, on a $u(x + \lambda y) - u(x) - \lambda u(y) = 0$, ce qui conclut.



Exercice 14.2 (Identité plus endomorphisme de rang 1) ★★

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, $a \in E$ un vecteur unitaire et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Q1 - Soit l'endomorphisme

$$\begin{aligned}u : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x + \lambda \langle x|a \rangle a.\end{aligned}$$

Montrer que u est symétrique.

Q2 - Déterminer les valeurs propres de u ainsi que les sous-espaces propres correspondants.

Indication: Discuter selon les valeurs prises par λ et par les valeurs propres.

Solution

Q1 - Soient $x, y \in E$. On a

$$\begin{aligned}\langle u(x)|y \rangle &= \langle x + \lambda \langle x|a \rangle a | y \rangle = \langle x|y \rangle + \lambda \langle x|a \rangle \langle a|y \rangle \\ &= \langle x|y \rangle + \lambda \langle y|a \rangle \langle x|a \rangle = \langle x|y + \lambda \langle y|a \rangle a \rangle.\end{aligned}$$

Donc $u \in \mathcal{S}(E)$.

Q2 - u est symétrique réel (i.e. autoadjoint), donc est diagonalisable dans une base orthonormée avec des valeurs propres réelles. Soit $\mu \in \mathbb{R}$ une valeur propre de u , et $x \in E$ un vecteur propre associé.

$$\begin{aligned}u(x) = \mu x &\iff x + \lambda \langle x|a \rangle a = \mu x \\ &\iff (\mu - 1)x = \lambda \langle x|a \rangle a.\end{aligned}$$

On sépare les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$.

- Si $\lambda = 0$, alors $u = Id_E$, donc 1 est l'unique valeur propre et E est le sous-espace propre associé.
- Si $\lambda \neq 0$ et $\mu = 1$, alors $\langle x|a \rangle a = 0$, donc $x \perp a$. 1 est valeur propre et le sous-espace propre associé est $\text{Vect}\{a\}^\perp$.
- Si $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 1$, alors $x \in \text{Vect}\{a\}$. En notant que $u(a) = (1 + \lambda)a$, on a donc $\mu = 1 + \lambda$, et le sous-espace propre associé est $\text{Vect}\{a\}$.

On a ainsi, dans tous les cas, $E = \text{Ker}(u - Id) \oplus^\perp \text{Ker}(u - (\lambda + 1)Id)$

■

14.2 Réduction de matrices symétriques

Exercice 14.3 (Polynôme annulateur d'une matrice symétrique) ★

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) telle que $A^4 + A^3 + A^2 = 0$. Que vaut A ?

Solution

A est symétrique réelle, donc, d'après le théorème spectral, ils existent $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in$

$\mathbb{R}$ tels que $P^T A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{bmatrix}$. On a donc

$$0 = P^T (A^4 + A^3 + A^2) P = \begin{bmatrix} Q(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & Q(\lambda_n) \end{bmatrix},$$

avec $Q = X^4 + X^3 + X^2 = X^2(X^2 + X + 1)$. Or, les seules racines réelles de Q sont 0 (de multiplicité 2), car le polynôme $X^2 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, d'où $A = 0$.

Exercice 14.4 (Une matrice orthogonale et symétrique) ★★

Soit la matrice $A = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 6 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$.

- Q1 - Montrer que A est symétrique et orthogonale.
- Q2 - Sans calculer le polynôme caractéristique, justifier que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Q3 - Toujours sans calculer le polynôme caractéristique, déterminer les valeurs propres de A . En déduire le polynôme minimal de A .

Solution

Q1 - A est clairement égale à sa transposée, donc $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. De plus, ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ (produit scalaire deux-à-deux nul et norme euclidienne égale à 1).

Q2 - A est symétrique réelle, donc d'après le théorème spectral, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (avec une matrice de passage orthogonale).

Q3 - Puisque A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, ils existent $P \in O_3(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $P^T A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$.

Puisque A est orthogonale, elle préserve la norme euclidienne, donc, pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, $|\lambda_i| = 1$ soit $\text{Sp}(A) \subseteq \{-1, 1\}$ (on peut le retrouver en testant avec les vecteurs propres).

De plus, la trace étant un invariant de similitude, on a $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{Tr}(A) = 1$. Les valeurs propres comptées avec multiplicité sont donc $\{-1, 1, 1\}$.

Le polynôme minimal de A étant scindé à racines simples, on a donc $\mu_A = (X - 1)(X + 1) = X^2 - 1$.

Exercice 14.5 (Somme des carrés des coefficients) ★★

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Q1 - Soient $n \in \mathbb{N}^*$ la dimension de E et $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(f_k)_{1 \leq k \leq n}$ deux bases orthonormées de E . Montrer que $\sum_{k=1}^n \|u(e_k)\|^2 = \sum_{k=1}^n \|u^*(f_k)\|^2$.

Q2 - En déduire que la quantité $\sum_{k=1}^n \|u(e_k)\|^2$ est indépendante de la base orthonormée $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ choisie.

Q3 - Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice symétrique réelle, et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres comptées avec multiplicité. Montrer que $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$.

Solution

Q1 - Comme $(f_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une base orthonormée, on a donc, pour tous $j, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\|u(e_k)\|^2 = \sum_{j=1}^n \langle u(e_k) | f_j \rangle^2$ et $\|u^*(f_j)\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle u^*(f_j) | e_k \rangle^2$. On obtient ainsi

$$\sum_{k=1}^n \|u(e_k)\|^2 = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \langle u(e_k) | f_j \rangle^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \langle u^*(f_j) | e_k \rangle^2 = \sum_{j=1}^n \|u^*(f_j)\|^2.$$

Q2 - Si $(e'_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une autre base orthonormée de E , alors on a, d'après la question précédente

$$\sum_{k=1}^n \|u(e_k)\|^2 = \sum_{k=1}^n \|u^*(f_k)\|^2 = \sum_{k=1}^n \|u(e'_k)\|^2.$$

Q3 - Si u est l'application linéaire canoniquement associée à A , alors en notant $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (qui est bien une base orthonormée), on a

$$\sum_{k=1}^n \|u(e_k)\|^2 = \sum_{k=1}^n \left\| \sum_{i=1}^n a_{i,k} e_i \right\|^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2.$$

De plus, A étant symétrique, d'après le théorème spectral, elle est diagonalisable dans une base orthonormée, ce qui est aussi le cas de u . Donc ils existent $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et une base orthonormée $(e'_k)_{1 \leq k \leq n}$ tels que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u(e'_k) = \lambda_k e'_k$. On a ainsi

$$\sum_{k=1}^n \|u(e'_k)\|^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$$

D'après la question précédente, on a $\sum_{k=1}^n \|u(e_k)\|^2 = \sum_{k=1}^n \|u(e'_k)\|^2$, ce qui conclut.

Exercice 14.6 (Norme d'une matrice symétrique) ★★

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On définit le rayon spectral de A , noté $\rho(A)$ par

$$\rho(A) := \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|.$$

On introduit également la norme subordonnée de A (relativement à la norme euclidienne $\|\cdot\|$), notée $\|A\|$ par

$$\|A\| = \max_{\substack{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ \|X\| \leq 1}} \|AX\|.$$

Montrer que $\|A\| = \rho(A)$.

Solution

Puisque A est symétrique réelle, d'après le théorème spectral, ils existent $P \in O_n(\mathbb{R})$ et

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ tels que } P^T A P = \Lambda := \begin{bmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Notons $e_1, \dots, e_n$ les colonnes de P , qui forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|X\| \leq 1$. Notons, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i = \langle X | e_i \rangle$. On a ainsi

$$\begin{aligned} \|AX\|^2 &= \left\| A \left(\sum_{i=1}^n \langle X | e_i \rangle e_i \right) \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n \langle X | e_i \rangle \lambda_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \langle X | e_i \rangle^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \rho(A)^2 \langle X | e_i \rangle^2 \leq \rho(A)^2 \sum_{i=1}^n \langle X | e_i \rangle^2 \leq \rho(A)^2 \|X\|^2 \leq \rho(A)^2. \end{aligned}$$

On a ainsi $\|A\| \leq \rho(A)$. Soit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|\lambda_{i_0}| = \rho(A)$. On a donc $A e_{i_0} = \lambda_{i_0} e_{i_0}$, donc $\|A e_{i_0}\| = \rho(A)$. La borne supérieure est bien atteinte, ce qui conclut.

Preuve alternative:

$$\text{On a ainsi } \|A\| = \max_{\substack{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ \|X\|=1}} \|P \Lambda P^T X\|.$$

La matrice P étant orthogonale, l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ $X \mapsto P^T X$ est en réalité un isomorphisme d'inverse $X \mapsto P X$, donnant ainsi $\|A\| = \max_{\substack{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ \|P X\|=1}} \|P \Lambda X\|$. De plus,

$$\|A\| = \max_{\substack{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ \|X\|=1}} \|P \Lambda X\| = \max_{\substack{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ \|X\|=1}} \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda| \|X\| = \rho(A).$$

14.3 Matrices (définies) positives

Exercice 14.7 (Une relation d'ordre sur les matrices symétriques) ★

Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $A \triangleleft B$ si et seulement si $B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\triangleleft$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Solution

Montrons les trois propriétés que doivent vérifier une relation d'ordre.

- Réflexivité: Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors $A - A = 0$. La matrice nulle est bien symétrique et est positive (ses valeurs propres sont positives ou nulles) donc $A \triangleleft A$.
- Antisymétrie: Si $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A \triangleleft B$ et $B \triangleleft A$, alors $A - B, B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Les valeurs propres de $A - B$ et $B - A$ sont donc positives ou nulles. Or, elles sont de signe opposé, donc toutes égales à 0. Donc $A - B = 0$ ($A - B$ est symétrique réelle, donc diagonalisable), soit $A = B$.
- Transitivité: Si $A, B, C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ avec $A \triangleleft B$ et $B \triangleleft C$, alors $B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $C - B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

D'une part, on a $C - A = C - B + B - A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ car l'ensemble des matrices symétriques réelles est un espace vectoriel.

D'autre part, si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors

$$X^T (C - A) X = X^T (C - B + B - A) X = \underbrace{X^T (C - B) X}_{\geq 0} + \underbrace{X^T (B - A) X}_{\geq 0} \geq 0,$$

donc $C - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, ce qui conclut. ■

Exercice 14.8 (Topologie et matrices symétriques) ★★

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.

Q1 - Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et est connexe par arcs.

Q2 - Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Est-il connexe par arcs ?

Solution

Q1 - Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Les applications

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \psi_X : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ M &\longmapsto M^T - M & M &\longmapsto \langle X | M X \rangle \end{aligned}$$

sont linéaires entre espaces vectoriels de dimension finie donc sont continues.

Première preuve de la fermeture de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$:

Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ convergeant vers une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Pour tous $k \in \mathbb{N}$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $A_k^T = A_k$ et $\langle X | A_k X \rangle \geq 0$. Par continuité des applications φ et ψ_X , on a, lorsque $k \rightarrow +\infty$, $A^T = A$ et $\langle X | AX \rangle \geq 0$, ce qui montre bien que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé.

Preuve alternative de la fermeture de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$:

On a $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{0\}) \cap \bigcap_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \psi_X^{-1}([0, +\infty[)$.

Le singleton $\{0\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $\varphi^{-1}(\{0\})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car φ est continue. De plus, $[0, +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$ donc $\psi_X^{-1}([0, +\infty[)$ est aussi un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car ψ_X est continue.

Par intersection, $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est donc un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Connexité par arcs de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$:

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Considérons l'application

$$\gamma : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & tA \end{array}.$$

C'est une application linéaire en t donc continue. La linéarité de la transposée assure que pour tout $t \in [0, 1]$, $\gamma(t) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. De plus, si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors pour tout $t \in [0, 1]$, $\langle X | tAX \rangle = t \langle X | AX \rangle \geq 0$, soit $tA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On a également $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) = A$. On peut donc relier par un chemin la matrice A à la matrice nulle tout en restant dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, ce qui montre que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Q2 - Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Le théorème spectral assure que A est diagonalisable dans une base orthonormée et que ses valeurs propres sont positives. Ainsi, ils existent $P \in O_n(\mathbb{R})$ et

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \text{ tels que } P^T A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{bmatrix}. \text{ On considère, pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \text{ la}$$

matrice $A_k := P \Lambda_k P^T$, où $\Lambda_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice diagonale telle que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(\Lambda_k)_{i,i} = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } \lambda_i = 0 \\ \lambda_i & \text{si } \lambda_i \neq 0 \end{cases}$. On a bien $A_k \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ ainsi que

$$\|A_k - A\|_\infty \leq \frac{\|P\|_\infty \|P^T\|_\infty}{k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

Donc on peut approcher une matrice symétrique positive par une suite de matrices symétriques définies positives, ce qui montre la densité de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

De plus, si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors ils existent $P \in O_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ tels que

$$P^T A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{bmatrix}. \text{ On introduit l'application}$$

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t &\longmapsto P \begin{bmatrix} \lambda_1^t & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^t \end{bmatrix} P^T \end{aligned}$$

Pour tout $t \in [0, 1]$, $\gamma(t)$ est symétrique et ses valeurs propres sont strictement positives, donc $\gamma(t) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. De plus, si $t_1, t_2 \in [0, 1]$, alors, si $\lambda > 0$, l'inégalité des accroissements finis assure que $|\lambda^{t_1} - \lambda^{t_2}| \leq |\ln(\lambda)|\lambda|t_1 - t_2|$. On obtient ainsi

$$\|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\|_\infty \leq \max_{1 \leq k \leq n} |\ln(\lambda_k)\lambda_k| \cdot \|P\|_\infty \|P^T\|_\infty |t_1 - t_2|.$$

γ est donc lipschitzienne sur $[0, 1]$, donc est continue. Enfin, $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma(1) = A$. On peut donc relier par un chemin la matrice A à la matrice identité tout en restant dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, ce qui montre que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

■

Exercice 14.9 (Matrice de Hilbert) ★★

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $H = \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Q1 - Soient $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Calculer $\int_0^1 x^{i+j-2} dx$.

Q2 - Montrer que $\langle HX | X \rangle = \int_0^1 P(x)^2 dx$ où $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme que l'on précisera.

Q3 - Montrer que H est symétrique définie positive.

Solution

Q1 - Sur $\mathbb{R}$, une primitive de la fonction $x \mapsto x^{i+j-2}$ est donnée par $x \mapsto \frac{x^{i+j-1}}{i+j-1}$, donnant

$$\text{ainsi } \int_0^1 x^{i+j-2} dx = \frac{1}{i+j-1}.$$

Q2 - On a

$$\begin{aligned}\langle HX|X \rangle &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{x_i x_j}{i+j-1} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \int_0^1 x^{i+j-2} dx \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j x^{i+j-2} \right) dx = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i x^{i-1} \right)^2 dx.\end{aligned}$$

On a bien le résultat demandé, avec $P = \sum_{i=1}^n x_i X^{i-1}$.

Q3 - H est clairement symétrique (symétrie des rôles joués par les indices $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$).

D'après la question précédente, H est positive.

Soit alors $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle HX|X \rangle = 0$. On a alors $\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i x^{i-1} \right)^2 dx = 0$, donc, puisque

la fonction $x \mapsto \left(\sum_{i=1}^n x_i x^{i-1} \right)^2$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0, 1]$, elle

est identiquement nulle sur $[0, 1]$. Ainsi, le polynôme $\sum_{i=1}^n x_i X^{i-1}$ admet une infinité de racines (tous les éléments de $[0, 1]$) donc est nul. Donc $X = 0$, ce qui conclut.

■

Chapitre 15

Fonctions à valeurs vectorielles

15.1 Dérivabilité de fonctions à valeurs matricielles

Exercice 15.1 (Une exponentielle de matrice) ★

Soit la fonction

$$\begin{aligned} M : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ t &\longmapsto \begin{bmatrix} 1 & e^t \\ -e^{-t} & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Q1 - Calculer $e^{M(t)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Q2 - Montrer que $t \mapsto e^{M(t)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. A-t-on $(e^M)' = M'e^M$?

Solution

Q1 - Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$M(t)^2 = \begin{bmatrix} 1 & e^t \\ -e^{-t} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & e^t \\ -e^{-t} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - e^t e^{-t} & e^t - e^t \\ -e^{-t} + e^{-t} & -e^{-t} e^t + 1 \end{bmatrix} = O.$$

Ainsi, par définition de l'exponentielle, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
 $e^{M(t)} = I_2 + M(t) = \begin{bmatrix} 2 & e^t \\ -e^{-t} & 0 \end{bmatrix}$

Q2 - Comme M est dérivable sur $\mathbb{R}$ (par dérivabilité des fonctions constante et exponentielle, donc de chacun de ses coefficients), par somme $e^M = I_2 + M$ est également dérivable sur M .

$$\text{D'une part, on a, pour tout } t \in \mathbb{R}, (e^M)'(t) = M'(t) = \begin{bmatrix} 0 & e^t \\ e^{-t} & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{D'autre part, on a, pour tout } t \in \mathbb{R}, M'(t)e^{M(t)} = \begin{bmatrix} 0 & e^t \\ e^{-t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & e^t \\ -e^{-t} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2e^{-t} & 1 \end{bmatrix}.$$

L'égalité n'est donc pas vérifiée.



Exercice 15.2 (Dérivée d'un produit matriciel) ★★

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction dérivable à valeurs matricielles.

Q1 - Montrer que la fonction

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t &\longmapsto A(t)A(t)^T \end{aligned}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Q2 - On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t) \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A'(t)A(t)^T \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (espace des matrices antisymétriques).

Solution

Q1 - L'application

$$\begin{aligned} F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (X, Y) &\longmapsto XY^T \end{aligned}$$

est bilinéaire entre espaces vectoriels de dimension finie. Ainsi, par composition (A est dérivable et $\phi = F(A, A)$), ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi'(t) = F(A'(t), A(t)) + F(A(t), A'(t)) = A'(t)A(t)^T + A(t)A'(t)^T$$

Q2 - Si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ est orthogonale, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) = I_n$ soit $\phi'(t) = 0$. Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi'(t) = A'(t)A(t)^T + [A'(t)A(t)^T]^T$, donc on obtient bien $[A'(t)A(t)^T]^T = -A'(t)A(t)^T$, ce qui conclut.

■

Exercice 15.3 (Annulation d'un déterminant) ★★

Soit $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction de classe C^2 . Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{vmatrix} X_1(a) & X_1(b) & X_1(t) \\ X_2(a) & X_2(b) & X_2(t) \\ X_3(a) & X_3(b) & X_3(t) \end{vmatrix},$$

où, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{bmatrix}$.

Q1 - Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et calculer ses deux premières dérivées.

Q2 - On suppose que $\begin{vmatrix} X_1(a) & X_1(b) & X'_1(a) \\ X_2(a) & X_2(b) & X'_2(a) \\ X_3(a) & X_3(b) & X'_3(a) \end{vmatrix} = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\begin{vmatrix} X_1(a) & X_1(b) & X''_1(c) \\ X_2(a) & X_2(b) & X''_2(c) \\ X_3(a) & X_3(b) & X''_3(c) \end{vmatrix} = 0$$

Solution

Q1 - Par multi-linéarité du déterminant, l'application

$$L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{vmatrix} X_1(a) & X_1(b) & x_1 \\ X_2(a) & X_2(b) & x_2 \\ X_3(a) & X_3(b) & x_3 \end{vmatrix}$$

est linéaire. De plus, on a $f = L \circ X$, donc, puisque X est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, f l'est également et on a $f' = L \circ X'$, $f'' = L \circ X''$, soit

$$f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f'' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{vmatrix} X_1(a) & X_1(b) & X'_1(t) \\ X_2(a) & X_2(b) & X'_2(t) \\ X_3(a) & X_3(b) & X'_3(t) \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad t \mapsto \begin{vmatrix} X_1(a) & X_1(b) & X''_1(t) \\ X_2(a) & X_2(b) & X''_2(t) \\ X_3(a) & X_3(b) & X''_3(t) \end{vmatrix}.$$

Q2 - Les propriétés du déterminant assurent que $f(a) = f(b) = 0$. f étant une fonction dérivable de la variable réelle à valeurs réelles, le théorème de Rolle assure qu'il existe $t_0 \in]a, c[$ tel que $f'(t_0) = 0$. Sachant que l'on a également $f'(a) = 0$ par hypothèse, le théorème de Rolle appliqué à f' assure qu'il existe $c \in]a, t_0[\subseteq]a, b[$ tel que $f''(c) = 0$, ce qui conclut.



Exercice 15.4 (Dérivée de l'inverse d'une matrice) ★★

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A : \mathbb{R} \mapsto GL_n(\mathbb{R})$ une fonction dérivable à valeurs matricielles inversibles. Montrer que la fonction

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\longrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \\ t &\longmapsto A(t)^{-1} \end{aligned}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Solution

Soit $t \in \mathbb{R}$. La formule de la comatrice assure que $A(t)^{-1} = \frac{1}{\det(A(t))} \text{Com}(A(t))^T$. Le déterminant et la comatrice (elle-même construite à partir de déterminants) étant des applications polynomiales en les coefficients de la matrice, la transposée étant linéaire, par composition avec A (continue car dérivable sur $\mathbb{R}$), ϕ est donc continue sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, si $t_0 \in \mathbb{R}$, et $t \neq t_0$, alors

$$\begin{aligned} \frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0} &= \frac{1}{t - t_0} [A(t)^{-1} - A(t_0)^{-1}] \\ &= \frac{1}{t - t_0} A(t)^{-1} [I_n - A(t)A(t_0)^{-1}] \\ &= \frac{1}{t - t_0} A(t)^{-1} [A(t_0) - A(t)] A(t_0)^{-1} \\ &= A(t)^{-1} \frac{1}{t - t_0} [A(t_0) - A(t)] A(t_0)^{-1}. \end{aligned}$$

Puisque A est dérivable en t_0 et ϕ est continue en t_0 , on a, par continuité du produit matriciel (qui est multi-linéaire) $\frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0} \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} -A(t_0)^{-1} A'(t_0) A(t_0)^{-1}$. ϕ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par

$$\begin{aligned} \phi' : \mathbb{R} &\longrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \\ t &\longmapsto -A(t)^{-1} A'(t) A(t)^{-1}. \end{aligned}$$

■

Exercice 15.5 (Déterminant et dérivation) ★ ★ ★

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On considère la fonction D_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{x^2}{2} & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{x^3}{3} & \frac{x^2}{2} & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & x & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \cdots & \frac{x^2}{2} & x \end{vmatrix}$$

Q1 - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $D'_n(x)$.

Q2 - En déduire $D_n(x)$ pour tous $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution

Q1 - Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Notons $C_1(x), \dots, C_n(x)$ les colonnes à l'intérieur du déterminant $D_n(x)$. On a ainsi

$$D_n(x) = \det([C_1(x)|C_2(x)|\cdots|C_n(x)]).$$

La n -linéarité du déterminant assure que D_n est dérivable (composition de polynôme et du déterminant, donc c'est une application polynomiale), donnant ainsi

$$\begin{aligned} D'_n(x) &= \det([C'_1(x)|C_2(x)|C_3(x)|\cdots|C_{n-1}(x)|C_n(x)]) \\ &+ \det([C_1(x)|C'_2(x)|C_3(x)|\cdots|C_{n-1}(x)|C_n(x)]) \\ &+ \det([C_1(x)|C_2(x)|C'_3(x)|\cdots|C_{n-1}(x)|C_n(x)]) \\ &+ \cdots \\ &+ \det([C_1(x)|C_2(x)|C_3(x)|\cdots|C'_{n-1}(x)|C_n(x)]) \\ &+ \det([C_1(x)|C_2(x)|C_3(x)|\cdots|C_{n-1}(x)|C'_n(x)]). \end{aligned}$$

En notant que pour tout $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $C'_j(x) = C_{j+1}(x)$, on a

$$\begin{aligned} D'_n(x) &= \det([C_2(x)|C_2(x)|C_3(x)|\cdots|C_{n-1}(x)|C_n(x)]) \\ &+ \det([C_1(x)|C_3(x)|C_3(x)|\cdots|C_{n-1}(x)|C_n(x)]) \\ &+ \det([C_1(x)|C_2(x)|C_4(x)|\cdots|C_{n-1}(x)|C_n(x)]) \\ &+ \cdots \\ &+ \det([C_1(x)|C_2(x)|C_3(x)|\cdots|C_n(x)|C_n(x)]) \\ &+ \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{x^2}{2} & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{x^3}{3} & \frac{x^2}{2} & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & x & 0 \\ \frac{x^n}{n!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \cdots & \frac{x^2}{2} & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Les $n - 1$ premiers termes s'annulent (deux colonnes identiques dans un déterminant l'annulent), donnant ainsi

$$D'_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{x^2}{2} & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{x^3}{3} & \frac{x^2}{2} & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & x & 0 \\ \frac{x^n}{n!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \cdots & \frac{x^2}{2} & 1 \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la dernière colonne, on a

$$D'_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & (0) \\ \frac{x^2}{2} & x & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} & \cdots & x \end{vmatrix} = D_{n-1}(x).$$

Q2 - Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque que $D_n(0) = 0$. On a $D_1(x) = x$, donc $D'_2(x) = D_1(x) = x$, soit $D_2(x) = \frac{x^2}{2}$. De plus, on a $D'_3(x) = \frac{x^2}{2}$, soit $D_3(x) = \frac{x^3}{3!}$.

Montrons par récurrence que $D_n(x) = \frac{x^n}{n!}$.

- **Initialisation:** On a bien $D_1(x) = x$.

- **Hérédité:** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $D_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ (Hypothèse de Récurrence). La relation de récurrence établie en première question assure que $D'_{n+1}(x) = D_n(x)$, donc $D'_{n+1}(x) = \frac{x^n}{n!}$ par hypothèse de récurrence. Ainsi, en intégrant, sachant que $D_{n+1}(0) = 0$, on a $D_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, ce qui conclut.



15.2 Intégration de fonctions à valeurs vectorielles

Exercice 15.6 (Majoration d'une intégrale) ★

Soient E un espace euclidien (muni de la norme euclidienne notée $\|\cdot\|$), a, b des réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow E$ une fonction de classe C^1 telle que $f(a) = 0$. Montrer que

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \sup_{t \in [a, b]} \|f'(t)\|.$$

Solution

D'après le théorème fondamental de l'analyse, puisque f est de classe C^1 et $f(a) = 0$, on a, pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) = \int_a^t f'(s)ds$. Ainsi, on a

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| = \left\| \int_a^b \left(\int_a^t f'(s)ds \right) dt \right\|.$$

En appliquant deux fois l'inégalité triangulaire sur les intégrales, on a donc

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \left\| \int_a^t f'(s)ds \right\| dt \leq \int_a^b \left(\int_a^t \|f'(s)\| ds \right) dt.$$

On applique l'inégalité de la moyenne sur l'intégrale $\int_a^t \|f'(s)\| ds$, donnant ainsi

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \sup_{s \in [a,t]} \|f'(s)\| (t-a) dt \leq \sup_{s \in [a,b]} \|f'(s)\| \int_a^b (t-a) dt.$$

Puisque $\int_a^b (t-a)dt = \frac{(b-a)^2}{2}$, on a le résultat souhaité.

■

Exercice 15.7 (L'intégrale reste dans un sous-espace vectoriel) ★★

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E , a, b deux réels tels que $a < b$, et $f : [a, b] \rightarrow E$ une fonction continue par morceaux telle que pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \in F$. Montrer que $\int_a^b f(t)dt \in F$.

Solution

Posons $n := \dim(E)$ et $p := \dim(F)$. Soit $\{e_1, \dots, e_p\}$ une base de F , que l'on complète en $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E . Puisque pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \in F$, on a donc, sur $[a, b]$, $f = \sum_{k=1}^p (e_k^* \circ f) e_k$. Ainsi, on obtient $\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=1}^p \underbrace{\left(\int_a^b e_k^*(f(t))dt \right)}_{\in \mathbb{R}} e_k \in F$

■

Exercice 15.8 (Relèvement) ★ ★ ★

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^n sur I (où $n \in \mathbb{N}^*$) telle que pour tout $t \in I$, $|f(t)| = 1$.

Q1 - Montrer que si deux fonctions $\theta_1, \theta_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n sur I vérifient, pour tout $t \in I$, $f(t) = e^{i\theta_1(t)} = e^{i\theta_2(t)}$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $t \in I$, $\theta_1(t) = \theta_2(t) + 2ik\pi$. L'entier k est indépendant de t .

Q2 - Montrer que $\frac{1}{f}$ est de classe C^n sur I .

Q3 - Soient $t_0 \in I$, θ_0 un argument de $f(t_0)$ et on considère la fonction

$$\begin{aligned} \theta : I &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \theta_0 - i \int_{t_0}^t \frac{f'(s)}{f(s)} ds . \end{aligned}$$

Montrer que θ est de classe C^n sur I et que pour tout $t \in I$, $f(t) = e^{i\theta(t)}$.

Q4 - Montrer que θ est à valeurs réelles.

Solution

Q1 - Soit $t \in I$. On a $e^{i(\theta_1(t) - \theta_2(t))} = 1$, donc il existe $k_t \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta_1(t) = \theta_2(t) + 2ik_t\pi$.

Montrons que k_t ne dépend pas de t . La fonction $t \mapsto \theta_1(t) - \theta_2(t)$ étant continue sur I , qui est connexe par arcs, son image, donnée par $\{k_t, t \in I\} \subseteq \mathbb{Z}$ doit également être connexe par arcs. Ainsi, k_t doit toujours être égal à un unique entier $k \in \mathbb{Z}$ (les parties connexes par arcs de $\mathbb{Z}$ pour la topologie de $\mathbb{R}$ sont les singletons).

Q2 - Soit $t \in I$. $\frac{1}{f(t)} = \frac{\overline{f(t)}}{|f(t)|^2} = \overline{f(t)}$ puisque f est de module constant égal à 1. La conjugaison étant une opération linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, $\frac{1}{f}$ est bien de classe C^n sur I .

Q3 - Comme f' , $\frac{1}{f}$ sont respectivement de classe C^{n-1} et C^n sur I , par produit, $\frac{f'}{f}$ est également de classe C^{n-1} sur I . Ainsi, $t \mapsto \int_{t_0}^t \frac{f'(s)}{f(s)} ds$ est une primitive de $\frac{f'}{f}$ sur I , donc est de classe C^n sur I . Ainsi, $\theta \in C^n(I, \mathbb{C})$.

Considérons la fonction

$$\begin{aligned} g : I &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto f(t)e^{-i\theta(t)} . \end{aligned}$$

g est bien de classe C^1 sur I (composition entre le produit de deux nombres complexes qui est une application bilinéaire $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ et $f, \exp \circ (-i\theta)$ qui sont de classe C^1 sur I).

On a donc, pour tout $t \in I$,

$$g'(t) = f'(t)e^{-i\theta(t)} - i\theta'(t)f(t)e^{i\theta(t)} = \left[f'(t) - i \left(-i \frac{f'(t)}{f(t)} \right) f(t) \right] e^{-i\theta(t)} = 0.$$

g est donc constante égale à $g(t_0) = f(t_0)e^{-\theta_0} = 1$, donc, pour tout $t \in I$, $f(t) = e^{i\theta(t)}$.

Q4 - Soit $t \in I$. On a $1 = |f(t)| = |e^{i\theta(t)}| = e^{-\text{Im}(\theta(t))}$, donc $\text{Im}(\theta) = 0$, ce qui conclut.



15.3 Formules de Taylor

Exercice 15.9 (Dérivée bornée) ★★

Soient E un espace vectoriel normé (muni d'une norme notée $\|\cdot\|$) de dimension finie et $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ une fonction de classe C^2 . On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$. On pose $M_0 := \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|$ et $M_2 := \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f''(t)\|$.

Q1 - Soient $t \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Montrer que $\|f'(t)\| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$.

Q2 - En déduire que $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|f'(t)\| \leq 2\sqrt{M_0M_2}$.

Solution

Q1 - D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$\|f(t+h) - f(t) - hf'(t)\| \leq \frac{h^2M_2}{2}.$$

En appliquant l'inégalité triangulaire à gauche, on a

$$h\|f'(t)\| - \|f(t+h) - f(t)\| \leq \frac{h^2M_2}{2},$$

soit alors

$$h\|f'(t)\| \leq \|f(t+h) - f(t)\| + \frac{h^2M_2}{2} \leq \|f(t+h)\| + \|f(t)\| + \frac{h^2M_2}{2} \leq 2M_0 + \frac{h^2M_2}{2}.$$

En divisant par h , on a le résultat souhaité, montrant par ailleurs que f' est bornée sur $\mathbb{R}$.

Q2 - Considérons la fonction

$$\begin{aligned}\phi :]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.\end{aligned}$$

ϕ est bien dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$\begin{aligned}\phi' :]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto -\frac{2M_0}{h^2} + \frac{M_2}{2}.\end{aligned}$$

On a $\phi'(h) = 0 \iff h = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}.$

- Si $h < 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$, alors $\phi'(h) < 0$.

- Si $h > 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$, alors $\phi'(h) > 0$.

On en déduit le tableau de variation de ϕ :

h	0	$2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$	$+\infty$
$\phi'(h)$	-	0	+
$\phi(h)$	$+\infty$	$\sqrt{M_0 M_2}$	$+\infty$

On en déduit donc que pour tout $h > 0$, $\phi(h) \geq 2\sqrt{M_0 M_2}$, donnant ainsi le résultat souhaité.

■

Exercice 15.10 (Dérivée seconde minorée) ★★

Soient E un espace vectoriel normé (muni d'une norme notée $\|\cdot\|$) de dimension finie et $f : [0, 1] \longrightarrow E$ une fonction de classe C^2 . On suppose que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $\|f(1)\| = 1$. On pose et $M_2 := \sup_{t \in [0,1]} \|f''(t)\|$.

Q1 - Montrer que $\left\|f\left(\frac{1}{2}\right)\right\| \leq \frac{1}{8}M_2$ et $\left\|f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1)\right\| \leq \frac{1}{8}M_2$

Q2 - En déduire que $M_2 \geq 4$.

Solution

Q1 - D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$\left\| f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) - \frac{1}{2}f'(0) \right\| \leq \frac{1}{8} \sup_{t \in [0, \frac{1}{2}]} \|f''(t)\| \leq \frac{1}{8}M_2,$$

ainsi que

$$\left\| f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) - \frac{1}{2}f'(1) \right\| \leq \frac{1}{8} \sup_{t \in [\frac{1}{2}, 1]} \|f''(t)\| \leq \frac{1}{8}M_2.$$

Sachant que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$, on a le résultat souhaité.

Q2 - Puisque $\|f(1)\| = 1$, on a

$$1 = \|f(1)\| = \left\| f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) \right\| \leq \left\| f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right\| + \left\| f\left(\frac{1}{2}\right) \right\| \leq \frac{1}{4}M_2,$$

ce qui donne le résultat.

■

Chapitre 16

Equations différentielles linéaires

16.1 Systèmes différentiels linéaires

Exercice 16.1 (Résolution de systèmes différentiels linéaires) ★★

Résoudre les systèmes différentiels suivants:

$$\text{Q1 - } \begin{cases} x' = 3x - 6y \\ y' = x - y - z \\ z' = -x + 4z \end{cases}$$

$$\text{Q2 - } \begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = -x + y - z \\ z' = -x + 2y + 2z \end{cases}$$

$$\text{Q3 - } \begin{cases} x' = x - 2y - 2z \\ y' = 3y + 2z \\ z' = -x - y + 2z \end{cases}$$

Solution

Q1 - On pose $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$. L'équation est donc équivalente à $X'(t) = AX(t)$ où $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

- **Réduction de A:** Calculons le polynôme caractéristique de A.

$$\begin{aligned}\chi_A &= \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-3 & 6 & 0 \\ -1 & X+1 & 1 \\ 1 & 0 & X-4 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\rightarrow L_1}{=} (X-3) \begin{vmatrix} X+1 & 1 \\ 0 & X-4 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & X-4 \end{vmatrix} \\ &= (X-3)(X+1)(X-4) - 6(4-X-1) \\ &= (X-3)(X^2-3X-4) + 6(X-3) \\ &= (X-3)(X^2-3X+2) \\ &= (X-1)(X-2)(X-3)\end{aligned}$$

Donc $\text{Sp}(A) = \{1, 2, 3\}$, les valeurs propres de A sont toutes de multiplicité 1, A est bien diagonalisable.

Recherchons les sous-espaces propres de A . Soit $V = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}V \in E_1(A) &\iff AV = V \\ &\iff \begin{cases} 3u - 6v &= u \\ u - v - w &= v \\ -u + 4w &= w \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2u - 6v &= 0 \\ u - 2v - w &= 0 \\ -u + 3w &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u - 3v &= 0 \\ u - 2v - w &= 0 \\ u - 3w &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u - 3v &= 0 \\ u - 3w &= 0 \end{cases} \\ &\iff V \in \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \\ &\iff E_1(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V \in E_2(A) &\iff AV = 2V \\ &\iff \begin{cases} 3u - 6v &= 2u \\ u - v - w &= 2v \\ -u + 4w &= 2w \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u - 6v &= 0 \\ u - 3v - w &= 0 \\ -u + 2w &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u - 6v &= 0 \\ u - 3v - w &= 0 \\ u - 2w &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u - 6v &= 0 \\ u - 2w &= 0 \end{cases} \\ &\iff V \in \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \\ &\iff E_2(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V \in E_3(A) &\iff AV = 3V \\ &\iff \begin{cases} 3u - 6v &= 3u \\ u - v - w &= 3v \\ -u + 4w &= 3w \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -6v &= 0 \\ u - 2v - w &= 0 \\ -u + w &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -v &= 0 \\ u - w &= 0 \\ -u + w &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} v &= 0 \\ u - w &= 0 \end{cases} \\ &\iff V \in \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \\ &\iff E_3(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Ainsi, notre matrice de passage est donnée par $P = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ et on a

$$D := P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- **Résolution du système différentiel:** En posant $Y(t) = P^{-1}X(t)$, on a, par linéarité de la dérivation,

$$Y'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) = P^{-1}APY(t) = DY(t),$$

soit $Y(t) = e^{tD}Y(0)$, donc $X(t) = Pe^{tD}X_0$, $X_0 \in \mathbb{R}^3$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X(t) = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \alpha \\ e^{2t} \beta \\ e^{3t} \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^t \alpha + 6e^{2t} \beta + e^{3t} \gamma \\ e^t \alpha + e^{2t} \beta \\ e^t \alpha + 3e^{2t} \beta + e^{3t} \gamma \end{bmatrix}, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$$

Q2 - On pose $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$. L'équation est donc équivalente à $X'(t) = AX(t)$ où $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

- **Réduction de A:** Calculons le polynôme caractéristique de A.

$$\begin{aligned} \chi_A &= \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-3 & 2 & 0 \\ 1 & X-1 & 1 \\ 1 & -2 & X-2 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\rightarrow L_1}{=} (X-3) \begin{vmatrix} X-1 & 1 \\ -2 & X-2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & X-2 \end{vmatrix} \\ &= (X-3) [(X-1)(X-2) + 2] - 2(X-2-1) \\ &= (X-3)(X^2 - 3X + 4) - 2(X-3) \\ &= (X-3)(X^2 - 3X + 2) \\ &= (X-1)(X-2)(X-3) \end{aligned}$$

Donc $\text{Sp}(A) = \{1, 2, 3\}$, les valeurs propres de A sont toutes de multiplicité 1, A est bien diagonalisable.

Recherchons les sous-espaces propres de A. Soit $V = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} V \in E_1(A) &\iff AV = V \\ &\iff \begin{cases} 3u - 2v &= u \\ -u + v - w &= v \\ -u + 2v + 2w &= w \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2u - 2v &= 0 \\ -u &- w = 0 \\ -u + 2v + w &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u - v &= 0 \\ u &+ w = 0 \\ u - 2v - w &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u - v &= 0 \\ u &+ w = 0 \end{cases} \\ &\iff V \in \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \\ &\iff E_1(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V \in E_2(A) &\iff AV = 2V \\ &\iff \begin{cases} 3u - 2v &= 2u \\ -u + v - w &= 2v \\ -u + 2v + 2w &= 2w \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u - 2v &= 0 \\ -u - v - w &= 0 \\ -u + 2v &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u - 2v &= 0 \\ -3v - w &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u - 2v &= 0 \\ 3v + w &= 0 \end{cases} \\ &\iff V \in \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\} \\ &\iff E_2(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V \in E_3(A) &\iff AV = 3V \\
&\iff \begin{cases} 3u - 2v &= 3u \\ -u + v - w &= 3v \\ -u + 2v + 2w &= 3w \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -2v &= 0 \\ -u - 2v - w &= 0 \\ -u + 2v - w &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -2v &= 0 \\ -u - 2v - w &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} v &= 0 \\ u + w &= 0 \end{cases} \\
&\iff V \in \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \\
&\iff E_3(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Ainsi, notre matrice de passage est donnée par $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ et on a

$$D := P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- **Résolution du système différentiel:** En posant $Y(t) = P^{-1}X(t)$, on a, par linéarité de la dérivation,

$$Y'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) = P^{-1}APY(t) = DY(t),$$

soit $Y(t) = e^{tD}Y(0)$, donc $X(t) = Pe^{tD}X_0$, $X_0 \in \mathbb{R}^3$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \alpha \\ e^{2t} \beta \\ e^{3t} \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \alpha + 2e^{2t} \beta - e^{3t} \gamma \\ e^t \alpha + e^{2t} \beta \\ -e^t \alpha - 3e^{2t} \beta + e^{3t} \gamma \end{bmatrix}, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$$

Q3 - On pose $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$. L'équation est donc équivalente à $X'(t) = AX(t)$ où $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

- **Réduction de A:** Calculons le polynôme caractéristique de A.

$$\begin{aligned}\chi_A &= \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-1 & 2 & 2 \\ 0 & X-3 & -2 \\ 1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\downarrow C_1}{=} (X-1) \begin{vmatrix} X-3 & -2 \\ 1 & X-2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ X-3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (X-1) [(X-3)(X-2) + 2] + [-4 - 2(X-3)] \\ &= (X-1)(X^2 - 5X + 8) - 2(X-1) \\ &= (X-1)(X^2 - 5X + 6) \\ &= (X-1)(X-2)(X-3)\end{aligned}$$

Donc $\text{Sp}(A) = \{1, 2, 3\}$, les valeurs propres de A sont toutes de multiplicité 1, A est bien diagonalisable.

Recherchons les sous-espaces propres de A . Soit $V = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}V \in E_1(A) &\iff AV = V \\ &\iff \begin{cases} u - 2v - 2w = u \\ 3v + 2w = v \\ -u - v + 2w = w \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} - 2v - 2w = 0 \\ 2v + 2w = 0 \\ -u - v + w = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} v + w = 0 \\ v + w = 0 \\ u + v - w = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} v + w = 0 \\ u + 2v = 0 \end{cases} \\ &\iff V \in \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \\ &\iff E_1(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V \in E_2(A) &\iff AV = 2V \\ &\iff \begin{cases} u - 2v - 2w = 2u \\ 3v + 2w = 2v \\ -u - v + 2w = 2w \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -u - 2v - 2w = 0 \\ v + 2w = 0 \\ -u - v = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -u - 2v - 2w = 0 \\ v + 2w = 0 \\ u + v = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} v + 2w = 0 \\ u + v = 0 \end{cases} \\ &\iff V \in \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \\ &\iff E_2(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V \in E_3(A) &\iff AV = 3V \\ &\iff \begin{cases} u - 2v - 2w = 3u \\ 3v + 2w = 3v \\ -u - v + 2w = 3w \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2u - 2v - 2w = 0 \\ 2w = 0 \\ -u - v - w = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2u + 2v = 0 \\ u + v = 0 \\ w = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u + v = 0 \\ w = 0 \end{cases} \\ &\iff V \in \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &\iff E_3(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Ainsi, notre matrice de passage est donnée par $P = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ et on a

$$D := P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- **Résolution du système différentiel:** En posant $Y(t) = P^{-1}X(t)$, on a, par linéarité de la dérivation,

$$Y'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) = P^{-1}APY(t) = DY(t),$$

soit $Y(t) = e^{tD}Y(0)$, donc $X(t) = Pe^{tD}X_0$, $X_0 \in \mathbb{R}^3$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X(t) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \alpha \\ e^{2t} \beta \\ e^{3t} \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^t \alpha + 2e^{2t} \beta + e^{3t} \gamma \\ -e^t \alpha - 2e^{2t} \beta - e^{3t} \gamma \\ e^t \alpha + e^{2t} \beta \end{bmatrix}, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$$

■

Exercice 16.2 (Un système différentiel d'ordre 4) ★★

On souhaite résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x_1' = & & & x_3 \\ x_2' = & & & x_4 \\ x_3' = & -x_2 & +x_3 & +x_4 \\ x_4' = & -x_1 & & +x_3 +x_4 \end{cases}$$

- Q1 - En posant $u = x_1 + x_2$ et $v = x_1 - x_2$, montrer que u et v vérifient respectivement l'équation différentielle $u'' - 2u' + u = 0$ et $v'' - v = 0$
- Q2 - Calculer u et v .
- Q3 - En déduire x_1 et x_2 , puis x_3 et x_4 .

Solution

- Q1 - D'une part, on a $u' = x_1' + x_2' = x_3 + x_4$ et $u'' = x_3' + x_4' = -x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4$ soit alors $u'' - 2u' + u = 0$.

D'autre part, on a $v' = x_1' - x_2' = x_3 - x_4$ et $v'' = x_3' - x_4' = -x_2 + x_1$ soit alors $v'' - v = 0$.

- Q2 - D'une part, u vérifie $u'' - 2u' + u = 0$. Le polynôme de degré 2 associé à l'équation est donné par $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$, donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = (\lambda_1 + \mu_1 t)e^t$, où $\lambda_1, \mu_1 \in \mathbb{R}$.

D'autre part, v vérifie $v'' - v = 0$. Le polynôme de degré 2 associé à l'équation est donné par $X^2 - 1 = (X + 1)(X - 1)$, donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $v(t) = \lambda_2 e^t + \mu_2 e^{-t}$, où $\lambda_2, \mu_2 \in \mathbb{R}$.

- Q3 - Puisque l'on a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = u \\ x_1 - x_2 = v \end{cases},$$

la résolution de ce système linéaire assure que $x_1 = \frac{1}{2}(u+v)$ et $x_2 = \frac{1}{2}(u-v)$, soit alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x_1(t) = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)e^t + \frac{1}{2}\mu_1 te^t + \frac{1}{2}\mu_2 e^{-t}$ et $x_2(t) = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)e^t + \frac{1}{2}\mu_1 te^t - \frac{1}{2}\mu_2 e^{-t}$, soit, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x_1(t) &= (\lambda_1 + \lambda_2)e^t + \mu_1 te^t + \mu_2 e^{-t} \\ x_2(t) &= (\lambda_1 - \lambda_2)e^t + \mu_1 te^t - \mu_2 e^{-t} \end{cases},$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$. De plus, puisque $x_3 = x'_1$ et $x_4 = x'_2$, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x_3(t) &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)e^t + \mu_1 te^t - \mu_2 e^{-t} \\ x_4(t) &= (\lambda_1 - \lambda_2 + \mu_1)e^t + \mu_1 te^t + \mu_2 e^{-t} \end{cases},$$

■

Exercice 16.3 (Une équation linéaire presque différentielle) ★ ★ ★

On considère l'équation

$$f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad [\star]$$

d'inconnue $f \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

- Q1 - Montrer que toute solution de l'équation $[\star]$ est de classe $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et est solution de l'équation différentielle $x^2 y'' + y = 0$.
- Q2 - A l'aide du changement de variable $x = e^t$, résoudre l'équation différentielle trouvée en première question. En déduire que l'ensemble des solutions d' $[\star]$ est inclus dans

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto \lambda \sqrt{x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \frac{\pi}{3}\right), \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Q3 - Montrer que les fonctions appartenant à l'ensemble précédent sont bien solutions d' $[\star]$.

Solution

Q1 - Soit f une solution d' $[\star]$. f est de classe $\mathbb{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$, $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Par composition des fonctions f et $x \mapsto \frac{1}{x}$, toutes deux de classe $\mathbb{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (la fonction inverse va de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}_+^*$), f' est de classe $\mathbb{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f est de classe $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, la dérivée d'une composée assure que pour tout $x > 0$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$, soit

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} f(x) \iff x^2 f''(x) + f(x) = 0.$$

Cela correspond à l'équation demandée.

Q2 - Faisons le changement de variable $x = e^t$. Posons $g(t) = f(x) = f(e^t)$. Par composition, g est de classe $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g'(t) = e^t f'(e^t).$$

De plus,

$$g''(t) = \underbrace{e^t f'(e^t)}_{=g'(t)} + \underbrace{e^{2t} f''(e^t)}_{=x^2 f''(x)=-f(x)} = g'(t) - g(t).$$

g est donc solution de l'équation différentielle du second ordre $y'' - y' + y = 0$. Le polynôme caractéristique associé à cette équation est donc donné par $X^2 - X + 1$, dont les racines sont $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, les solutions (à valeurs réelles) sont données par

$$t \mapsto e^{\frac{t}{2}} \left[\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right].$$

Ainsi, en revenant au changement de variable inverse $t = \ln x$, on obtient des solutions de la forme

$$x \mapsto \sqrt{x} \left[\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \right],$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Soit f une telle solution. Ils existent donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \left[\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \right] \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} \left[-\lambda \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + \mu \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \right], \end{aligned}$$

ainsi que

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left[\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) - \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \right].$$

f étant solution d'[*], l'égalité $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ assure, en identifiant les coefficients devant les fonctions sinus et cosinus, que

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\lambda + \frac{\sqrt{3}}{2}\mu = \lambda \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu = -\mu \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{1}{2}\lambda + \frac{\sqrt{3}}{2}\mu = 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda + \frac{3}{2}\mu = 0 \end{cases} \iff \lambda = \sqrt{3}\mu.$$

On obtient donc, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} \left[\lambda \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \lambda \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) \right] \\ &= \frac{2\lambda\sqrt{3}}{3} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) + \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) \right] \\ &= \frac{2\lambda\sqrt{3}}{3} \left[\sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) + \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) \right] \\ &= \frac{2\lambda\sqrt{3}}{3} \sqrt{x} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \frac{\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

On a bien $f \in \mathcal{S}$.

Q3 - Nous avons fait l'analyse, faisons la synthèse, i.e. montrons que tout élément de $\mathcal{S}$ est solution. Soit $f \in \mathcal{S}$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \lambda \sqrt{x} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \frac{\pi}{3} \right).$$

On a ainsi, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\lambda}{2\sqrt{x}} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\lambda\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{x}} \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \frac{\pi}{3} \right) + \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \frac{\pi}{3} \right) \right] \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{x}} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \frac{2\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

De plus, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{\lambda}{\sqrt{x}} \sin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \frac{\pi}{3} \right) \\ &= -\frac{\lambda}{\sqrt{x}} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x - \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{x}} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x - \frac{\pi}{3} + \pi \right) \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{x}} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \frac{2\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est bien égal à $\mathcal{S}$.

■

16.2 Equations différentielles scalaires du second ordre

Exercice 16.4 (Des solutions vers l'équation) ★★

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $y_1, y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^2 . On suppose que la fonction $w = y_1 y_2' - y_1' y_2$ ne s'annule pas sur I .

- Q1 - Soient $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que y_1 et y_2 soient solutions de l'équation différentielle $y'' + py' + qy = 0$ sur I . Montrer que p et q existent et sont uniques.
- Q2 - Trouver une expression de p et q en fonction de y_1, y_2 et de leurs dérivées. Montrer que ce sont bien des fonctions continues.
- Q3 - Montrer qu'avec les fonctions p et q trouvées, y_1 et y_2 sont bien solutions de l'équation différentielle $y'' + py' + qy = 0$.

Solution

- Q1 - Puisque y_1 et y_2 sont solutions de l'équation différentielle $y'' + py' + qy = 0$, alors on a, pour tout $t \in I$

$$\begin{cases} y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t) = 0 \\ y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1'(t)p(t) + y_1(t)q(t) = -y_1''(t) \\ y_2'(t)p(t) + y_2(t)q(t) = -y_2''(t) \end{cases}$$

Puisque pour tout $t \in I$, $w(t) \neq 0$, ce système linéaire admet une unique solution $(p(t), q(t))$. Donc p et q existent et sont uniques.

- Q2 - Soit $t \in I$. En utilisant la formule de la comatrice, on obtient

$$\begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix} = -\frac{1}{w(t)} \begin{bmatrix} y_2(t) & -y_1(t) \\ -y_2'(t) & y_1'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y_1''(t) \\ -y_2''(t) \end{bmatrix}.$$

Soit alors $p = \frac{y_1'' y_2 - y_1 y_2''}{w}$ et $q = \frac{y_1' y_2'' - y_1'' y_2'}{w}$. p et q sont des quotients de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Elles sont donc continues.

- Q3 - D'une part, sur I , nous avons

$$\begin{aligned} y_1'' + py_1' + qy_1 &= \frac{(y_1 y_2' - y_1' y_2) y_1'' + (y_1'' y_2 - y_1 y_2'') y_1' + (y_1' y_2'' - y_1'' y_2') y_1}{w} \\ &= \frac{y_1 y_1'' y_2' - y_1' y_1'' y_2 + y_1' y_1'' y_2 - y_1 y_1' y_2'' + y_1 y_1' y_2'' - y_1 y_1'' y_2'}{w} \\ &\stackrel{1-6,2-3,4-5}{=} 0. \end{aligned}$$

D'autre part, toujours sur I , nous avons

$$\begin{aligned}
y_2'' + py_2' + qy_2 &= \frac{(y_1y_2' - y_1'y_2)y_2'' + (y_1''y_2 - y_1y_2'')y_2' + (y_1'y_2'' - y_1''y_2')y_2}{w} \\
&= \frac{y_1y_2'y_2'' - y_1'y_2y_2'' + y_1''y_2y_2' - y_1y_2'y_2'' + y_1'y_2y_2'' - y_1''y_2y_2'}{w} \\
&\stackrel{1-4,2-5,3-6}{=} 0.
\end{aligned}$$

Exercice 16.5 (Changement de variable) ★★

Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $t^2y'' + 2ty' + y = 0$ en faisant le changement de variable $t = e^s$.

Solution

Soit $s \in \mathbb{R}$. En posant $t = e^s$, on a bien $t \in]0, +\infty[$. Posons alors, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $z(s) = y(e^s)$. Par composition, z est bien deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a alors, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $z'(s) = e^s y'(e^s)$ et $z''(s) = e^{2s} y''(e^s) + e^s y'(e^s)$. Puisque $t = e^s$, on obtient finalement $z'(s) = ty'(t)$ et $z''(s) = t^2y''(t) + ty'(t)$. On a alors

$$\begin{aligned}
t^2y''(t) + 2ty'(t) + y(t) = 0 &\iff t^2y''(t) + ty'(t) + ty'(t) + y(t) = 0 \\
&\stackrel{t=e^s}{\iff} z''(s) + z'(s) + z(s) = 0.
\end{aligned}$$

z est donc solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants que l'on sait résoudre, donnant ainsi, pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$z(s) = e^{-\frac{s}{2}} \left[\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) \right], (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Puisque $t = e^s$, on a donc, pour tout $t \in]0, +\infty[$, $s = \ln(t)$, soit alors

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \left[\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(t)\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(t)\right) \right], (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

De plus, en dérivant, on a, pour tout $t > 0$,

$$y'(t) = \frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}} \left[(-\lambda + \mu\sqrt{3}) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(t)\right) + (-\mu - \lambda\sqrt{3}) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(t)\right) \right]$$

et

$$\begin{aligned}
t \frac{d}{dt} [ty'(t)] &= \frac{1}{2t^{\frac{1}{2}}} \left[(-\lambda - \mu\sqrt{3}) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(t)\right) + (-\mu + \lambda\sqrt{3}) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(t)\right) \right] \\
&= t^2y''(t) + ty'(t).
\end{aligned}$$

Or, on a, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned}
 ty'(t) + y(t) &= \frac{1}{2t^{\frac{1}{2}}} \left[(\lambda + \mu\sqrt{3}) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(t)\right) + (\mu - \lambda\sqrt{3}) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(t)\right) \right] \\
 &= -t^2 y''(t) - ty'(t).
 \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien, pour tout $t > 0$, $t^2 y''(t) + 2ty'(t) + y(t) = 0$

Exercice 16.6 (Solution développable en série entière et réduction d'ordre) ★ ★ ★

On souhaite résoudre sur $]0, 1[$ l'équation différentielle

$$t(t-1)y'' + 3ty' + y$$

- Q1 - Trouver une solution y_1 de cette équation différentielle développable en série entière.
- Q2 - Trouver une autre solution y_2 linéairement indépendante de y_1 à l'aide d'un changement de fonction inconnue (réduction d'ordre).

Solution

Q1 - Soit $y_1(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ une solution développable en série entière, où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est la suite des coefficients à déterminer.

On a donc

$$\begin{aligned}
 &t(t-1)y_0''(t) + 3ty_0'(t) + y_0(t) = 0 \\
 \Leftrightarrow &t(t-1) \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + 3t \sum_{n=0}^{+\infty} na_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0 \\
 \Leftrightarrow &\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} (3n+1)a_n t^n = 0 \\
 \Leftrightarrow &\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + 2n + 1)a_n t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-1} = 0 \\
 \Leftrightarrow &\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 a_n t^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-1} = 0 \\
 \Leftrightarrow &\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 a_n t^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1} t^n = 0 \\
 \Leftrightarrow &a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) [(n+1)a_n - na_{n+1}] t^n = 0.
 \end{aligned}$$

Par identification des coefficients, on trouve $a_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n$, soit $a_n = na_1$. On a ainsi, pour tout $t \in]0, 1[$ (le rayon de convergence de cette série est bien de 1).

$$y_1(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} nt^n = t \sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1} = t \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1-t} \right) = \frac{t}{(1-t)^2}.$$

On a de plus, pour tout $t \in]0, 1[$,

$$y_1'(t) = \frac{(1-t)^2 + 2t(1-t)}{(1-t)^4} = \frac{1+t}{(1-t)^3}$$

$$\text{et } y_1''(t) = \frac{(1-t)^3 + 3(1-t)^2(1+t)}{(1-t)^6} = \frac{1-t+3(1+t)}{(1-t)^4} = \frac{4+2t}{(1-t)^4}.$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} t(t-1)y_1''(t) + 3ty_1'(t) + y_1(t) &= \frac{-t(4+2t)}{(1-t)^3} + \frac{3t(1+t)}{(1-t)^3} + \frac{t}{(1-t)^2} \\ &= \frac{-4t - 2t^2 + 3t + 3t^2 + t - t^2}{(1-t)^3} \\ &= 0. \end{aligned}$$

y_0 est bien une solution de l'équation différentielle développable en série entière.

Q2 - On pose, pour tout $t \in]0, 1[$, $y_2(t) = \lambda(t)y_1(t)$ où λ est une fonction que l'on va rechercher. y_2 est solution de l'équation différentielle. On a ainsi

$$\begin{aligned} t(1-t)y_2'' + 3ty_2' + y_2 &= 0 \iff t(t-1)(\lambda y_1)'' + 3t(\lambda y_1)' + \lambda y_1 = 0 \\ &\iff t(t-1)(\lambda'' y_1 + 2\lambda' y_1' + \lambda y_1'') \\ &\quad + 3t(\lambda' y_1 + \lambda y_1') + \lambda y_1 = 0 \\ &\iff \underbrace{\lambda(t(t-1)y_1'' + 3ty_1' + y_1)}_{=0} \\ &\quad + t(t-1)\lambda'' y_1 + 2t(t-1)\lambda' y_1' + 3t\lambda' y_1 = 0 \\ &\iff t(t-1)y_1(\lambda')' = -[3ty_1 + 2t(t-1)y_1'] \lambda' \\ &\iff (t-1)y_1(\lambda')' = -[3y_1 + 2(t-1)y_1'] \lambda'. \end{aligned}$$

Ainsi, λ' est solution de l'équation différentielle du premier ordre

$$\begin{aligned}
-\frac{t}{1-t}z' &= -\left[\frac{3t}{(1-t)^2} - \frac{2(1+t)}{(1-t)^2}\right]z \iff t(1-t)z' = (t-2)z \\
&\iff_{t \in]0,1[} z' = \frac{t-2}{t(1-t)}z \\
&\iff z' = -\frac{1-t+1}{t(1-t)}z \\
&\iff z' = \left(-\frac{1}{t} - \frac{1}{t(1-t)}\right)z \\
&\iff z' = \left(-\frac{1}{t} - \frac{1}{t} - \frac{1}{1-t}\right)z \\
&\iff z' = \left(-\frac{2}{t} - \frac{1}{1-t}\right)z.
\end{aligned}$$

On obtient donc, pour tout $t \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned}
\lambda'(t) &= Ae^{-2\ln(t) + \ln(t-1)} \\
&= A\left(\frac{t-1}{t^2}\right) \\
&= A\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right),
\end{aligned}$$

où $A \in \mathbb{R}$. En intégrant, on a, pour tout $t \in]0, 1[$, $\lambda(t) = A\left(\ln(t) + \frac{1}{t}\right) + B$ où $A, B \in \mathbb{R}$.

On a ainsi, pour tout $t \in]0, 1[$,

$$y_2(t) = \frac{A(t \ln(t) + 1) + Bt}{(1-t)^2}.$$

De plus, si pour $t \in]0, 1[$, $z(t) = \frac{t \ln(t) + 1}{(1-t)^2}$, alors

$$\begin{aligned}
z'(t) &= \frac{3 + \ln(t) - t + t \ln(t)}{(1-t)^3} \\
z''(t) &= \frac{\frac{1}{t} + 8 + 4 \ln(t) - 3t + 2t \ln(t)}{(1-t)^4}
\end{aligned}$$

et on a donc, pour tout $t \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned}
t(t-1)z''(t) + 3tz'(t) + z(t) &= \frac{-1 - 8t - 4t \ln(t) + 3t^2 - 2t^2 \ln(t)}{(1-t)^3} \\
&+ \frac{9t + 3t \ln(t) - 3t^2 + 3t^2 \ln(t)}{(1-t)^3} \\
&+ \frac{t \ln(t) + 1 - t^2 \ln(t) - t}{(1-t)^3}.
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation différentielle est donné par

$$\mathcal{S} = \text{Vect} \left\{ t \mapsto \frac{t \ln(t) + 1}{(1-t)^2}, t \mapsto \frac{t}{(1-t)^2} \right\}$$

■

16.3 Equations différentielles linéaires abstraites

Exercice 16.7 (Stabilité d'un point d'équilibre) ★★

Q1 - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{t(\lambda I_2 + J_1)} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$.

Q2 - Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $X \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant l'équation différentielle $X' = AX$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) Pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^2$ tel que $X(0) = X_0$, $X(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

(ii) Pour tout $\lambda \in \text{Sp}(A)$, $\text{Re}(\lambda) < 0$.

Solution

Q1 - Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme $\lambda t I_2$ et $t J_1$ commutent ($\lambda t I_2$ est un multiple de l'identité), on a $e^{t(\lambda I_2 + J_1)} = e^{\lambda t I_2} e^{t J_1} = e^{\lambda t} e^{t J_1}$. Or, puisque l'on a $J_1^2 = 0$, on obtient donc $e^{t J_1} = I_2 + t J_1$, soit alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{t(\lambda I_2 + J_1)} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

Q2 - Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = R$, avec $R = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ ou $R = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, avec $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ (cas d'une matrice diagonalisable ou trigonalisable). Soit $t \in \mathbb{R}$. Posons $Y(t) = P^{-1}X(t)$. La linéarité de la dérivation assure que Y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$Y'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) = P^{-1}APY(t) = RY(t).$$

Posons $Y_0 = P^{-1}X_0$. On pose $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $ad - bc \neq 0$. On a ainsi $Y(t) = e^{tR}Y_0$, soit $X(t) = P e^{tR} P^{-1} X_0$. Montrons alors l'équivalence des deux propriétés.

- (i) $\implies$ (ii): Montrons plutôt $\neg(\text{ii}) \implies \neg(\text{i})$ (contraposée). S'il existe $\lambda \in \text{Sp}(A)$ tel que $\text{Re}(\lambda) \geq 0$, alors

- Si $R = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ et $\operatorname{Re}(\lambda_1) \geq 0$, alors, en prenant $Y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, on a $X(t) = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ 0 \end{bmatrix}$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \begin{bmatrix} ae^{\lambda_1 t} \\ ce^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}$.
- Si $R = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ et $\operatorname{Re}(\lambda_2) \geq 0$, alors, en prenant $Y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, on a $X(t) = P \begin{bmatrix} 0 \\ e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \begin{bmatrix} be^{\lambda_2 t} \\ de^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$.
- Si $R = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ et $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$, alors, en prenant $Y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, on a $X(t) = P \begin{bmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \end{bmatrix}$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \begin{bmatrix} ae^{\lambda t} \\ ce^{\lambda t} \end{bmatrix}$.

Dans les trois cas, on ne peut pas avoir $X(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ pour le vecteur $X_0 = PY_0$ choisi, puisque la partie réelle de la valeur propre concernée est positive et $(a, c), (b, d) \neq (0, 0)$ (au moins une des composantes ne tend pas vers 0).

- (ii) $\implies$ (i): Supposons que toutes les valeurs propres de A soient de partie réelle strictement négative. On pose $Y_0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $X_0 = PY_0$. En notant que pour tous $a \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}, |e^{at}| = e^{\operatorname{Re}(a)t}$,

- Si $R = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \begin{bmatrix} ae^{\lambda_1 t} \alpha + be^{\lambda_2 t} \beta \\ ce^{\lambda_1 t} \alpha + de^{\lambda_2 t} \beta \end{bmatrix}$, soit, puisque $\operatorname{Re}(\lambda_1), \operatorname{Re}(\lambda_2) < 0$,

$$\begin{aligned} |ae^{\lambda_1 t} \alpha + be^{\lambda_2 t} \beta| &\leq |a||\alpha|e^{\operatorname{Re}(\lambda_1)t} + |b||\beta|e^{\operatorname{Re}(\lambda_2)t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \\ |ce^{\lambda_1 t} \alpha + de^{\lambda_2 t} \beta| &\leq |c||\alpha|e^{\operatorname{Re}(\lambda_1)t} + |d||\beta|e^{\operatorname{Re}(\lambda_2)t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0. \end{aligned}$$

- Si $R = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \begin{bmatrix} ae^{\lambda t} \alpha + ate^{\lambda t} \beta + be^{\lambda t} \beta \\ ce^{\lambda t} \alpha + cte^{\lambda t} \beta + de^{\lambda t} \beta \end{bmatrix}$, soit, puisque $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ et par croissance comparée (polynôme-exponentielle),

$$\begin{aligned} |ae^{\lambda t} \alpha + ate^{\lambda t} \beta + be^{\lambda t} \beta| &\leq |a||\alpha|e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} + |a||\beta|te^{\operatorname{Re}(\lambda)t} + |b||\beta|e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} \\ &\xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \\ |ce^{\lambda t} \alpha + cte^{\lambda t} \beta + de^{\lambda t} \beta| &\leq |c||\alpha|e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} + |c||\beta|te^{\operatorname{Re}(\lambda)t} + |d||\beta|e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} \\ &\xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Donc, dans les deux cas, $X(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

■

Exercice 16.8 (Lemme de Grönwall) ★★

Soient $f, g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et positives. Soit $a \geq 0$. On suppose que, pour tout $t \geq 0$, $f(t) \leq a + \int_0^t g(s)f(s)ds$.

Q1 - Soit la fonction

$$F : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \left(a + \int_0^t g(s)f(s)ds \right) e^{-\int_0^t g(s)ds}.$$

Montrer que F est décroissante sur $[0, +\infty[$.

Q2 - En déduire que, pour tout $t \geq 0$, $f(t) \leq ae^{\int_0^t g(s)ds}$.

Q3 - Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $X_1, X_2 : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^d$ vérifiant l'équation différentielle $X' = AX + B$, où $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^d$. Montrer que pour tout $t \geq 0$,

$$\|X_1(t) - X_2(t)\| \leq \|X_1(0) - X_2(0)\| e^{t\|A\|}.$$

Solution

Q1 - Par continuité de f et g , les primitives respectives de g et de fg sont dérivables sur $[0, +\infty[$. Ainsi, par produit et composition (avec l'exponentielle elle-même dérivable), F est bien dérivable sur $[0, +\infty[$. On obtient ainsi, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} F'(t) &= \left(-ag(t) - g(t) \int_0^t g(s)f(s)ds + g(t)f(t) \right) e^{\int_0^t g(s)ds} \\ &= g(t) \left(f(t) - a - \int_0^t g(s)f(s)ds \right) e^{\int_0^t g(s)ds}. \end{aligned}$$

Les premier et troisièmes facteurs de ce produit de fonctions sont positifs. Le second facteur est, par hypothèse, négatif. Donc F' est négative sur $[0, +\infty[$, ce qui conclut.

Q2 - Comme F est décroissante sur $[0, +\infty[$, on a donc, pour tout $t \geq 0$, $F(t) \leq F(0)$, i.e.

$$\left(a + \int_0^t g(s)f(s)ds \right) e^{-\int_0^t g(s)ds} \leq a. \text{ On obtient ainsi}$$

$$a + \int_0^t g(s)f(s)ds \leq ae^{\int_0^t g(s)ds}.$$

En appliquant de nouveau l'inégalité de départ sur le membre de gauche, on obtient le résultat souhaité.

Q3 - Soit $t \geq 0$. Si on réécrit la forme intégrale de l'équation différentielle $X' = AX + B$ aux solutions X_1 et X_2 , alors on a

$$X_1(t) = X_1(0) + \int_0^t [AX_1(s) + B] ds \text{ et } X_2(t) = X_2(0) + \int_0^t [AX_2(s) + B] ds.$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \|X_1(t) - X_2(t)\| &= \left\| X_1(0) - X_2(0) + \int_0^t A [X_1(s) - X_2(s)] ds \right\| \\ &\leq \|X_1(0) - X_2(0)\| + \left\| \int_0^t A [X_1(s) - X_2(s)] ds \right\| \\ &\leq \|X_1(0) - X_2(0)\| + \int_0^t \|A [X_1(s) - X_2(s)]\| ds \\ &\leq \|X_1(0) - X_2(0)\| + \int_0^t \|A\| \cdot \|X_1(s) - X_2(s)\| ds \\ &\leq \|X_1(0) - X_2(0)\| + \|A\| \int_0^t \|X_1(s) - X_2(s)\| ds. \end{aligned}$$

En posant $f(t) = \|X_1(t) - X_2(t)\|$, $g(t) = \|A\|$ et $a = \|X_1(0) - X_2(0)\|$, d'après la question précédente, on a $f(t) \leq ae^{\int_0^t g(s) ds}$, soit

$$\|X_1(t) - X_2(t)\| \leq \|X_1(0) - X_2(0)\| e^{t\|A\|}.$$

■

Exercice 16.9 (Une équation différentielle à epsilon près) ★ ★ ★

Soient $y : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $a > 0$ tels que

$$y'(t) + ay(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Montrer que $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

Indication: Etudier la fonction $z : t \mapsto y(t)e^{at}$.

Solution

Soit la fonction

$$\begin{aligned} z : [0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto y(t)e^{at}. \end{aligned}$$

z est de classe C^1 sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par produit de fonctions de classe C^1 sur ce même intervalle. On a ainsi, pour tout $t \geq 0$, $z'(t) = (y'(t) + ay(t))e^{at}$. En intégrant cette relation entre 0 et t , nous avons, pour tout $t \geq 0$,

$$y(t) = e^{-at}y(0) + e^{-at} \int_0^t (y'(s) + ay(s)) e^{as} ds.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $y'(t) + ay(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, il existe $A > 0$ tel que, pour tout $t \geq A$, $|y'(t) + ay(t)| \leq \frac{a\varepsilon}{2}$. Nous avons donc, pour tout $t \geq A$,

$$y(t) = e^{-at}y(0) + e^{-at} \int_0^A (y'(s) + ay(s)) e^{as} ds + e^{-at} \int_A^t (y'(s) + ay(s)) e^{as} ds,$$

soit, en prenant la valeur absolue,

$$|y(t)| \leq e^{-at} \left| y(0) + \int_0^A (y'(s) + ay(s)) e^{as} ds \right| + e^{-at} \left| \int_A^t (y'(s) + ay(s)) e^{as} ds \right|.$$

En appliquant l'inégalité triangulaire sur la seconde intégrale puis la majoration par $\frac{a\varepsilon}{2}$ à la quantité $|y'(s) + ay(s)|$, on obtient

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq e^{-at} \left| y(0) + \int_0^A (y'(s) + ay(s)) e^{as} ds \right| + e^{-at} \int_A^t |y'(s) + ay(s)| e^{as} ds. \\ &\leq e^{-at} \left| y(0) + \int_0^A (y'(s) + ay(s)) e^{as} ds \right| + \frac{a\varepsilon}{2} e^{-at} \int_A^t e^{as} ds. \\ &\leq e^{-at} \left| y(0) + \int_0^A (y'(s) + ay(s)) e^{as} ds \right| + \frac{\varepsilon}{2} (1 - e^{A-t}) \\ &\leq e^{-at} \left| y(0) + \int_0^A (y'(s) + ay(s)) e^{as} ds \right| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

De plus, comme $e^{-at} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, il existe $B > 0$ tel que, pour tout $t \geq B$,

$$e^{-at} \left| y(0) + \int_0^A (y'(s) + ay(s)) e^{as} ds \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, si $t \geq \max(A, B)$, $|y(t)| \leq \varepsilon$, ce qui conclut.

■

Chapitre 17

Intégrales à paramètres

17.1 Continuité et dérivabilité des intégrales à paramètre

Exercice 17.1 (Continuité d'intégrales à paramètre) ★

Montrer la continuité des intégrales à paramètre suivantes.

Q1 - $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2 t^2)}{1+t^2} dt$ sur $\mathbb{R}$.

Q2 - $G : x \mapsto \int_0^{+\infty} \sin(x^2 t^2) e^{-xt} dt$ sur $]0, +\infty[$.

Q3 - $H : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt^2} dt$ sur $]0, +\infty[$.

Solution

Q1 - On a:

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\sin(x^2 t^2)}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ (quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas).
- Pour tout $t \geq 0$, $x \mapsto \frac{\sin(x^2 t^2)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (composition de fonction trigonométrique et polynomiale).
- Soient $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un segment (avec $a < b$) et $x \in [a, b]$. On a $\left| \frac{\sin(x^2 t^2)}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}$.

Et la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ (comparaison avec une intégrale "de Riemann"). On a donc une majoration indépendamment du paramètre sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Ainsi, le théorème de continuité des intégrales à paramètre assure que F est continue sur $\mathbb{R}$.

Q2 - On a:

- Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $t \mapsto \sin(x^2 t^2) e^{-xt}$ est continue sur $[0, +\infty[$ (produit de fonctions continues).
- Pour tout $t \geq 0$, $x \mapsto \sin(x^2 t^2) e^{-xt}$ est continue sur $]0, +\infty[$ (produit d'une composition de fonction trigonométrique et polynomiale et d'une exponentielle).
- Soient $[a, b] \subseteq]0, +\infty[$ un segment (avec $a < b$) et $x \in [a, b]$. On a $|\sin(x^2 t^2) e^{-xt}| \leq e^{-at}$. Et la fonction $t \mapsto e^{-at} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ (comparaison avec une intégrale "de Riemann"). On a donc une majoration indépendamment du paramètre sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Ainsi, le théorème de continuité des intégrales à paramètre assure que G est continue sur $\mathbb{R}$.

Q3 - On a:

- Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $t \mapsto e^{-xt^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ (composition exponentielle-polynôme).
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-xt^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$ (composition exponentielle-polynôme).
- Soient $[a, b] \subseteq]0, +\infty[$ un segment (avec $a < b$) et $x \in [a, b]$. On a $|e^{-xt^2}| \leq e^{-at^2}$. Et la fonction $t \mapsto e^{-at^2} = o_{t \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (comparaison avec une intégrale "de Riemann"). On a donc une majoration indépendamment du paramètre sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Ainsi, le théorème de continuité des intégrales à paramètre assure que H est continue sur $\mathbb{R}$.



Exercice 17.2 (Norme 0) ★★

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement positive. Pour tout $\alpha \geq 0$, on pose $F(\alpha) := \int_0^1 f(t)^\alpha dt$

Q1 - Montrer que F est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et calculer $F'(0)$.

Q2 - En déduire la valeur de $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\int_0^1 f(t)^\alpha dt \right)^{\frac{1}{\alpha}}$

Solution

Q1 - Montrons que $F \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On considère pour cela la fonction g définie par

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_+ \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (\alpha, t) &\longmapsto f(t)^\alpha \end{aligned}$$

- Pour tout $t \in [0, 1]$, $\alpha \mapsto g(\alpha, t) = e^{\alpha \ln(f(t))}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, et, pour tout $(\alpha, t) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 1]$, $\frac{\partial g}{\partial \alpha}(\alpha, t) = \ln(f(t))f(t)^\alpha$. De plus, pour tout $\alpha \geq 0$, $t \mapsto g(\alpha, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial \alpha}(\alpha, t)$ sont continues sur $[0, 1]$ (comme produit de composées de fonctions continues).
- Soit $\alpha \geq 0$. $t \mapsto g(\alpha, t)$ étant continue sur $[0, 1]$, elle est donc intégrable sur $[0, 1]$.
- Soient $[a, b] \subseteq \mathbb{R}_+$ un segment (avec $a < b$), $\alpha \in [a, b]$ et $t \in [0, 1]$. Puisque f est continue et à valeurs strictement positives sur $[0, 1]$, $\frac{\partial g}{\partial \alpha}$ est donc continue sur $[a, b] \times [0, 1]$, un compact de $\mathbb{R}^2$, donc est bornée et atteint ses bornes. Ainsi, il existe $M > 0$ telle que pour tout $(\alpha, t) \in [a, b] \times [0, 1]$, $\left| \frac{\partial g}{\partial \alpha}(\alpha, t) \right| \leq M$. Or, $t \mapsto M$ est intégrable sur $[0, 1]$. On a donc une majoration par une fonction intégrable, indépendamment du paramètre, sur tout segment de $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, le théorème de dérivation des intégrales à paramètre assure que F est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et que pour tout $\alpha \geq 0$, $F'(\alpha) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial \alpha}(\alpha, t) dt = \int_0^1 \ln(f(t))f(t)^\alpha dt$. On a ainsi $F'(0) = \int_0^1 \ln(f(t))dt$.

Q2 - Soit $\alpha > 0$. On a

$$F(\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e^{\frac{\ln(F(\alpha))}{\alpha}} = e^{\frac{\ln(F(0) + \alpha F'(0) + o_{\alpha \rightarrow 0}(\alpha))}{\alpha}}.$$

Or, puisque $F(0) = 1$, nous obtenons ainsi

$$F(\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e^{\frac{\ln(1 + \alpha F'(0) + o_{\alpha \rightarrow 0}(\alpha))}{\alpha}} = e^{\frac{\alpha F'(0) + o_{\alpha \rightarrow 0}(\alpha)}{\alpha}} = e^{F'(0) + o_{\alpha \rightarrow 0}(1)}.$$

$$\text{Ainsi, on a } \left(\int_0^1 f(t)^\alpha dt \right)^{\frac{1}{\alpha}} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} e^{\int_0^1 \ln(f(t))dt}.$$

■

Exercice 17.3 (Super-dépendance) ★★

Q1 - Montrer que l'intégrale à paramètre $x \mapsto \int_0^1 e^{x(1+x^2)^2 s^2} ds$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Q2 - En déduire que la fonction $x \mapsto \int_0^{1+x^2} e^{xt^2} dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Solution

Q1 - On introduit la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, s) &\longmapsto e^{x(1+x^2)^2 s^2} \end{aligned}$$

On a ainsi

- Pour tout $s \in [0, 1]$, $x \mapsto f(x, s)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, s) = (5x^4 + 6x^2 + 1)s^2 e^{x(1+x^2)^2 s^2}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $s \mapsto f(x, s)$ et $s \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, s)$ sont continues sur $[0, 1]$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $s \mapsto f(x, s)$ est continue sur $[0, 1]$, qui est un segment, donc est intégrable.
- Soit $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un segment (avec $a < b$). La fonction $(x, s) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, s)$ est continue sur $[a, b] \times [0, 1]$, un compact de $\mathbb{R}^2$, donc est bornée et atteint ses bornes, i.e. il existe $M > 0$ tel que pour tout $(x, s) \in [a, b] \times [0, 1]$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, s) \right| \leq M$, et la fonction $s \mapsto M$ est intégrable sur $[0, 1]$. On a donc une majoration indépendamment du paramètre par une fonction intégrable.

Ainsi, d'après le théorème de régularité des intégrales à paramètre, $x \mapsto \int_0^1 e^{x(1+x^2)^2 s^2} ds$ est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Q2 - Soit $x \in \mathbb{R}$. Le changement de variable $t = (1+x^2)s$ assure que

$$\int_0^{1+x^2} e^{xt^2} dt = (1+x^2) \int_0^1 e^{x(1+x^2)^2 s^2} ds.$$

La fonction $x \mapsto \int_0^{1+x^2} e^{xt^2} dt$ étant un produit de deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (d'après la question précédente pour l'intégrale), elle est donc une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

■

Exercice 17.4 (Calcul d'une intégrale) ★★

On définit la fonction F par

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt \end{aligned}$$

Q1 - Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Q2 - Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer F' .

Q3 - En déduire F .

Solution

Q1 - Si $x = 0$, on intègre la fonction nulle et $F(0) = 0$ est bien défini. Si $x \neq 0$, alors $\frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} x$, donc la fonction $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$ se prolonge par continuité en 0. C'est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, et on a, pour tout $t \geq 1$, $\left| \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} \right| \leq e^{-t}$. La fonction $t \mapsto e^{-t}$ étant intégrable sur $[1, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc $F(x)$ est bien définie.

Q2 - Introduisons la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}. \end{aligned}$$

On a ainsi

Pour tout $t \geq 0$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (régularité des fonctions trigonométriques) et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \cos(xt) e^{-t}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ sont bien continues sur $\mathbb{R}_+$ (continuité des fonctions trigonométriques et exponentielle et prolongement par continuité en $t = 0$ pour f , vu en question précédente).

D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

$x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$. On a $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-t}$ et la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On a donc une majoration par une fonction intégrable indépendamment du paramètre, et ce sur $\mathbb{R}$ tout entier (donc sur tout segment de $\mathbb{R}$).

Ainsi, d'après le théorème de régularité des intégrales à paramètre, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} dt.$$

De plus, si $T > 0$, alors

$$\int_0^T \cos(xt)e^{-t} dt = \operatorname{Re} \left(\int_0^T e^{(-1+ix)t} dt \right) = \operatorname{Re} \left[\frac{e^{(-1+ix)T} - 1}{-1 + ix} \right].$$

Ainsi, si $T \rightarrow +\infty$, on obtient alors

$$\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t} dt = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{1 - ix} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{1 + ix}{1 + x^2} \right] = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$.

Q3 - Ainsi, par primitivation, puisque $F(0) = 0$ (vu en question 1), on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \operatorname{Arctan}(x)$

■

Exercice 17.5 (Une intégrale à paramètre de classe C^∞) ★★

Montrer que l'intégrale à paramètre $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

Solution

Introduisons la fonction f donnée par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi

Pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) = \frac{(-t)^n e^{-xt}}{1+t^2}$. Pour tout $x > 0$, $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) = \frac{(-t)^n e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Soient $[a, b] \subseteq \mathbb{R}_+^*$ un segment (avec $a < b$), $x \in [a, b]$ et $t \geq 0$. On a donc

$$\left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq \frac{e^{-at} t^n}{1+t^2} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right).$$

On a donc une majoration de manière indépendante du paramètre sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ par une fonction intégrable (la deuxième estimation s'obtient par croissance comparée exponentielle-polynôme).

Ainsi, d'après le théorème de régularité des intégrales à paramètre, $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ est bien de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

■

17.2 Intégrales à paramètre et équations différentielles

Exercice 17.6 (Transformée de Fourier d'une Gaussienne) ★★

Soient $a > 0$ et F la fonction donnée par

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-at^2} dt. \end{aligned}$$

Q1 - Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) + \frac{x}{2a} F(x) = 0$.

Q2 - En déduire une expression de F . Que remarque-t-on ?

Indication: On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

Solution

Q1 - On a:

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{itx} e^{-at^2}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (régularité de l'exponentielle complexe) et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial}{\partial x} [e^{itx} e^{-at^2}] = ite^{itx} e^{-at^2}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto ite^{itx} e^{-at^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|ite^{itx} e^{-at^2}| \leq |t|e^{-at^2} = o_{t \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$, donc $t \mapsto ite^{itx} e^{-at^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ par comparaison avec une intégrale "de Riemann".
- Pour tous $x, t \in \mathbb{R}$, $\left| \frac{\partial}{\partial x} [e^{itx} e^{-at^2}] \right| = |ite^{itx} e^{-at^2}| = |t|e^{-at^2}$ et $t \mapsto |t|e^{-at^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (cf. point précédent). On a donc une majoration par une fonction intégrable indépendamment du paramètre sur $\mathbb{R}$ (donc sur tout segment de $\mathbb{R}$).

Ainsi, par le théorème de dérivation sous le signe intégral, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} ite^{itx} e^{-at^2} dt$.

De plus, si $T > 0$, une intégration par parties assure que, pour $x \in \mathbb{R}$,

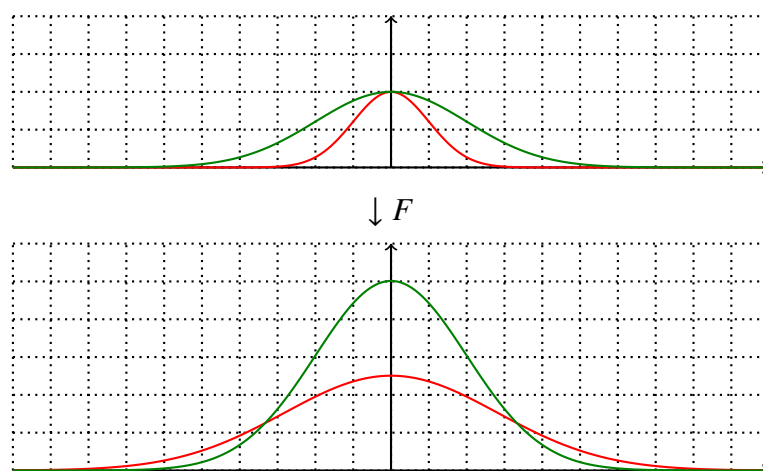
$$\begin{aligned} \int_{-T}^T ite^{itx} e^{-at^2} dt &= \frac{-i}{2a} \int_{-T}^T e^{itx} \cdot (-2at) e^{-at^2} dt \\ &\stackrel{IPP}{=} \frac{-i}{2a} \left[e^{itx} e^{-at^2} \right]_{t=-T}^{t=T} + \frac{i}{2a} \int_{-T}^T ix e^{itx} e^{-at^2} dt \\ &= \frac{i}{2a} \left[e^{-iT} e^{-aT^2} - e^{iT} e^{-aT^2} \right] - \frac{1}{2a} \int_{-T}^T e^{itx} e^{-at^2} dt. \end{aligned}$$

Faisons tendre T vers $+\infty$, on a $F'(x) = -\frac{x}{2a} F(x)$, ce qui est l'équation demandée.

Q2 - F est solution de l'équation différentielle $y' + \frac{x}{2a}y = 0$, donc on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
 $F(x) = F(0)e^{-\frac{x^2}{4a}}$.

De plus, $F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt$. Soit $T > 0$. Faisons le changement de variable $t = \frac{s}{\sqrt{a}}$ dans l'intégrale $\int_{-T}^T e^{-at^2} dt$, nous obtenons $\int_{-T}^T e^{-at^2} dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\sqrt{a}T}^{\sqrt{a}T} e^{-s^2} ds$. En faisant tendre T vers $+\infty$, on obtient donc $F(0) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, soit alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}$.

La transformée de Fourier transforme une fonction Gaussienne en une autre fonction Gaussienne. Cependant, les "étalements" des deux fonctions Gaussiennes seront inversés.



Exercice 17.7 (Solution d'une équation différentielle) ★★

On considère l'intégrale à paramètre F donnée par

$$F :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$$

Q1 - Montrer que F est bien définie.

Q2 - Montrer que $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Q3 - Montrer que F est solution de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ (on ne cherchera pas à la calculer).

Solution

Q1 - Soient $x > 0$ et $t \geq 0$. On a $\left| \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ étant intégrable sur $[0, +\infty[$ (comparaison avec une intégrale "de Riemann"), l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ converge, donc $F(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$.

Q2 - Posons f définie par

$$\begin{aligned} f :]0, +\infty[\times [0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \end{aligned}$$

- Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- Pour tout $t \geq 0$, $f(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} g(t)$ où g est donnée par

$$\begin{aligned} g : [0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

g est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

- Pour tout $x > 0$, $|f(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$ et $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. On a donc une majoration indépendamment du paramètre par une fonction intégrable.

Ainsi, par convergence dominée, on a $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} g(t) dt = 0$.

Q3 - Montrons que F est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$.

- Pour tout $t \geq 0$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ (régularité de l'exponentielle) et pour tout $(x, t) \in]0, +\infty[\times [0, +\infty[$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{-te^{-xt}}{1+t^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}$. De plus, pour tout $x > 0$, $t \mapsto f(x, t)$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t)$ sont bien continues par morceaux sur $[0, +\infty[$.
- Soit $(x, t) \in]0, +\infty[\times [0, +\infty[$. Par croissance comparée, on a $f(x, t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{-te^{-xt}}{1+t^2} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right)$. Par comparaison avec une intégrale "de Riemann", les fonctions $f \mapsto f(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ sont intégrables sur $[0, +\infty[$.
- Soient $[a, b] \subseteq]0, +\infty[$ un segment (avec $a < b$), $x \in [a, b]$ et $t \geq 0$. On a $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{t^2 e^{-at}}{1+t^2}$. On a bien la majoration indépendamment du paramètre par une fonction intégrable sur tout segment de $]0, +\infty[$.

Donc, par le théorème de régularité des intégrales à paramètre, F est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et on a, pour tout $x > 0$, $F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt$. Si $x > 0$, alors on a

$$\begin{aligned} F''(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2-1)e^{-xt}}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \\ &= \frac{1}{x} - F(x). \end{aligned}$$

On a bien, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $F''(x) + F(x) = \frac{1}{x}$.

Exercice 17.8 (Fonction de Bessel) ★★

Soit F la fonction définie par

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_0^\pi \cos(x \sin \theta) d\theta \end{aligned}$$

- Q1 - Montrer que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
- Q2 - Montrer que F est solution de l'équation différentielle $xy'' + y' + xy = 0$ (on ne cherchera pas à la calculer).
- Q3 - Montrer que F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Solution

Q1 - Soit la fonction f donnée par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, \theta) &\longmapsto \cos(x \sin \theta). \end{aligned}$$

Montrons alors que $F \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- Pour tout $\theta \in [0, \pi]$, $x \mapsto f(x, \theta)$ est de classe C^2 (par régularité des fonctions trigonométriques) et pour tout $(x, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, \pi]$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \theta) = -(\sin \theta) \sin(x \sin \theta)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \theta) = -\sin^2(\theta) \cos(x \sin \theta)$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\theta \mapsto f(x, \theta)$, $\theta \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, \theta)$ et $\theta \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \theta)$ sont continues sur $[0, \pi]$ (continuité des fonctions trigonométriques).

- Soit $x \in \mathbb{R}$. $\theta \mapsto f(x, \theta)$ et $\theta \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, \theta)$ étant des fonctions continues sur $[0, \pi]$, elles sont donc intégrables.
- Soit $(x, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, \pi]$. On a $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \theta) \right| \leq 1$. Or, la fonction constante égale à 1 est intégrable sur $[0, \pi]$. On a ainsi une majoration par une fonction intégrable indépendamment du paramètre pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc en particulier sur tout segment.

Ainsi, d'après le théorème de régularité des intégrales à paramètre, F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= - \int_0^\pi (\sin \theta) \sin(x \sin \theta) d\theta \\ F''(x) &= - \int_0^\pi \sin^2(\theta) \cos(x \sin \theta) d\theta \end{aligned}$$

Q2 - Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} xF''(x) + F'(x) + xF(x) &= \int_0^\pi [-x \sin^2(\theta) + x] \cos(x \sin \theta) d\theta \\ &- \int_0^\pi (\sin \theta) \sin(x \sin \theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi x \cos^2(\theta) \cos(x \sin \theta) d\theta \\ &- \int_0^\pi (\sin \theta) \sin(x \sin \theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi (\cos \theta) \cdot (x \cos \theta) \cos(x \sin \theta) d\theta \\ &- \int_0^\pi (\sin \theta) \sin(x \sin \theta) d\theta \\ &\stackrel{IPP}{=} [(\cos \theta) \sin(x \sin \theta)]_{\theta=0}^{\theta=\pi} + \int_0^\pi (\sin \theta) \sin(x \sin \theta) d\theta \\ &- \int_0^\pi (\sin \theta) \sin(x \sin \theta) d\theta \\ &= 0. \end{aligned}$$

F est donc solution de l'équation différentielle demandée.

Q3 - Soit $x \in \mathbb{R}$. Utilisons le développement en série entière de $\cos$, nous obtenons alors

$$F(x) = \int_0^\pi \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sin^{2n}(\theta) x^{2n} \right) d\theta.$$

Or, nous avons $\sum_{n \geq 0} \sup_{\theta \in [0, \pi]} \left| \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sin^{2n}(\theta) x^{2n} \right| = \sum_{n \geq 0} \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$. C'est bien une série convergente. On a donc la convergence normale, donc uniforme de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sin^{2n}(\theta) x^{2n}$ sur $[0, \pi]$. On peut donc intervertir série et intégrale, donnant ainsi

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\int_0^\pi \sin^{2n}(\theta) d\theta \right) x^{2n}.$$

Le terme général de cette série est, en valeur absolue, majoré pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$, qui est donc borné pour tout $x \in \mathbb{R}$. La série est donc convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$. F est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

■

Chapitre 18

Calcul différentiel

18.1 Différentiabilité de fonctions de deux ou trois variables

Exercice 18.1 (Jacobienne d'une composée) ★

Soient les fonctions f et g définies par

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto (xy, x^2, y^2) \quad \text{et} \quad (u, v, w) \longmapsto uve^w.$$

Q1 - Déterminer $g \circ f$ puis $\text{Jac}(g \circ f)$.

Q2 - Retrouver $\text{Jac}(g \circ f)$ grâce à la règle de la chaîne.

Solution

Q1 - On a $g \circ f$ donnée par

$$g \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x^3 y e^{y^2}.$$

On a ainsi, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\text{Jac}(g \circ f)(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2 y e^{y^2} & x^3 (1 + 2y^2) e^{y^2} \end{bmatrix}.$$

Q2 - D'une part, on a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\text{Jac}(f)(x, y) = \begin{bmatrix} y & x \\ 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{bmatrix}.$$

D'autre part, pour tout $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$,

$$\text{Jac}(g)(u, v, w) = \begin{bmatrix} ve^w & ue^w & uve^w \end{bmatrix}.$$

On a ainsi, d'après la règle de la chaîne, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\text{Jac}(g \circ f)(x, y) &= \text{Jac}(g)(f(x, y)) \times \text{Jac}(f)(x, y) \\
&= \begin{bmatrix} x^2 e^{y^2} & x y e^{y^2} & x^3 y e^{y^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y & x \\ 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (x^2 y + 2x^2 y) e^{y^2} & (x^3 + 2x^3 y^2) e^{y^2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3x^2 y e^{y^2} & x^3 (1 + 2y^2) e^{y^2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Exercice 18.2 (Primitivation) ★

Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 y e^{y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^3 (1 + 2y^2) e^{y^2} \end{cases}$$

Solution

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 y e^{y^2}$, donc, par primitivation par rapport à x , on a

$$f(x, y) = x^3 y e^{y^2} + A(y),$$

où $A \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En dérivant par rapport à y , on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^3 (1 + 2y^2) e^{y^2} + A'(y),$$

ce qui donne $A' = 0$, donc A est constante. Ainsi, il existe $B \in \mathbb{R}$ telle que

$$f(x, y) = x^3 y e^{y^2} + B.$$

En calculant le gradient de cette fonction, on retrouve bien, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2 \\ x^2 (1 + 2y^2) e^{y^2} \end{bmatrix}$$

Exercice 18.3 (Taylor-Young) ★

Soit la fonction f définie par

$$\begin{aligned}
f : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(x, y) &\longmapsto x^3 y e^{y^2}
\end{aligned}$$

Q1 - Calculer le gradient et la hessienne de f .

Q2 - Donner le développement limité de f à l'ordre 2 au point $(1, 0)$.

Solution

Q1 - f est de classe $\mathbb{C}^\infty$ (multiplication d'un polynôme et d'une exponentielle), donc admet des dérivées partielles à tout ordre.

Ainsi, on a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2 y e^{y^2} \\ x^3 (1 + 2y^2) e^{y^2} \end{bmatrix}.$$

De plus, en dérivant de nouveau, on a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$H(f)(x, y) = \begin{bmatrix} 6xy e^{y^2} & 3x^2 (1 + 2y^2) e^{y^2} \\ 3x^2 (1 + 2y^2) e^{y^2} & 2x^3 y (3 + 2y^2) e^{y^2} \end{bmatrix}$$

Q2 - En évaluant en $(1, 0)$, on a

$$f(1, 0) = 0, \quad \nabla f(1, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad H(f)(1, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 s'écrivant

$$f(1 + h, k) = f(1, 0) + \langle \nabla f(1, 0) | (h, k) \rangle + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} + o\left(\|(h, k)\|_2^2\right),$$

où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne, on a

$$f(1 + h, k) = k + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3k \\ 3h \end{bmatrix} + o\left(\|(h, k)\|^2\right) = h + 3hk + o\left(\|(h, k)\|^2\right).$$

Exercice 18.4 (Différentiabilité d'une fonction dépendant d'un paramètre) ★★

Soient $\alpha \geq 0$ et f la fonction définie par

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Q1 - Montrer que pour tout $\alpha > \frac{1}{2}$, f est continue en $(0, 0)$. Que dire si $\alpha \leq \frac{1}{2}$?

Q2 - Pour tout $\alpha > 0$, calculer les dérivées partielles (au premier ordre) de f en $(0, 0)$.

Q3 - Montrer que pour tout $\alpha > 1$, f est différentiable en $(0, 0)$.

Q4 - Que dire de la différentiabilité de f en $(0, 0)$ si $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$?

Solution

Q1 - Soient $\alpha > \frac{1}{2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On a $|x|, |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, soit alors

$$|f(x, y)| = \frac{|x|^\alpha |y|^\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}^{2\alpha}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}^{2\alpha-1} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

car $\alpha > \frac{1}{2}$. f est donc continue en $(0, 0)$.

Si $\alpha \leq \frac{1}{2}$, alors, si $t > 0$, on a

$$f(t, t) = \frac{t^{2\alpha}}{\sqrt{2}t} = \frac{1}{\sqrt{2}t^{1-2\alpha}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } \alpha = \frac{1}{2} \\ +\infty & \text{si } \alpha < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

f n'est donc pas continue en $(0, 0)$.

Q2 - Si $h \neq 0$, alors $f(h, 0) = 0$. On a ainsi $0 = \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. De la même manière, si $k \neq 0$, alors $0 = \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0$. On a ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Q3 - Soient $\alpha > 1$, $(h, k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On a donc

$$f(h, k) = \frac{|hk|^\alpha}{\sqrt{h^2 + k^2}}.$$

Puisque $f(0, 0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, f est différentiable en $(0, 0)$ si et seulement si

$$\frac{|hk|^\alpha}{\sqrt{h^2 + k^2}^2} \xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} 0.$$

Or, puisque $|h|, |k| \leq \sqrt{h^2 + k^2}$, nous avons

$$\frac{|hk|^\alpha}{\sqrt{h^2 + k^2}^2} \leq \sqrt{h^2 + k^2}^{2(\alpha-1)} \xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} 0$$

car $\alpha > 0$. f est bien différentiable en $(0, 0)$.

Q4 - Si $\alpha \leq 1$, reprenons la condition de la question précédente. Si $h = k = t > 0$, on a

$$\frac{|hk|^\alpha}{\sqrt{h^2 + k^2}^2} = \frac{t^{2(\alpha-1)}}{\sqrt{2}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

f n'est donc pas différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 18.5 (Optimisation) ★★

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto (x - y)^2(1 - x - y) \end{aligned}$$

Q1 - Calculer le gradient de f .

Q2 - Montrer que l'ensemble des points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$ est $\{(t, t), t \in \mathbb{R}\}$.

Q3 - Pour tout $t \in \mathbb{R}$, étudier le signe de $f(t + h, t + k) - f(t, t)$ lorsque $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ et en déduire la nature des points critiques de f .

Solution

Q1 - f est polynomiale, donc de classe C^1 . Son gradient est ainsi donné par

$$\begin{aligned} \nabla f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto ((x - y)(2 - 3x - y), (x - y)(-2 + x + 3y)) \end{aligned}$$

Q2 - Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un point critique de f . $\mathbb{R}^2$ étant ouvert, les points critiques annulent donc le gradient. On a ainsi

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) = 0 &\iff \begin{cases} (x - y)(2 - 3x - y) = 0 \\ (x - y)(-2 + x + 3y) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x - y = 0 \\ -2 + x + 3y = 0 \end{cases} \\ &\text{ou } \begin{cases} x - y = 0 \\ -2 + x + 3y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2 - 3x - y = 0 \\ -2 + x + 3y = 0 \end{cases} \\ &\iff (x, y) \in \{(t, t), t \in \mathbb{R}\} \text{ ou } (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ &\text{ou } (x, y) = (-1, -1) \text{ ou } \begin{cases} -3x - y = -2 \\ x + 3y = 2 \end{cases} \\ &\iff (x, y) \in \{(t, t), t \in \mathbb{R}\} \text{ ou } (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ &\text{ou } (x, y) = (-1, -1) \text{ ou } (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ &\iff (x, y) \in \{(t, t), t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

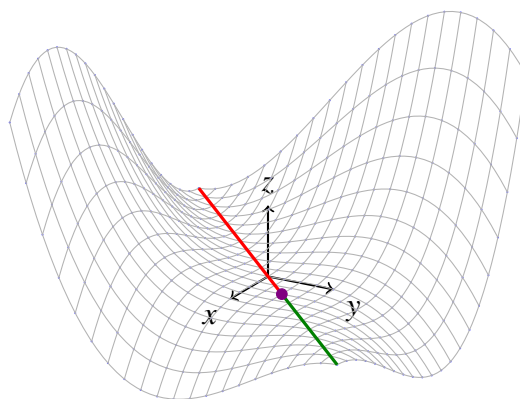


Figure 18.1: Surface représentant la fonction f . En rouge, les points critiques (t, t) avec $t < \frac{1}{2}$ (minima locaux), en vert, les points critiques (t, t) avec $t > \frac{1}{2}$ (maxima locaux) et enfin, en violet, le point critique (t, t) avec $t = \frac{1}{2}$.

De plus, si $t \in \mathbb{R}$, alors $\nabla f(t, t) = 0$. L'ensemble des points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$ est donc bien $\{(t, t), t \in \mathbb{R}\}$.

Q3 - Soient $t \in \mathbb{R}$, $h, k \in \mathbb{R}$. On a

$$f(t+h, t+k) - \underbrace{f(t, t)}_{=0} = (h-k)^2(1-2t-h-k).$$

Ainsi, le signe de $f(t+h, t+k) - f(t, t)$ est le même que le signe de $(1-2t-h-k)$ lorsque $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.

- Si $t < \frac{1}{2}$, alors $1-2t-h-k > 0$ lorsque h et k sont suffisamment proches de 0. Ainsi, $f(t+h, t+k) - f(t, t) \geq 0$ lorsque $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. (t, t) est donc un minimum local de f .
- Si $t = \frac{1}{2}$, $-h-k$ change de signe selon les valeurs de h et k . Ainsi $f(t+h, t+k) - f(t, t)$ change de signe selon les valeurs de h et k (par exemple, négatif si $h, k > 0$ et positif si $h, k < 0$). Ce c'est donc pas un extremum.
- Si $t > \frac{1}{2}$, alors $1-2t-h-k < 0$ lorsque h et k sont suffisamment proches de 0. Ainsi, $f(t+h, t+k) - f(t, t) \leq 0$ lorsque $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. (t, t) est donc un maximum local de f .

■

Exercice 18.6 (Fonctions homogènes et théorème d'Euler) ★★

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . On dit que f est homogène de degré $r \in \mathbb{R}$ si pour tous $t > 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(tx, ty) = t^r f(x, y).$$

Q1 - Montrer que, si f est homogène de degré r , alors $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont homogènes de degré $r - 1$.

Q2 - En déduire que si f est homogène de degré r , alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = r f(x, y).$$

Q3 - Réciproquement, montrer que si f vérifie la relation précédente, alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $F : t \mapsto f(tx, ty)$ est solution d'une équation différentielle que l'on précisera. En déduire que f est homogène de degré r .

Solution

Q1 - Soient $t > 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Puisque f est homogène de degré r , on a $f(tx, ty) = t^r f(x, y)$. En dérivant de chaque côté cette relation par rapport à x (ce qui est possible car f est de classe C^1), on obtient

$$t \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t^r \frac{\partial f}{\partial x}(x, y),$$

donnant ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t^{r-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y),$$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est homogène de degré $r - 1$. De la même manière, en dérivant par rapport à y , on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = t^{r-1} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y),$$

donnant ainsi l'homogénéité de degré $r - 1$ de $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Q2 - Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Posons, pour tout $t > 0$, $F(t) = f(tx, ty)$. F est de classe C^1 (car f l'est aussi). Puisque f est homogène, on a ainsi, pour tout $t > 0$, $F(t) = t^r f(x, y)$, donc

$$F'(t) = r t^{r-1} f(x, y).$$

De plus,

$$F'(t) = x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) \stackrel{Q1}{=} t^{r-1} \left[x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right].$$

En divisant par $t^{r-1} > 0$, on obtient bien la relation souhaitée

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = r f(x, y),$$

et ce pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Q3 - Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $t > 0$, on a

$$F'(t) = x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = \frac{1}{t} \left[tx \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + ty \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) \right] \stackrel{\text{Hyp.}}{=} \frac{r}{t} F(t).$$

F est solution de l'équation différentielle $y' - \frac{1}{t}y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, pour tout $t > 0$, on a

$$F(t) = F(1)e^{r \ln(t)} = t^r f(x, y).$$

Puisque $F(t) = f(tx, ty)$, f est donc homogène de degré r .

■

18.2 Différentiabilité: cas général

Exercice 18.7 (Composition avec une forme quadratique) ★

Soit $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ (où $d \in \mathbb{N}^*$) une application différentiable sur $\mathbb{R}^d$. Soit l'application

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathbb{R} \end{aligned}$$

Montrer que g est différentiable sur $\mathbb{R}^d$ et calculer sa différentielle.

Solution

Soit Q l'application définie sur $\mathbb{R}^d$ et à valeurs réelles $Q : x \longmapsto \langle x|x \rangle$. On a donc $g = Q \circ f$.

Si $x, h \in \mathbb{R}^d$, alors on a

$$Q(x+h) = Q(x) + 2\langle x|h \rangle + \|h\|_2^2,$$

où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne. Q est donc différentiable sur $\mathbb{R}^d$ et sa différentielle est donnée pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par

$$\begin{aligned} dQ(x) : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ h &\longmapsto 2\langle x|h \rangle \end{aligned}$$

Ainsi, f étant différentiable sur $\mathbb{R}^d$, par composition, g est également différentiable sur $\mathbb{R}^d$ et sa différentielle en $x \in \mathbb{R}^d$ vaut

$$dg(x) = d(Q \circ f)(x) = dQ(f(x)) \circ df(x).$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $dg(x)$ est donnée par

$$\begin{aligned} dg(x) : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ h &\longmapsto 2\langle f(x) | df(x) \cdot h \rangle. \end{aligned}$$

■

18.3 Lien avec les équations aux dérivées partielles

Exercice 18.8 (Résolution d'une équation aux dérivées partielles) ★★

On souhaite résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} + e^x \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

où f est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Q1 - Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\longmapsto (u, e^u + v) \end{aligned}$$

est une bijection de classe C^1 .

Q2 - On fait le changement de variable

$$\begin{cases} x = u \\ y = e^u + v \end{cases}.$$

On pose, $g = f \circ \varphi$, i.e. pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $g(u, v) = f(x, y) = f(u, e^u + v)$.

Montrer que $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = 0$ et en déduire f .

Q3 - Montrer que f est bien solution de l'équation aux dérivées partielles.

Solution

Q1 - φ est bien de classe C^1 , par régularité de la fonction exponentielle et linéaire puis par somme. De plus, si $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\begin{aligned} (x, y) = \varphi(u, v) &\iff \begin{cases} x = u \\ y = e^u + v \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u = x \\ v = y - e^x \end{cases} \end{aligned}$$

Introduisons alors l'application ψ définie par

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x, y - e^x) \end{aligned} .$$

Soient $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$(\psi \circ \varphi)(u, v) = \psi(u, e^u + v) = (u, e^u + v - e^u) = (u, v)$$

et

$$(\varphi \circ \psi)(x, y) = \varphi(x, y - e^x) = (x, e^x + y - e^x) = (x, y).$$

Ainsi, on a $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$. φ est donc une bijection de réciproque ψ (elle-même de classe C^1).

Q2 - Par composition, g est bien de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. De plus, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, la règle de la chaîne assure que

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u, e^u + v) + e^u \frac{\partial f}{\partial y}(u, e^u + v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + e^x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

g étant de classe C^1 , il existe $F \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $g(u, v) = F(v)$.

Ainsi, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = F(y - e^x)$.

Q3 - Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Posons $f(x, y) = F(y - e^x)$. f est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + e^x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -e^x F'(y - e^x) + e^x F'(y - e^x) = 0.$$

f est bien solution de l'EDP demandée.

■

Exercice 18.9 (Laplacien d'une fonction radiale) ★ ★ ★

Soient $f \in C^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et g définie par

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) \end{aligned}$$

Q1 - Montrer que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ puis calculer $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$.

Q2 - En déduire $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$.

Q3 - On pose $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Montrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$,
 $\Delta g(x, y, z) = f''(r) + \frac{2}{r}f'(r)$.

Solution

Q1 - $(x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ et f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, g est donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a, par dérivation d'une composée,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right] f' \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} f' \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right). \end{aligned}$$

De plus, en utilisant la dérivée d'un produit et d'une composée, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right] f' \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) \\ &\quad + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \frac{\partial}{\partial x} \left[f' \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) \right] \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \right] f' \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) \\ &\quad + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^2} f'' \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) \\ &= \frac{y^2 + z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} f' \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) \\ &\quad + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^2} f'' \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right). \end{aligned}$$

Q2 - Par symétrie des rôles joués par y et z , on a pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y, z) &= \frac{x^2 + z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} f'(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \\ &\quad + \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^2} f''(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}). \\ \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(x, y, z) &= \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} f'(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \\ &\quad + \frac{z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^2} f''(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).\end{aligned}$$

Q3 - Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. On a

$$\begin{aligned}\Delta g(x, y, z) &= \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(x, y, z) \\ &= \frac{2r^2}{r^3} f'(r) + \frac{r^2}{r^2} f''(r) \\ &= f''(r) + \frac{2}{r} f'(r).\end{aligned}$$

■

18.4 Différentiabilité et polynômes

Exercice 18.10 (Différentielle d'une intégrale de polynômes) ★

Soient $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré au plus n , que l'on munit de la norme $\|P\| = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$. Soit l'application ϕ définie par

$$\begin{aligned}\phi : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto \int_0^1 P(t)^3 dt.\end{aligned}$$

Montrer que ϕ est différentiable sur E et calculer sa différentielle.

Solution

Soient $P, H \in E$. On a

$$\begin{aligned}\phi(P + H) &= \phi(P) + 3 \int_0^1 P(t)^2 H(t) dt + \int_0^1 3P(t)H(t)^2 + H(t)^3 dt \\ &= \phi(P) + 3 \int_0^1 P(t)^2 H(t) dt + \|H\| \varepsilon(H),\end{aligned}$$

où, pour tout $H \in E$,

$$\varepsilon(H) = \frac{1}{\|H\|} \int_0^1 3P(t)H(t)^2 + H(t)^3 dt.$$

D'après l'inégalité de la moyenne, on a

$$|\varepsilon(H)| \leq \frac{1}{\|H\|} \int_0^1 |3P(t)H(t)^2 + H(t)^3| dt \leq 3 \|P\| \cdot \|H\| + \|H\|^2.$$

Donc $\varepsilon(H) \xrightarrow{\|H\| \rightarrow 0} 0$, donc Φ est différentiable en P et sa différentielle en P est donnée par

$$\begin{aligned} d\phi(P) : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ H &\longmapsto 3 \int_0^1 P(t)^2 H(t) dt. \end{aligned}$$



18.5 Matrices et différentiabilité

Exercice 18.11 (Différentielle du déterminant et formule de Liouville) ★★

Q1 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer ses dérivées partielles.

Q2 - En déduire la différentielle du déterminant.

Q3 - On considère l'équation différentielle $Y'(t) = A(t)Y(t)$, où $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une application continue à valeurs matricielles. On suppose que toute solution de cette équation différentielle est définie sur $\mathbb{R}$.

On considère le *Wronskien* défini par

$$\begin{aligned} W : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \det [Y_1(t) | \cdots | Y_n(t)], \end{aligned}$$

où $Y_1, \dots, Y_n$ sont des solutions de l'équation différentielle. Montrer la formule de Liouville: pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$W(t) = W(0) e^{\int_0^t \text{Tr}[A(s)] ds}.$$

Solution

Q1 - $\det$ est polynomiale en les coefficients de la matrice. Ainsi, c'est bien une application de classe C^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

De plus, si $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors, d'après la formule des cofacteurs, on a, en notant $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ puis en développant selon la ligne i ,

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{i,k} (-1)^{i+k} \Delta_{i,k},$$

avec, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\Delta_{i,k} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Le coefficient $a_{i,j}$ n'apparaît dans aucun des $\Delta_{i,k}$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc on a

$$\frac{\partial(\det)}{\partial a_{i,j}}(A) = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} = [\text{Com}(A)]_{i,j},$$

où $\text{Com}(A)$ est la comatrice de A .

Q2 - $\det$ étant de classe C^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, elle y est donc différentiable, et sa différentielle est donnée, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, par

$$d(\det)(A) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial(\det)}{\partial a_{i,j}}(A) E_{i,j}^*,$$

où, pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $E_{i,j}$ est la matrice élémentaire d'indice (i, j) (0 sauf en le coefficient d'indice (i, j)), et $E_{i,j}^*$ est la forme linéaire donnée par

$$\begin{aligned} E_{i,j}^* : \quad \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} &\longmapsto a_{i,j}. \end{aligned}$$

On a donc, pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} d(\det)(A) \cdot H &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial(\det)}{\partial a_{i,j}}(A) E_{i,j}^*(H) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} [\text{Com}(A)]_{i,j} H_{i,j} \\ &= \text{Tr} [\text{Com}(A)^T H] \end{aligned}$$

Q3 - Soit $t \in \mathbb{R}$. Posons $\Phi(t) = [Y_1(t) | \cdots | Y_n(t)]$. On a $W : \mathbb{R} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\det} \mathbb{R}$, i.e. $W = \det \circ \Phi$. Ainsi, d'après la règle de la chaîne, on a

$$\begin{aligned}
W'(t) &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial(\det)}{\partial a_{i,j}}(\Phi(t)) [\Phi'(t)]_{i,j} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} [\text{Com}(\Phi(t))]_{i,j} [\Phi'(t)]_{i,j} \\
&= \text{Tr} [\text{Com}(\Phi(t))^T \Phi'(t)] \\
&\stackrel{\Phi' = A\Phi}{=} \text{Tr} [\text{Com}(\Phi(t))^T A(t) \Phi(t)] = \text{Tr} [A(t) \Phi(t) \text{Com}(\Phi(t))^T] \\
&= \text{Tr} [A(t) \det(\Phi(t))] = \text{Tr} [A(t)] \det(\Phi(t)).
\end{aligned}$$

W est donc solution de l'équation différentielle $W' = \text{Tr}[A(t)]W$. Par intégration, on en déduit immédiatement la formule de Liouville.

■

Exercice 18.12 (Différentielle de l'inverse) ★★

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $\|\cdot\|$ une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, subordonnée à une autre norme.

Q1 - Montrer que si $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice vérifiant $\|A^{-1}H\| < 1$, alors la série

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k (A^{-1}H)^k \text{ converge et } I_n + A^{-1}H \text{ est inversible d'inverse } \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (A^{-1}H)^k.$$

Q2 - En déduire que l'application

$$\begin{array}{ccc}
f : GL_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\
X & \longmapsto & X^{-1}
\end{array}$$

est différentiable en A et calculer sa différentielle (toujours en A).

Solution

Q1 - Soit $N \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{k=0}^N \|(-1)^k (A^{-1}H)^k\| \leq \sum_{k=0}^N \|(A^{-1}H)\|^k.$$

Or, $\|A^{-1}H\| < 1$, donc la série $\sum_{k \geq 0} (-1)^k (A^{-1}H)^k$ converge absolument, donc converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

De plus, on a

$$\begin{aligned}(I_n + A^{-1}H) \sum_{k=0}^N (-1)^k (A^{-1}H)^k &= \sum_{k=0}^N (-1)^k (A^{-1}H)^k + \sum_{k=0}^N (-1)^k (A^{-1}H)^{k+1} \\&= I_n + \sum_{k=1}^N (-1)^k (A^{-1}H)^k + \sum_{k=1}^{N+1} (-1)^{k+1} (A^{-1}H)^k \\&= I_n + (-1)^N (A^{-1}H)^{N+1} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{\|A^{-1}H\| < 1} 0.\end{aligned}$$

De la même manière, on a

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^N (-1)^k (A^{-1}H)^k \right) (I_n + A^{-1}H) &= \sum_{k=0}^N (-1)^k (A^{-1}H)^k + \sum_{k=0}^N (-1)^k (A^{-1}H)^{k+1} \\&= I_n + (-1)^N (A^{-1}H)^{N+1} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{\|A^{-1}H\| < 1} 0.\end{aligned}$$

Ainsi, $I_n + A^{-1}H$ est inversible et

$$(I_n + A^{-1}H)^{-1} = \sum_{k=0}^N (-1)^k (A^{-1}H)^k$$

Q2 - On a

$$f(A + H) = (A + H)^{-1} = [A(I_n + A^{-1}H)]^{-1} = (I_n + A^{-1}H)^{-1} A^{-1},$$

D'après la formule d'inversion de la question précédente,

$$\begin{aligned}f(A + H) &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (A^{-1}H)^k A^{-1} \\&= A^{-1} - A^{-1}HA^{-1} + \|H\|\varepsilon(H),\end{aligned}$$

$$\text{où } \varepsilon(H) = \frac{1}{\|H\|} \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k (A^{-1}H)^k A^{-1}. \text{ Or, si } \|H\| \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \text{ alors}$$

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{\|H\|} \sum_{k=2}^N (-1)^k (A^{-1}H)^k A^{-1} \right\| &\leq \frac{\|A^{-1}\|}{\|H\|} \sum_{k=2}^N \|A^{-1}H\|^k \\
&\leq \frac{\|A^{-1}\|}{\|H\|} \|A^{-1}H\|^2 \sum_{k=0}^{N-2} \|A^{-1}H\|^k \\
&\leq \|A^{-1}\|^3 \|H\| \sum_{k=0}^{N-2} \|A^{-1}H\|^k \\
&\stackrel{\|A^{-1}H\| < 1}{\leq} \|A^{-1}\|^3 \|H\| \sum_{k=0}^{+\infty} \|A^{-1}H\|^k \\
&\leq \frac{\|A^{-1}\|^3 \|H\|}{1 - \|A^{-1}H\|}
\end{aligned}$$

On a donc $\varepsilon(H) \xrightarrow{H \rightarrow 0} 0$. Donc f est différentiable en A et sa différentielle en A est donnée par

$$\begin{aligned}
df(a) : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\
H &\longmapsto -A^{-1}HA^{-1}.
\end{aligned}$$

■

Chapitre 19

Algèbre Générale

19.1 Groupes

Exercice 19.1 (Matrice et groupe cyclique) ★

Soient $n \in \mathbb{N}^*$. On introduit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ égale à

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix}$$

Q1 - Calculer le polynôme caractéristique de A . En déduire ses valeurs propres, si elle est diagonalisable et si elle est inversible.

Q2 - Montrer que le groupe $G = \{A^k, k \in \mathbb{Z}\}$ est cyclique et isomorphe à $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$.

Solution

Q1 - Soit χ_A le polynôme caractéristique de A . On a

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} X & -1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & -1 \\ -1 & & & X \end{vmatrix}_{[n]} \stackrel{\downarrow C_1}{=} X^n + (-1)^{n+1}(-1) \begin{vmatrix} -1 & & & (0) \\ X & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & X & -1 \end{vmatrix}_{[n-1]} \\ &= X^n + (-1)^{n+2}(-1)^{n-1} \\ &= X^n - 1 = \prod_{m=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2im\pi}{n}} \right). \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont les racines n -ièmes de l'unité. χ_A est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable. De plus, les valeurs propres étant toutes non nulles, A est inversible.

Q2 - G est un groupe monogène avec pour générateur la matrice A . De plus, puisque $A^n = I_n$ (d'après le théorème de Cayley-Hamilton), G est cyclique, d'ordre inférieur ou égal à n .

De plus, le polynôme minimal de A est bien $X^n - 1$ (car χ_A est scindé à racines simples), donc n est bien le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = I_n$.

A est donc d'ordre n , donc G est de cardinal n , ainsi, G est isomorphe à $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$.

Fin de preuve alternative: Les valeurs propres de A sont $e^{\frac{2im\pi}{n}}$, pour $m \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On peut donc montrer que les valeurs propres de A^k coïncident avec celles de A si et seulement si $k = n$, ce qui implique que $A^n = A$ si l'on utilise la diagonalisabilité.

■

Exercice 19.2 (Sous-groupe normal) ★

Soient G un groupe et H un sous-groupe de G . On dit que H est un sous-groupe normal (ou distingué) de G et on note $H \triangleleft G$ si et seulement si pour tous $h \in H$, $g \in G$, $ghg^{-1} \in H$.

Q1 - Montrer que si G est commutatif, alors tout sous-groupe de G est normal.

Q2 - Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $SL_n(\mathbb{K}) \triangleleft GL_n(\mathbb{K})$.

Q3 - Soit A_n le sous-groupe de S_n (groupe symétrique d'ordre n) constitué des permutations de signature 1 (on rappelle que la signature $\varepsilon : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ est un morphisme de groupe). Montrer que $A_n \triangleleft S_n$.

Q4 - Montrer que pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on n'a pas $O_n(\mathbb{R}) \triangleleft GL_n(\mathbb{R})$.

Indication: On considérera le cas $n = 2$ ainsi que les matrices $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solution

Q1 - Supposons que G est commutatif. Soient H un sous-groupe de G , $h \in H$ et $g \in G$. Puisque G est commutatif, H l'est également et on a ainsi $ghg^{-1} = hgg^{-1} = h \in H$.

Q2 - Soient $A \in SL_n(\mathbb{K})$, $B \in GL_n(\mathbb{K})$. Par multiplicativité du déterminant, on a

$$\det(BAB^{-1}) = \det(B) \cdot \det(A) \cdot \det(B)^{-1} = \det(A) = 1,$$

donc $BAB^{-1} \in SL_n(\mathbb{K})$.

Q3 - Soient $\tau \in A_n$, $\sigma \in S_n$. La signature étant un morphisme de groupe, on a

$$\varepsilon(\sigma\tau\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma)^{-1} = \varepsilon(\tau) = 1,$$

donc $\sigma\tau\sigma^{-1} \in A_n$.

Q4 - Soient $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. $A \in O_2(\mathbb{R})$ et $B \in GL_2(\mathbb{R})$. On a donc

$$BAB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

BAB^{-1} n'est pas orthogonale (ses deux colonnes ne forment pas une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$) donc $O_2(\mathbb{R})$ n'est pas normal dans $GL_2(\mathbb{R})$.

Pour montrer le cas général avec $n \geq 3$ quelconque, on considère les matrices diagonales par blocs

$$C = \left[\begin{array}{c|c} A & 0_{2,n-2} \\ \hline 0_{n-2,2} & I_{n-2} \end{array} \right] \text{ et } D = \left[\begin{array}{c|c} B & 0_{2,n-2} \\ \hline 0_{n-2,2} & I_{n-2} \end{array} \right].$$

un produit matriciel par bloc assure que les deux premières colonnes DCD^{-1} ne sont pas de produit scalaire nul, ce qui montre le cas général.

■

Exercice 19.3 (Un nouveau groupe) ★★

Soient G un groupe, M un ensemble, $f : G \rightarrow M$ une application bijective. On pose, pour tous $x, y \in M$,

$$x \star y = f\left(f^{-1}(x)f^{-1}(y)\right).$$

Q1 - Montrer que $(M, \star)$ est un groupe.

Q2 - On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt[3]{x} = \begin{cases} -|x|^{\frac{1}{3}} & \text{si } x \leq 0 \\ |x|^{\frac{1}{3}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

On pose, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $x \oplus y = (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^3$. Montrer que $(\mathbb{R}, \oplus)$ est un groupe.

Solution

Q1 - Soient $x, y, z \in M$. Montrons que M muni de la loi $\star$ est un groupe.

- Associativité de $\star$.

$$\begin{aligned}
 x \star (y \star z) &= f \left(f^{-1}(x) f^{-1}(y \star z) \right) \\
 &= f \left(f^{-1}(x) f^{-1} \left(f \left(f^{-1}(y) f^{-1}(z) \right) \right) \right) \\
 &= f \left(f^{-1}(x) \left(f^{-1} \circ f \right) \left(f^{-1}(y) f^{-1}(z) \right) \right) \\
 &\stackrel{f^{-1} \circ f = Id_G}{=} f \left(f^{-1}(x) \left(f^{-1}(y) f^{-1}(z) \right) \right) \\
 &\stackrel{G \text{ associatif}}{=} f \left(\left(f^{-1}(x) f^{-1}(y) \right) f^{-1}(z) \right) \\
 &\stackrel{f^{-1} \circ f = Id_G}{=} f \left(\left(f^{-1} \circ f \right) \left(f^{-1}(x) f^{-1}(y) \right) f^{-1}(z) \right) \\
 &= f \left(f^{-1} \left(f \left(f^{-1}(x) f^{-1}(y) \right) \right) f^{-1}(z) \right) \\
 &= f \left(f^{-1}(x \star y) f^{-1}(z) \right) \\
 &= (x \star y) \star z.
 \end{aligned}$$

- Élément neutre pour $\star$. Posons $1_M = f(1_G)$, où 1_G est l'élément neutre de G .

$$\begin{aligned}
 x \star 1_M &= f \left(f^{-1}(x) f^{-1}(1_M) \right) \\
 &= f \left(f^{-1}(x) f^{-1}(f(1_G)) \right) \\
 &= f \left(f^{-1}(x) \left(f^{-1} \circ f \right) (1_G) \right) \\
 &\stackrel{f^{-1} \circ f = Id_G}{=} f \left(f^{-1}(x) 1_G \right) \\
 &= f \left(f^{-1}(x) \right) \\
 &= \left(f \circ f^{-1} \right)(x) \\
 &\stackrel{f^{-1} \circ f = Id_G}{=} x.
 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 1_M \star x &= f \left(f^{-1}(1_M) f^{-1}(x) \right) \\
 &= f \left(f^{-1}(f(1_G)) f^{-1}(x) \right) \\
 &= f \left(\left(f^{-1} \circ f \right) (1_G) f^{-1}(x) \right) \\
 &\stackrel{f^{-1} \circ f = Id_G}{=} f \left(1_G f^{-1}(x) \right) \\
 &= f \left(f^{-1}(x) \right) \\
 &= \left(f \circ f^{-1} \right)(x) \\
 &\stackrel{f^{-1} \circ f = Id_G}{=} x.
 \end{aligned}$$

- Inverse pour $\star$. Posons, pour $x \in M$, $x^{-1} = f(f^{-1}(x)^{-1})$.

$$\begin{aligned}
 x \star x^{-1} &= f\left(f^{-1}(x)f^{-1}\left(x^{-1}\right)\right) \\
 &= f\left(f^{-1}(x)f^{-1}\left(f\left(f^{-1}(x)^{-1}\right)\right)\right) \\
 &= f\left(f^{-1}(x)\left(f^{-1} \circ f\right)\left(f^{-1}(x)^{-1}\right)\right) \\
 &\stackrel{f^{-1} \circ f = Id_G}{=} f\left(f^{-1}(x)f^{-1}(x)^{-1}\right) \\
 &= f(1_G) \\
 &= 1_M.
 \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
 x^{-1} \star x &= f\left(f^{-1}\left(x^{-1}\right)f^{-1}(x)\right) \\
 &= f\left(f^{-1}\left(f\left(f^{-1}(x)^{-1}\right)\right)f^{-1}(x)\right) \\
 &= f\left(\left(f^{-1} \circ f\right)\left(f^{-1}(x)^{-1}\right)f^{-1}(x)\right) \\
 &\stackrel{f^{-1} \circ f = Id_G}{=} f\left(f^{-1}(x)^{-1}f^{-1}(x)\right) \\
 &= f(1_G) \\
 &= 1_M.
 \end{aligned}$$

Ainsi, $(M, \star)$ est bien un groupe.

Q2 - En prenant $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction cube, on a bien une bijection, de réciproque égale à $\sqrt[3]{\cdot}$. $(\mathbb{R}, +)$ étant un groupe, on pose, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x \oplus y = f\left(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)\right) = (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^3.$$

Ainsi, $(\mathbb{R}, \oplus)$ est bien un groupe.

■

Exercice 19.4 (Un morphisme de groupes entre matrices) ★ ★ ★

Soient $n \in \mathbb{R}$, $G \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un groupe (pas forcément un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$) non réduit à la matrice nulle.

Q1 - Soit E la matrice correspondant à l'élément neutre de G . Montrer qu'ils existent $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$P^{-1}EP = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Q2 - Soit $A \in G$. On écrit $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$ où A_1 est un bloc de taille $r \times r$ (la décomposition en blocs a la même forme que pour la forme réduite de E) et $P \in GL_n(\mathbb{R})$ est la même matrice que celle utilisée dans la question 1. Montrer que les blocs A_2 , A_3 et A_4 sont nuls.

On notera dorénavant, pour toute matrice $A \in G$, $(P^{-1}AP)^{[r]} := A_1$, pour indiquer que l'on extrait le bloc supérieur gauche de taille $r \times r$ de la matrice $P^{-1}AP$.

Q3 - Soit φ l'application définie par

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow GL_r(\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto (P^{-1}AP)^{[r]}. \end{aligned}$$

Montrer que φ est bien définie et que c'est un morphisme de groupes. En déduire que G est isomorphe à un sous-groupe de $GL_r(\mathbb{R})$.

Solution

Q1 - E est l'élément neutre de G . Ainsi, on a $E^2 = E$. E est donc une matrice de projection. Ainsi, ils existent $r \in \mathbb{N}^*$ ($r > 0$ car sinon E serait la matrice nulle) et $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tels que

$$P^{-1}EP = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Q2 - Puisque E est l'élément neutre de G , on a donc $AE = E = EA$, soit, en termes de blocs,

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, en réalisant le produit matriciel (par blocs), on obtient

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, les blocs A_2 , A_3 et A_4 sont nuls.

Q3 - Montrons que φ est bien définie, i.e. pour tout $A \in G$, $\varphi(A) \in GL_r(\mathbb{R})$. Soit $A \in G$. Il existe donc $B \in G$ tel que $AB = BA = E$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} I_r &= \varphi(E) = \varphi(A \times B) \\ &= \left(P^{-1} A B P \right)^{[r]} = \left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{[r]} \\ &= \begin{bmatrix} A_1 B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{[r]} = A^{[r]} B^{[r]} \\ &= \varphi(A) \times \varphi(B). \end{aligned}$$

Un raisonnement similaire assure que $I_r = \varphi(B) \times \varphi(A)$. Ainsi, $\varphi(A)$ est bien inversible d'inverse $\varphi(B)$, φ est bien définie.

De plus, en étendant le raisonnement précédent au cas où $A, B \in G$ sans forcément avoir $AB = BA = E$, on a $\varphi(A \times B) = \varphi(A) \times \varphi(B)$. φ est donc un morphisme de groupes.

Soit $A \in G$ tel que $\varphi(A) = I_r$. On a donc $P^{-1} A P = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, soit alors $A = P \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = E$. φ est donc injectif.

Ainsi, $\varphi : G \longrightarrow \text{Im}(\varphi)$ est donc injectif et surjectif, c'est donc un isomorphisme entre G et $\text{Im}(\varphi)$, qui est un sous-groupe de $GL_r(\mathbb{R})$.



19.2 Anneaux

Exercice 19.5 (Système de congruence) ★

Résoudre les systèmes de congruences suivants:

$$Q1 - \begin{cases} x \equiv 1 & [19] \\ x \equiv 12 & [27] \end{cases} \quad Q2 - \begin{cases} x \equiv 7 & [12] \\ x \equiv 2 & [53] \end{cases} \quad Q3 - \begin{cases} x \equiv 3 & [11] \\ x \equiv 11 & [47] \end{cases}$$

Solution

Q1 - On a

$$\begin{cases} x \equiv 1 & [19] \\ x \equiv 12 & [27] \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 39 & [19] \\ x \equiv 39 & [27] \end{cases} \xrightarrow{19 \wedge 27 = 1} x \equiv 39 \quad [513].$$

L'ensemble des solutions est donc $\{39 + 513k, k \in \mathbb{Z}\}$.

Q2 - On a

$$\begin{cases} x \equiv 7 & [12] \\ x \equiv 2 & [53] \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 55 & [12] \\ x \equiv 55 & [53] \end{cases} \stackrel{12 \wedge 53 = 1}{\iff} x \equiv 55 \quad [636] .$$

L'ensemble des solutions est donc $\{55 + 636k, k \in \mathbb{Z}\}$.

Q3 - On a

$$\begin{cases} x \equiv 3 & [11] \\ x \equiv 11 & [47] \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 58 & [11] \\ x \equiv 58 & [47] \end{cases} \stackrel{11 \wedge 47 = 1}{\iff} x \equiv 58 \quad [517] .$$

L'ensemble des solutions est donc $\{58 + 517k, k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 19.6 (Tout anneau intègre fini est un corps) ★★

Soient $(A, +, \times)$ un anneau commutatif intègre fini et $a \in A \setminus \{0\}$.

Q1 - Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \phi_a : A &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto ax \end{aligned}$$

est un automorphisme du groupe $(A, +)$.Q2 - En déduire que A est un corps.

Solution

Q1 - Soient $x, y \in A$. On a $\phi_a(x + y) = a(x + y) = ax + ay = \phi_a(x) + \phi_a(y)$. ϕ_a est donc un morphisme de groupe.

Soit $x \in \text{Ker}(\phi_a)$. On a donc $\phi_a(x) = ax = 0$. Puisque A est intègre, $a = 0$ ou $x = 0$. Comme $a \neq 0$, $x = 0$. $\text{Ker}(\phi_a) = \{0\}$. ϕ_a est donc injectif, et même bijectif puisque défini entre deux ensembles de même cardinal fini (en fait le même ensemble).

Q2 - ϕ_a étant bijectif, il est en particulier surjectif. Ainsi, il existe $x_a \in A$ tel que $ax_a = 1_A$, et même $x_aa = 1_A$ puisque A est commutatif.Tout élément $a \in A \setminus \{0\}$ est donc inversible, A est donc un corps.

Exercice 19.7 (Une équation du second degré dans un anneau non intègre) ★★

Q1 - Montrer que l'équation $x^2 - \overline{10}x + 3 = 0$ avec $x \in \frac{\mathbb{Z}}{21\mathbb{Z}}$ est équivalente au système

$$\begin{cases} y^2 + \overline{4}y + 3 = 0 & , y \in \frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}} \\ z^2 + \overline{2}z = 0 & , z \in \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \end{cases}$$

Q2 - En déduire les solutions à l'équation $x^2 - \overline{10}x + 3 = 0$ dans $\frac{\mathbb{Z}}{21\mathbb{Z}}$.

Solution

Q1 - Puisque $21 = 3 \times 7$ et $3 \wedge 7 = 1$, le lemme chinois assure que $\frac{\mathbb{Z}}{21\mathbb{Z}} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$. On a ainsi

$$\begin{aligned} x^2 - \overline{10}x + 3 = 0, x \in \frac{\mathbb{Z}}{21\mathbb{Z}} &\iff \begin{cases} x^2 - \overline{10}y + \overline{3} = 0 & , x \in \frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}} \\ x^2 - \overline{10}x + \overline{3} = 0 & , x \in \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y^2 + \overline{4}y + \overline{3} = 0 & , y \in \frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}} \\ z^2 + \overline{2}z = 0 & , z \in \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \end{cases} \end{aligned}$$

Q2 - Tout d'abord, on a, pour $y \in \frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}}$,

$$\begin{aligned} y^2 + \overline{4}y + \overline{3} = 0 &\iff (y + \overline{2})^2 - \overline{1} = 0 \\ &\iff y \in \{-\overline{1}, -\overline{3}\} \\ &\iff y \in \{\overline{4}, \overline{6}\}. \end{aligned}$$

De plus, pour $z \in \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$,

$$\begin{aligned} z^2 + \overline{2}z = 0 &\iff z \in \{\overline{0}, -\overline{2}\} \\ &\iff z \in \{\overline{0}, \overline{1}\}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{7} \\ x \equiv 0 \pmod{3} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \equiv 6 \pmod{7} \\ x \equiv 0 \pmod{3} \end{cases} \\ &\text{ou } \begin{cases} x \equiv 4 \pmod{7} \\ x \equiv 1 \pmod{3} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \equiv 6 \pmod{7} \\ x \equiv 1 \pmod{3} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \equiv 18 \pmod{7} \\ x \equiv 18 \pmod{3} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \equiv 6 \pmod{7} \\ x \equiv 6 \pmod{3} \end{cases} \\ &\text{ou } \begin{cases} x \equiv 4 \pmod{7} \\ x \equiv 4 \pmod{3} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \equiv 13 \pmod{7} \\ x \equiv 13 \pmod{3} \end{cases} \\ &\stackrel{\text{Lemme chinois}}{\iff} x \in \{\overline{4}, \overline{6}, \overline{13}, \overline{18}\} \end{aligned}$$

Exercice 19.8 (Morphismes de groupes commutatifs) ★★

Soit $(G, +)$ un groupe commutatif. Soit $M(G)$ l'ensemble des morphismes de groupes $G \rightarrow G$. On munit $M(G)$ des deux lois suivantes:

- $\oplus$: Pour tous $f, g \in M(G)$, $f \oplus g$ est donné par

$$\begin{aligned} f \oplus g : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto f(x) + g(x) \end{aligned}$$

- $\circ$: La composition, donnée pour tous $f, g \in M(G)$, par

$$\begin{aligned} f \circ g : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto f(g(x)) \end{aligned}$$

Montrer que $(M(G), \oplus, \circ)$ est un anneau.

Solution

Soient $x \in G$ et $f, g, h \in M(G)$. Montrons les différentes propriétés que doivent vérifier un anneau:

- Associativité de $\oplus$:

$$\begin{aligned} (f \oplus (g \oplus h))(x) &= f(x) + (g \oplus h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) \\ &\stackrel{G \text{ associatif}}{=} (f(x) + g(x)) + h(x) = (f \oplus g)(x) + h(x) \\ &= ((f \oplus g) \oplus h)(x). \end{aligned}$$

- Commutativité de $\oplus$:

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x) \stackrel{G \text{ commutatif}}{=} g(x) + f(x) = (g \oplus f)(x).$$

- Neutre pour $\oplus$: soit $0_G : G \rightarrow G$ l'application constante égale à 0, où 0 est le neutre de $(G, +)$. On a donc:

$$\begin{aligned} (0_G \oplus f)(x) &= 0_G(x) + f(x) = 0 + f(x) \\ &\stackrel{0: \text{ neutre de } G}{=} f(x) + 0 = f(x) + 0_G(x) \\ &= (f \oplus 0_G)(x). \end{aligned}$$

- Inverse pour $\oplus$: soit $-f : G \rightarrow G$ donnée pour tout $x \in G$ par $-f(x)$ (existence de l'inverse pour tout élément de G).

$$\begin{aligned} (f \oplus (-f))(x) &= f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) \stackrel{\text{Inverse sur } G}{=} 0. \\ ((-f) \oplus f)(x) &= (-f)(x) + f(x) = -f(x) + f(x) \stackrel{\text{Inverse sur } G}{=} 0. \end{aligned}$$

- Associativité de $\circ$:

$$\begin{aligned} (f \circ (g \circ h))(x) &= f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x))) \\ &\stackrel{\text{Composition associative}}{=} (f \circ g)(h(x)) = ((f \circ g) \circ h)(x). \end{aligned}$$

- Neutre pour $\circ$: Soit $Id_G : G \longrightarrow G$ l'application identité.

$$(f \circ Id_G)(x) = f(Id_G(x)) = f(x) = Id_G(f(x)) = (Id_G \circ f)(x)$$

- Distributivité de $\circ$ sur $\oplus$:

$$\begin{aligned} ((f \oplus g) \circ h)(x) &= (f \oplus g)(h(x)) = f(h(x)) + g(h(x)) \\ &= (f \circ h)(x) + (g \circ h)(x) = ((f \circ h) \oplus (g \circ h))(x). \\ (f \circ (g \oplus h))(x) &= f((g \oplus h)(x)) = f(g(x) + h(x)) \\ &\stackrel{f: \text{morphisme}}{=} f(g(x)) + f(h(x)) = (f \circ g)(x) + (f \circ h)(x) \\ &= ((f \circ g) \oplus (f \circ h))(x). \end{aligned}$$



Exercice 19.9 (Etude d'un anneau) ★ ★ ★

On considère l'ensemble

$$\mathbb{Z}[i\sqrt{7}] = \{a + ib\sqrt{7}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

On considère également l'application N définie par

$$\begin{aligned} N : \mathbb{Z}[i\sqrt{7}] &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ z &\longmapsto z\bar{z} = |z|^2. \end{aligned}$$

Q1 - Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$ est un anneau commutatif.

Q2 - Montrer que N est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et que pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$, $N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2)$. En déduire l'ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$.

Q3 - Montrer que l'ensemble $I := \{(1 + i\sqrt{7})u + 2v, (u, v) \in \mathbb{Z}[i\sqrt{7}]^2\}$ est un idéal de $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$.

Q4 - Montrer que I n'est pas principal.

Indication: On suppose que I est principal, i.e. $I = \langle \omega \rangle$. En notant que $1 + i\sqrt{7}$ et 2 appartiennent à I puis en calculant leurs normes, que peut-on en déduire sur $N(\omega)$ puis sur ω ?

Solution

Q1 - Montrons que $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$. Ils existent donc $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $z_1 = a_1 + ib_1\sqrt{7}$ et $z_2 = a_2 + ib_2\sqrt{7}$.

- $0 = 0 + 0 \cdot i\sqrt{7} \in \mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$.
 - $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)\sqrt{7} \in \mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$.
 - $1 = 1 + 0 \cdot i\sqrt{7} \in \mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$.
 - $z_1 z_2 = (a_1 + ib_1\sqrt{7})(a_2 + ib_2\sqrt{7}) = (a_1 a_2 - 7b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)\sqrt{7} \in \mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$.
- De plus, $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}] \subseteq \mathbb{C}$ donc la multiplication commute.

Donc $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}$ pour l'addition, contient 1 et est stable par multiplication. C'est donc un sous-anneau de $\mathbb{C}$, donc un anneau.

Q2 - Soit $z \in \mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$. Ils existent donc $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $z = a + ib\sqrt{7}$. On a ainsi $N(z) = (a + ib\sqrt{7})(a - ib\sqrt{7}) = a^2 + 7b^2 \in \mathbb{N}$. De plus, soient $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$. La multiplicativité du module assure que

$$N(z_1 z_2) = |z_1 z_2|^2 = (|z_1| |z_2|)^2 = |z_1|^2 |z_2|^2 = N(z_1) N(z_2).$$

Soit $z \in \mathbb{Z}[i\sqrt{7}]^\times$. Il existe $w \in \mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$ tel que $zw = 1$. Donc, en appliquant N , on a $N(z)N(w) = N(1) = 1$. Donc, puisque N est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $N(z) \leq 1$, soit en fait $N(z) = 1$. Donc $z = \pm 1$.

Réciproquement, si $z = \pm 1$, alors $z^2 = 1$, donc $z \in \mathbb{Z}[i\sqrt{7}]^\times$.

On a ainsi

$$\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]^\times = \{-1, 1\}.$$

Q3 - Montrons que I est un idéal de $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$.

- En prenant $u = v = 0$, on a bien $0 \in I$. Soient $z_1, z_2 \in I$. Ils existent donc $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$ tels que $z_1 = (1 + i\sqrt{7})u_1 + 2v_1$ et $z_2 = (1 + i\sqrt{7})u_2 + 2v_2$. Puisque $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$ est un anneau, il est stable par soustraction. On a ainsi

$$z_1 - z_2 = (1 + i\sqrt{7})(u_1 - u_2) + 2(v_1 - v_2) \in I.$$

- De plus, si $a \in \mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$, alors, comme $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$ est un anneau (donc est stable par multiplication), on a ainsi

$$az_1 = (1 + i\sqrt{7})(au_1) + 2(au_2) \in \mathbb{Z}[i\sqrt{7}].$$

I est donc un idéal de $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$.

Q4 - Supposons que I est principal, i.e. $I = \{w\omega, w \in \mathbb{Z}[i\sqrt{7}]\}$ pour un certain $\omega \in \mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$. Puisque $1 + i\sqrt{7}, 2 \in I$, on peut donc écrire $1 + i\sqrt{7} = w_1\omega$ et $2 = w_2\omega$, avec $w_1, w_2 \in \mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$. En appliquant N , on a $N(w_1)N(\omega) = 8$ et $N(w_2)N(\omega) = 4$.

Puisque N est à valeurs entières positives, on a donc $N(\omega) | 4, 8$, i.e. $N(\omega) \in \{1, 2, 4\}$.

- Si $N(\omega) = 1$, alors $\omega = \pm 1$ et donc $I = \mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$. En particulier, $1 \in I$, donc ils existent $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ tels que

$$1 = (1 + i\sqrt{7})(a_1 + ib_1\sqrt{7}) + 2(a_2 + ib_2\sqrt{7}).$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire, on aboutit à ce système

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 - 7b_1 = 1 \\ b_1 + a_1 + 2b_2 = 0 \end{cases}.$$

En prenant ces équations modulo 2, on a

$$\begin{cases} a_1 + b_1 \equiv 1 \pmod{2} \\ a_1 + b_1 \equiv 0 \pmod{2} \end{cases},$$

ce qui conduit à $1 \equiv 0 \pmod{2}$. Cette congruence étant impossible, on ne peut pas avoir $\omega = 1$.

- Si $N(\omega) = 2$, alors, en écrivant $\omega = \alpha + i\beta\sqrt{7}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, on a $N(\omega) = \alpha^2 + 7\beta^2$. Si $\beta = 0$, alors $\alpha^2 = 2$, ce qui est impossible car α est entier. Si $|\beta| \geq 1$, alors $5 = \alpha^2 + 7\beta^2 \geq \alpha^2 + 7$, soit $\alpha^2 \leq -5$, ce qui est impossible. Donc on ne peut pas avoir $N(\omega) = 2$.
- Si $N(\omega) = 4$, alors $\omega = \pm 2$, et donc $I = \{2w, w \in \mathbb{Z}[i\sqrt{7}]\}$. En particulier $1 + i\sqrt{7} \in I$, donc il existe $w_1 \in \mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$ tel que $1 + i\sqrt{7} = 2w_1$. En appliquant N , on a $8 = 4N(w_1)$, donc $N(w_1) = 2$. Or, on a vu précédemment qu'il n'existe aucun $w_1 \in \mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$ tel que $N(w_1) = 2$. Donc $N(\omega)$ ne peut pas être égal à 4.

Ainsi, aucune valeur de ω ne convient. I n'est donc pas principal. ■

19.3 Factorisation de polynômes

Exercice 19.10 (Produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$) ★

Factoriser le polynôme $P = X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ en un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$

Solution

On sait que $(X - 1)P = X^7 - 1$, donc, d'après les propriétés des racines 7-ièmes de l'unité, on a

$$\begin{aligned}
 (X-1)P &= \prod_{k=0}^6 \left(X - e^{\frac{2ki\pi}{7}} \right) \\
 &= (X-1) \left(X - e^{\frac{2i\pi}{7}} \right) \left(X - e^{\frac{4i\pi}{7}} \right) \left(X - e^{\frac{6i\pi}{7}} \right) \left(X - e^{\frac{8i\pi}{7}} \right) \left(X - e^{\frac{10i\pi}{7}} \right) \left(X - e^{\frac{12i\pi}{7}} \right).
 \end{aligned}$$

On a donc

$$P = \left(X - e^{\frac{2i\pi}{7}} \right) \left(X - e^{\frac{4i\pi}{7}} \right) \left(X - e^{\frac{6i\pi}{7}} \right) \left(X - e^{\frac{8i\pi}{7}} \right) \left(X - e^{\frac{10i\pi}{7}} \right) \left(X - e^{\frac{12i\pi}{7}} \right).$$

Ce produit correspond à un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. Pour avoir un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, on va regrouper les paires de racines conjuguées entre elles., donnant ainsi

$$\begin{aligned}
 P &= \left(X - e^{\frac{2i\pi}{7}} \right) \left(X - e^{\frac{12i\pi}{7}} \right) \left(X - e^{\frac{4i\pi}{7}} \right) \left(X - e^{\frac{10i\pi}{7}} \right) \left(X - e^{\frac{6i\pi}{7}} \right) \left(X - e^{\frac{8i\pi}{7}} \right) \\
 &= \left(X - e^{\frac{2i\pi}{7}} \right) \left(X - e^{-\frac{2i\pi}{7}} \right) \left(X - e^{\frac{4i\pi}{7}} \right) \left(X - e^{-\frac{4i\pi}{7}} \right) \left(X - e^{\frac{6i\pi}{7}} \right) \left(X - e^{-\frac{6i\pi}{7}} \right) \\
 &= \left(X^2 - 2 \cos \left(\frac{2\pi}{7} \right) X + 1 \right) \left(X^2 - 2 \cos \left(\frac{4\pi}{7} \right) X + 1 \right) \left(X^2 - 2 \cos \left(\frac{6\pi}{7} \right) X + 1 \right)
 \end{aligned}$$

■

Exercice 19.11 (Produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$) ★★

Soit le polynôme $P = X^5 + 3X^4 - 3X^3 - 7X^2 - 6$.

Q1 - Réaliser la division euclidienne de P par $X^2 - 3$.

Q2 - On suppose que $X^3 + 3X^2 + 2$ admet une racine dans $\mathbb{Q}$, que l'on note $r = \frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$. Montrer que q divise p^3 .

Q3 - Montrer que r est entier. En déduire que $X^3 + 3X^2 + 2$ n'admet pas de racine dans $\mathbb{Q}$.

Q4 - En déduire une factorisation de P en polynômes irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$.

Solution

Q1 - Réalisons notre division euclidienne

$$\begin{array}{r|l}
 X^5 + 3X^4 - 3X^3 - 7X^2 - 6 & X^2 - 3 \\
 - X^5 & X^3 + 3X^2 + 2 \\
 \hline
 3X^4 & \\
 - 3X^4 & + 9X^2 \\
 \hline
 & + 2X^2 - 6 \\
 & - 2X^2 + 6 \\
 \hline
 & 0
 \end{array}$$

On a ainsi $P = (X^2 - 3)(X^3 + 3X^2 + 2)$.

- Q2 - Si $r \in \mathbb{Q}$ est une racine de $X^3 + 3X^2 + 2$, alors $r^3 + 3r^2 + 2 = 0$, soit, en multipliant par q^3 , $p^3 + 3qp^2 + 2q^3 = 0$. Puisque q divise $3qp^2 + 2q^3$ et $p^3 = -3qp^2 - 2q^3$, alors q divise p^3 .
- Q3 - Comme $p \wedge q = 1$, le lemme de Gauss assure que $q = 1$, donc $r = p \in \mathbb{Z}$. On a ainsi $p^3 + 3p^2 + 2 = 0$, donc, puisque p divise $p^3 + 3p^2$, il divise $2 = -p^3 - 3p^2$. Donc $p \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Or, le polynôme $X^3 + 3X^2 + 2$ vaut respectivement 6, 4, 2, 6, 22 lorsqu'il est évalué en $-2, -1, 0, 1, 2$, donc il n'admet pas de racine.
- Q4 - $X^3 + 3X^2 + 2$ est de degré 3. Il n'admet pas de racine dans $\mathbb{Q}$, donc ne peut pas être factorisé en deux polynômes de degré plus petits (1 et 2) dans $\mathbb{Q}[X]$. Il est donc irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

De plus, le polynôme $X^2 - 3$ n'admet pas de racine dans $\mathbb{Q}$ (dans $\mathbb{R}$, ses deux racines sont $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$, mais $\sqrt{3}$ est irrationnel), il est donc irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ (on ne peut pas le factoriser en un produit de deux polynômes de degré plus petit, i.e. 1 et 1).

Ainsi, la décomposition en produit de polynômes irréductibles de P dans $\mathbb{Q}[X]$ est

$$X^5 + 3X^4 - 3X^3 - 7X^2 - 6 = (X^2 - 3)(X^3 + 3X^2 + 2).$$

■

Partie II

Exercices de Concours

Chapitre 20

Exercices Concours

20.1 Niveau 1 (CCINP - Mines-Télécom)

Exercice 20.1. (D'après CCINP 2023 -MP) ▼

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $AB - BA = B$.

- 1 - Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, AB^k - B^k A = kB^k$.
- 2 - Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}[X], AP(B) - P(B)A = BP'(B)$.
- 3 - En considérant l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\varphi(M) = AM - MA$, montrer que B est nilpotente.
- 4 - Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, B^k \chi_B^{(k)}(B) = 0$ et retrouver que B est nilpotente.

Exercice 20.2. (D'après CCINP 2025 - MP) ▼

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- 1 - Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
- 2 - La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
- 3 - Déterminer, en le justifiant, le polynôme minimal de A .
- 4 - Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X - 1)^2$ et en déduire la valeur de A^n .

Exercice 20.3. (D'après CCINP 2025 - MP) ▼

- 1 - Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev
- 2 - Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_n \in L^2$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$.
- Prouver que $\forall a \in]0, +\infty[, \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[Y_1]\right| \geq a\right) \leq \frac{\mathbb{V}(Y_1)}{na^2}$.
- 3 - **Application:** On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0.35 et 0.45 ?

Indication: considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ième}}$ tirage.

Exercice 20.4. (D'après CCINP 2025 - MP) ▼

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

On pose: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, +\infty[, f_n(t) = \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t}$.

- 1 - (a) - Justifier que la suite (a_n) est bornée.
- (b) - Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
- On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- 2 - (a) - Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et calculer $\int_0^{+\infty} g_n(t) dt$. En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$.
- (b) - Prouver que $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 20.5. (D'après Mines-Télécom 2022 - MP) ▼

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

- 1 - Donner, $\forall n \in \mathbb{N}$, A^n .
- 2 - A est-elle inversible ? Si oui, donner $\forall n \in \mathbb{Z}$, A^n .

Exercice 20.6. (D'après Mines-Télécom 2022 - MP) ▼

On pose $\forall x \in D$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

- 1 - Déterminer l'ensemble de définition D de f .
- 2 - Démontrer que f est continue sur D .
- 3 - Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 20.7. (D'après Mines-Télécom 2022 - MP) ▼

Soit $(E) : y'' + 2y' + y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Montrer que les solutions de (E) ont une limite finie en 0^+ .

Exercice 20.8. (D'après Mines-Télécom 2022 - MP) ▼

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $M^2 + M + I_n = 0$.

- 1 - Montrer que n est pair.
- 2 - Déterminer $\text{Tr}(M)$, $\text{rg}(M)$ et $\det(M)$.
- 3 - Donner un exemple pour $n = 2$. Déterminer toutes les solutions.

Exercice 20.9. (D'après Mines-Télécom 2022 - MP) ▼

Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$

Exercice 20.10. (D'après Mines-Télécom 2021 - MP) ▼

Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on pose $P_n = X^n - nX + 1$.

- 1 - Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, P_n admet une unique racine sur $[0, 1]$, notée x_n .
- 2 - Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ converge et déterminer sa limite.
- 3 - Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n}$.

20.2 Niveau 2 (Centrale - Mines-Ponts)

Exercice 20.11. (D'après Mines-Ponts 2025 - MP) ▼

- **Exercice 1 :** A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur a_0 , la suite définie par

$$a_{n+1} = 2^n - a_n,$$

est-elle croissante ?

- **Exercice 2 :** Trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$M^3 + 2M = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$$

Exercice 20.12. (D'après Mines-Ponts 2025 - MP) ▼

- **Exercice 1 :** On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par son premier terme $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}]$, et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \sin(u_n).$$

Déterminer un développement limité à deux termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- **Exercice 2 :** On désigne par G un sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on suppose que $(G, \times)$ est un groupe, où $\times$ désigne le produit interne de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 1 - Démontrer que tous les éléments de G ont le même rang (on le notera r).
- 2 - Démontrer qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$, et H un sous-groupe de $GL_r(\mathbb{R})$ tels que:

$$G = \left\{ P^{-1} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P, A \in H \right\}.$$

Exercice 20.13. (D'après Mines-Ponts 2025 - PC) ▼

Soit un entier $n \geq 2$. On note A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent 0 et les autres coefficients valent 1.

- 1 - Calculer A^2 . En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} .
- 2 - Déterminer les valeurs propres de A et les espaces propres correspondants.

Exercice 20.14. (D'après Mines-Ponts 2025 - PC) ▼

On fixe $\alpha > 0$. On pose $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction

$$\begin{aligned} u_n : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sin^n(x) \cos^\alpha(x). \end{aligned}$$

1 - Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge simplement sur I .

2 - Cette série de fonctions converge-t-elle normalement sur I ?

3 - Converge-t-elle uniformément sur I ?

20.3 Corrigé exercices niveau 1**Corrigé exercice 20.1**

1 - Montrons cette égalité par récurrence:

- **Initialisation:** $AB^0 - B^0A = A - A = 0 = 0 \cdot B^0$.
- **Hérédité:** Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $AB^k - B^kA = kB^k$. On a ainsi

$$\begin{aligned} AB^{k+1} - B^{k+1}A &= AB^{k+1} - B^kAB + B^kAB - B^{k+1}A \\ &= (AB^k - B^kA)B + B^k(AB - BA). \end{aligned}$$

Or, l'hypothèse de récurrence assure que $AB^k - B^kA = kB^k$ et on a également $AB - BA = B$, donnant ainsi

$$AB^{k+1} - B^{k+1}A = kB^{k+1} + B^{k+1} = (k+1)B^{k+1}.$$

- **Conclusion:** On a donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, AB^k - B^kA = kB^k.$$

2 - Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On écrit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, où $d = \deg(P)$ et $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{C}$. On a ainsi

$$\begin{aligned} AP(B) - P(B)A &= A \left(\sum_{k=0}^d a_k B^k \right) - \left(\sum_{k=0}^d a_k B^k \right) A \\ &= \sum_{k=0}^d a_k AB^k - \sum_{k=0}^d a_k B^k A \\ &= \sum_{k=0}^d a_k (AB^k - B^k A). \end{aligned}$$

D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
 AP(B) - P(B)A &= \sum_{k=0}^d a_k k B^k \\
 &= \sum_{k=0}^d a_k k B^k \\
 &= \sum_{k=1}^d B a_k k B^{k-1} \\
 &= B \left(\sum_{k=1}^d a_k k B^{k-1} \right) \\
 &= BP'(B).
 \end{aligned}$$

3 - Supposons que B ne soit pas nilpotente, i.e. $\forall k \in \mathbb{N}, B^k \neq 0$. D'après la première question, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \varphi(B^k) = AB^k - B^k A = kB^k.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, k est donc valeur propre de l'endomorphisme $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et B^k est un vecteur propre associé, ce qui est impossible car $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel de dimension finie, et admet au plus n^2 valeurs propres. B est donc nilpotente.

4 - Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, B^k \chi_B^{(k)}(B) = 0$:

- **Initialisation:** Par définition de polynôme caractéristique, $\chi_B(B) = 0$, donc $B^0 \chi_B^{(0)}(B) = 0$.
- **Hérédité:** Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $B^k \chi_B^{(k)}(B) = 0$. D'après la seconde question, on a

$$\begin{aligned}
 0 &= AB^k \chi_B^{(k)}(B) - B^k \chi_B^{(k)}(B)A = B \left[kB^{k-1} \chi_B^{(k)}(B) + B^k \chi_B^{(k+1)}(B) \right] \\
 &= \underbrace{k B^k \chi_B^{(k)}(B)}_{=0} + B^{k+1} \chi_B^{(k+1)}(B).
 \end{aligned}$$

Cela montre l'hérédité.

- **Conclusion:** On a $\forall k \in \mathbb{N}, B^k \chi_B^{(k)}(B) = 0$.

Puisque $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, B est trigonalisable, et admet n valeurs propres (comptées avec multiplicité). Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de B . Supposons que B n'est pas nilpotente. On a ainsi $\lambda \neq 0$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lambda^k \chi_B^{(k)}(\lambda) = 0,$$

soit alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \chi_B^{(k)}(\lambda) = 0,$$

ce qui implique, via la formule de Taylor, que $\chi_B = 0$, ce qui est impossible (le polynôme caractéristique d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est toujours de degré n). B est donc nilpotente.

Corrigé exercice 20.2

1 - Déterminons le polynôme caractéristique de A .

$$\begin{aligned} \chi_A &= \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X & -2 & 1 \\ 1 & X-3 & 1 \\ 1 & -2 & X \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\downarrow C_1}{=} X \begin{vmatrix} X-3 & 1 \\ -2 & X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ X-3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= X[X^2 - 3X + 2] + 2X - 2 - 2 - X + 3 \\ &= X^3 - 3X^2 + 2X + X - 1 \\ &= X^3 - 3X^2 + 3X - 1 \\ &= (X-1)^3. \end{aligned}$$

A admet donc 1 pour seule valeur propre.

2 - Comme $\det(A) = 1$ (lien entre déterminant et coefficient de degré 0 de χ_A), A est inversible.

En revanche, si A était diagonalisable, elle serait semblable à l'identité, donc égale à l'identité, ce qui n'est pas le cas. A n'est donc pas diagonalisable.

3 - $\mu_A | (X-1)^3$, donc $\mu_A = X-1$ ou $\mu_A = (X-1)^2$. Or, on a

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \neq 0,$$

donc $\mu_A \neq X-1$. De plus, on a

$$(A - I_3)^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0,$$

donc $\mu_A = (X-1)^2$.

4 - Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $P_n = X^n$. La formule de Taylor assure que $X^n = \sum_{k=0}^n \frac{P_n^{(k)}(1)}{k!} (X-1)^k$,
donnant ainsi

$$\begin{aligned}
X^n &= \sum_{k=2}^n \frac{P_n^{(k)}(1)}{k!} (X-1)^k + P'_n(1)(X-1) + P_n(1) \\
&= \underbrace{\sum_{k=2}^n \frac{P_n^{(k)}(1)}{k!} (X-1)^k}_{\text{Divisible par } (X-1)^2} + \underbrace{nX + 1 - n}_{\text{Reste}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, en évaluant en A , on a

$$A^n = nA + (1-n)I_n = \begin{bmatrix} -n+1 & 2n & -n \\ -n & 2n+1 & -n \\ -n & 2n & -n+1 \end{bmatrix}.$$

Corrigé exercice 20.3

1 - Soient X une variable aléatoire réelle L^2 et $\varepsilon > 0$. On a $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$.

2 - Tout d'abord, on a

$$\mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(Y_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(Y_i, Y_j).$$

Puisque les Y_i sont indépendantes, le second terme est nul. De plus, elles suivent la même loi, donc la variance est identique, donnant ainsi

$$\mathbb{V}(S_n) = n\mathbb{V}(Y_1).$$

De plus, les Y_i suivent la même loi donc on même espérance, donnant également

$$\mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right] = \mathbb{E}[Y_1].$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev assure ainsi que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[Y_1]\right| \geq a\right) \leq \frac{\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{a^2} = \frac{\mathbb{V}(S_n)}{n^2 a^2} = \frac{\mathbb{V}(Y_1)}{na^2}.$$

3 - Soit Y_i la variable aléatoire donnant le nombre de boules rouges prise au $i^{\text{ième}}$ tirage. Y_i suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{5}$. Ainsi, par indépendance des tirages, les Y_i sont bien indépendantes et de même loi. Elles sont également L_2 car prenant uniquement 0 et 1 comme valeurs. De plus, on a

$$\mathbb{E}[Y_1] = \frac{2}{5} \text{ et } \mathbb{V}(Y_1) = \frac{6}{25}.$$

Ainsi, $\frac{S_n}{n}$ correspond à la proportion de boules rouges obtenues après n tirages. On cherche à minorer n tel que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{2}{5}\right| \leq \frac{5}{100}\right) \geq 0.95,$$

ce qui revient à trouver n tel que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{2}{5}\right| \geq \frac{5}{100}\right) \leq 0.05. \quad (20.1)$$

Or, d'après la question précédente, on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{2}{5}\right| \geq \frac{5}{100}\right) \leq \frac{6}{25} \cdot \frac{100^2}{5^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{6 \cdot 10^4}{5^4 \cdot n} = \frac{6 \cdot 2^4}{n} = \frac{96}{n}.$$

Ainsi, il suffit que $\frac{96}{n} \leq 0.05$ pour que la condition (20.1) soit respectée, ce qui revient à dire que $n \geq 96 \cdot 20 = 1920$.

Corrigé exercice 20.4

- 1 - (a) - $\sum a_n$ est une série absolument convergente, donc convergente. Ainsi, la suite (a_n) est de limite nulle. En effet, on a

$$|a_n| = \sum_{k=0}^n |a_k| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M - M = 0.$$

La suite (a_n) est donc bornée.

- (b) - Soit $t \in [0, +\infty[$. On a

$$\sum_{k=0}^n |f_k(t)| = \sum_{k=0}^n |a_k| \underbrace{\frac{t^k}{k!}}_{\leq e^t} e^{-t} = \sum_{k=0}^n |a_k| \leq M.$$

Ainsi, $\sum f_n(t)$ est absolument convergente, donc est convergente, donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement.

- 2 - (a) - Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissance comparée, on a $e^{-t} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{t^{n+2}}\right)$ donc $g_n(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Ainsi, g_n est intégrable au voisinage de $+\infty$ (comparaison avec une intégrale "de Riemann"). De plus, la continuité de g_n (produit polynôme-exponentielle) assure l'intégrabilité ailleurs. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} g_n(t) dt$ converge. Calculons-la par récurrence sur n .

Soit $T > 0$. Une intégration par parties assure que

$$\begin{aligned}\int_0^T g_n(t) dt &= \int_0^T t^{n+1} e^{-t} dt \stackrel{IPP}{=} \left[-t^{n+1} e^{-t} \right]_{t=0}^{t=T} + (n+1) \int_0^T t^n e^{-t} dt \\ &= -T^{n+1} e^{-T} + (n+1) \int_0^T g_n(t) dt.\end{aligned}$$

Donc, si $T \rightarrow +\infty$, alors

$$\int_0^{+\infty} g_{n+1}(t) dt = (n+1) \int_0^{+\infty} g_n(t) dt.$$

Puisque $\int_0^{+\infty} g_0(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$, on en déduit que $\int_0^{+\infty} g_n(t) dt = n!$.

De plus, puisque $|f_n| = \frac{|a_n|}{n!} g_n$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$ converge, et on a, par linéarité:

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = |a_n|.$$

(b) - Nous avons

- La série $\sum \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \sum |a_n|$ est convergente.
- $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n sont continues.
- $\sum f_n$ converge simplement.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable.

Lé théorème d'interversion série/intégrale assure que

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(t) dt &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t} \right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} \underbrace{\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt}_{=n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.\end{aligned}$$

Corrigé exercice 20.5

1 - Calculons le polynôme caractéristique de A .

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 1 \\ -2 & X-4 \end{vmatrix} = (X-1)(X-4) + 2 = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de X^n par χ_A , de degré 2, assure qu'ils existent $Q_n \in \mathbb{R}[X]$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$X^n = Q_n(X)\chi_A(X) + a_nX + b_n.$$

En évaluant cette égalité polynomiale en A , on a, puisque χ_A annule A ,

$$A^n = a_nA + b_nI_2.$$

De plus, 2 et 3 étant racines de χ_A , évaluer cette même égalité polynomiale donne le système

$$\begin{cases} 2^n = 2a_n + b_n \\ 3^n = 3a_n + b_n \end{cases}.$$

La résolution de ce système linéaire donne

$$\begin{cases} a_n = 3^n - 2^n \\ b_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n \end{cases}.$$

On a ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = (3^n - 2^n)A + (3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n)I_2 = \begin{bmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ 2 \cdot 3^n - 2^{n+1} & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{bmatrix}.$$

2 - On a $\det(A) = 6 \neq 0$. La matrice A est donc inversible. La formule de la comatrice assure donc que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$A^{-p} = \frac{1}{\det(A^p)} \text{Com}(A^p)^T.$$

Soit alors $p \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} A^{-p} &= \frac{1}{6^p} \begin{bmatrix} -2^p + 2 \cdot 3^p & 2^{p+1} - 2 \cdot 3^p \\ 3^p - 2^p & 2^{p+1} - 3^p \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{1}{6^p} \begin{bmatrix} -2^p + 2 \cdot 3^p & 3^p - 2^p \\ 2^{p+1} - 2 \cdot 3^p & 2^{p+1} - 3^p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3^{-p} + 2^{1-p} & 2^{-p} - 3^{-p} \\ 2 \cdot 3^{-p} - 2^{1-p} & 2 \cdot 3^{-p} - 2^{-p} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En prenant $n = -p$, on retrouve bien

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ 2 \cdot 3^n - 2^{n+1} & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{bmatrix}.$$

Cette formule est donc valide pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Corrigé exercice 20.6

1 - Soit $x \geq 0$. f est la somme d'une série alternée. En effet, pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{x+n} \geq 0$.

Comme $\frac{1}{x+n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, le théorème des séries alternées assure que la suite des sommes partielles converge, et f est donc une somme finie.

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, \dots\}$, alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$ est presque alternée, autrement dit, la série $\sum_{n \geq p} \frac{(-1)^n}{x+n}$ est alternée, avec $p \geq -[x] + 1$. De nouveau, le théorème des séries alternées donne la convergence de la série vers sa somme f (les premiers termes n'ont pas d'importance).

On a donc

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, \dots\}$$

2 - Montrons la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ vers f , où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_n : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{(-1)^n}{x+n}. \end{aligned}$$

Soient $a < b \in D$ tels que $[a, b] \subset D$. Montrons la convergence uniforme sur le segment $[a, b]$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\sup_{x \in [a, b]} \left| \sum_{n=1}^N u_n(x) - f(x) \right| = \sup_{x \in [a, b]} \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x) \right|.$$

Le théorème des séries alternées donnant une majoration du reste par son premier terme en valeur absolue, on a ainsi

$$\sup_{x \in [a, b]} \left| \sum_{n=1}^N u_n(x) - f(x) \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} \left| \frac{1}{x+N+1} \right| \leq \frac{1}{\min\{|a|, |b|\} + N + 1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge donc uniformément vers f , donc est continue sur $[a, b]$ (préservation de la continuité à la limite par convergence uniforme).

f est donc continue sur tout segment de D , donc est continue sur D .

3 - Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Posons

$$f_N = \sum_{n=1}^N u_n.$$

Soit $x > 0$. On a

$$\begin{aligned} f_N(x) + f_N(x+1) &= \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{x+n} + \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{x+n+1} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{x+n} + \sum_{n=2}^N \frac{(-1)^{n+1}}{x+n} \\ &= \frac{-1}{x+1}. \end{aligned}$$

On a ainsi, si $N \longrightarrow +\infty$,

$$f(x) + f(x+1) = \frac{-1}{x+1}.$$

De plus, si $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} f_N(x) - f_N(x+1) &= \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{x+n} - \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{x+n+1} \\ &= \frac{-1}{x+1} + \sum_{n=1}^N (-1)^n \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1} \right] \\ &= \frac{-1}{x+1} + \frac{(-1)^N}{x+N+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, si $N \longrightarrow +\infty$,

$$f(x) - f(x+1) = \frac{-1}{x+1} \leq 0.$$

Pour tout $x > 0$, on a donc l'encadrement

$$\frac{-1}{x} = f(x) + f(x-1) \leq 2f(x) \leq f(x) + f(x+1) = \frac{-1}{x+1}.$$

On a alors

$$-2xf(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1,$$

ce qui donne l'équivalent

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2x}.$$

Corrigé exercice 20.7

Déterminons les solutions de (E) . On commence par réécrire cette équation sous forme "vectorielle"

$$X' = AX + B(x),$$

où $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $B \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}))$ et X est donné par

$$X = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}.$$

On également $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ et pour tout $x > 0$, $B(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} \end{bmatrix}$.

Fixons $x_0 > 0$. La solution est donnée par $X = X_h + X_p$ où X_h est la solution à l'équation homogène et X_p est une solution particulière.

Si $X_0 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, alors les solutions à l'équation homogène sont données par

$$X_h(x) = e^{(x-x_0)A} X_0.$$

Recherchons une solution particulière à l'aide de la méthode de la variation de la constante en 2D: soit $\Lambda \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}))$. Posons, pour tout $x > 0$,

$$X_p(x) = e^{(x-x_0)A} \Lambda(x).$$

L'équation $X_p' = AX_p + B(x)$ assure d'une part que

$$X_p'(x) = A e^{(x-x_0)A} \Lambda(x) + e^{(x-x_0)A} \Lambda'(x),$$

et d'autre part que

$$X_p'(x) = A e^{(x-x_0)A} \Lambda(x) + B(x).$$

On obtient ainsi, pour tout $x > 0$,

$$\Lambda'(x) = e^{(x_0-x)A} B(x).$$

Ainsi, les solutions de (E) sont données pour tout $x > 0$ et pour tout $X_0 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ par

$$X(x) = e^{(x-x_0)A} X_0 + e^{(x-x_0)A} \int_{x_0}^x e^{(x_0-t)A} B(t) dt,$$

soit alors

$$X(x) = e^{(x-x_0)A} X_0 + e^{xA} \int_{x_0}^x e^{-tA} B(t) dt.$$

A présent, déterminons la forme de l'exponentielle de A . On sait que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est donné par $\chi_A = (X - 1)^2$. A peut donc se trigonaliser et admet 1 pour valeur propre double. Autrement dit, ils existent $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$T := P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On a alors $T = I_2 + N$, avec $N = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ qui est une matrice nilpotente vérifiant $N^2 = 0$. Puisque I_2 et N commutent, la formule du binôme de Newton assure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T^n = (-I_2)^n + n(-I_2)^{n-1}T = \begin{bmatrix} (-1)^n & (-1)^{n+1}\alpha \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix}.$$

Soit $s \in \mathbb{R}$. Puisque $e^{sT} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^n T^n}{n!}$, on a

$$e^{sT} = \begin{bmatrix} e^{-s} & -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n s^n}{(n-1)!} \alpha \\ 0 & e^{-s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-s} & \alpha s \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} s^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & e^{-s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-s} & \alpha s e^{-s} \\ 0 & e^{-s} \end{bmatrix}.$$

On a donc, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} X(x) &= e^{(x-x_0)A} X_0 + e^{xA} \int_{x_0}^x P \begin{bmatrix} e^t & \alpha t e^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix} P^{-1} \frac{1}{\sqrt{t}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt \\ &= e^{(x-x_0)A} X_0 + e^{xA} \int_{x_0}^x P \begin{bmatrix} \frac{e^t}{\sqrt{t}} & \alpha \sqrt{t} e^t \\ 0 & \frac{e^t}{\sqrt{t}} \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt. \end{aligned}$$

La fonction $s \mapsto e^{sA}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, la linéarité de l'intégrale assure que X admet une limite finie en 0^+ si et seulement si les intégrales $\int_{x_0}^x \sqrt{t} e^t dt$ et $\int_{x_0}^x \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt$ admettent une limite finie lorsque $x \rightarrow 0^+$.

La fonction $t \mapsto \sqrt{t} e^t$ étant continue sur $\mathbb{R}$, la première intégrale admet bien une limite finie lorsque $x \rightarrow 0^+$. Pour la seconde intégrale, une intégration par parties assure que

$$\int_{x_0}^x \frac{\sqrt{t}}{e^t} dt = 2\sqrt{x}e^x - 2\sqrt{x_0}e^{x_0} - 2 \int_{x_0}^x \sqrt{t} e^t dt.$$

On retrouve la première intégrale, garantissant ainsi la convergence lorsque $x \rightarrow 0^+$.

Ainsi, X , et donc y , admet une limite finie lorsque $x \rightarrow 0^+$.

Corrigé exercice 20.8

1 - $X^2 + X + 1$ est un polynôme annulateur de M , et est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, c'est donc le polynôme minimal de M . De plus, ce polynôme se factorise dans $\mathbb{C}[X]$ en

$$X^2 + X + 1 = (X - j)(X - \bar{j}),$$

avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\bar{j} = e^{\frac{-2i\pi}{3}}$. Les valeurs propres de M sont donc j et $\bar{j}$.

Soient m_j et $m_{\bar{j}}$ les multiplicités algébriques respectives de j et $\bar{j}$ (i.e. multiplicité comme racine de χ_M). On a donc $\text{Tr}(M) = m_j \cdot j + m_{\bar{j}} \cdot \bar{j}$ et $n = m_j + m_{\bar{j}}$. Puisque $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on doit avoir $\text{Tr}(M) \in \mathbb{R}$. Posons $m := \min(m_j, m_{\bar{j}})$. On a

$$\text{Tr}(M) = \begin{cases} m(j + \bar{j}) + (m_j - m)j & \text{si } m_j > m_{\bar{j}} \\ m(j + \bar{j}) & \text{si } m_j = m_{\bar{j}} \\ m(j + \bar{j}) + (m_{\bar{j}} - m)\bar{j} & \text{si } m_j < m_{\bar{j}} \end{cases}$$

Puisque $j + \bar{j} = -1$, on doit donc avoir $m_j = m_{\bar{j}}$ pour que $\text{Tr}(M) \in \mathbb{R}$, soit finalement $n = 2m$. n est donc pair.

2 - On a $\text{Tr}(M) = m(j + \bar{j}) = -m$, soit

$$\boxed{\text{Tr}(M) = -\frac{n}{2}.}$$

De plus, $\det(M) = j^m \bar{j}^m$, comme $|j| = 1$, cela donne

$$\boxed{\det(M) = 1.}$$

Puisque $\det(M) \neq 0$, M est inversible, donc

$$\boxed{\text{rg}(M) = n.}$$

3 - On peut prendre dans le cas $n = 2$ l'exemple de la matrice de rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$R = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Puisque le polynôme minimal de M , donné par $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - \bar{j})$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et j et $\bar{j}$ sont les deux valeurs propres de M , de même multiplicité $m = \frac{n}{2}$.

Ainsi, ils existent $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{C}^n$ des vecteurs propres de M associés à la valeur propre j vérifiant pour tout $k \in [[1, m]]$,

$$Mu_k = ju_k.$$

En prenant le conjugué de cette expression, on a, pour tout $k \in [[1, m]]$,

$$M\bar{u}_k = \bar{j}\bar{u}_k.$$

Ainsi, $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m$ sont des vecteurs propres associés à la valeur propre $\bar{j}$.

Posons, pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $x_k = \Re(u_k)$ et $y_k = \Im(u_k)$. On a ainsi, pour $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$,

$$Mu_k = Mx_k + iMy_k.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} Mu_k &= ju_k \\ &= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x_k + iy_k) \\ &= -\frac{1}{2}x_k - \frac{\sqrt{3}}{2}y_k + i\left[\frac{\sqrt{3}}{2}x_k - \frac{1}{2}y_k\right]. \end{aligned}$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire des précédentes expressions, on a, pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$,

$$\begin{cases} Mx_k &= -\frac{1}{2}x_k - \frac{\sqrt{3}}{2}y_k \\ My_k &= \frac{\sqrt{3}}{2}x_k - \frac{1}{2}y_k \end{cases}.$$

Il existe donc une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})(\mathbb{R})$ donnée par

$$P = [x_1|y_1|\cdots|x_m|y_m],$$

(qui est bien inversible car ses colonnes forment une base de $\mathbb{R}^n$) telle que

$$P^{-1}MP = \begin{bmatrix} R & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & R \end{bmatrix}.$$

Réciproquement, les matrices M de la forme précédente vérifient bien l'équation matricielle $M^2 + M + I_2 = 0$.

Corrigé exercice 20.9

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que pour tout $z \in \mathbb{U}$, $P(z) \in \mathbb{U}$. Posons $d = \deg(P)$. Soient également $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{C}$ tels que

$$P = \sum_{k=0}^d a_k X^k.$$

Soit $z \in \mathbb{U}$. On a

$$P(z) = \sum_{k=0}^d a_k z^k = z^d \sum_{k=0}^d a_k z^{k-d} = z^d \sum_{k=0}^d a_k \overline{z^{d-k}} = z^d \overline{\sum_{k=0}^d \overline{a_k} z^{d-k}} = z^d \overline{P^*(z)},$$

où $P^* \in \mathbb{C}[X]$ est donné par

$$P^* = \sum_{k=0}^d \overline{a_{d-k}} X^k.$$

Or, $P(z) \in \mathbb{U}$, donc, $\mathbb{U}$ étant un sous-groupe (multiplicatif) de $\mathbb{C}^*$, on a alors $\overline{P^*(z)} \in \mathbb{U}$, soit $P^*(z) \in \mathbb{U}$. On a ainsi, pour tout $z \in \mathbb{U}$,

$$P(z)P^*(z) = z^d.$$

Le polynôme $PP^* - X^d$ ayant une infinité de racines, il est donc nul. PP^* est donc le monôme de degré d et de coefficient 1: X^d .

Les racines de P et P^* sont forcément 0 (si l'un de ces deux polynômes avait une autre racine, alors X^d s'annulerait autre part qu'en 0, ce qui est impossible).

Ils existent donc $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $m \in [[0, d]]$ tels que $P = \alpha X^m$ et $P^* = \beta X^{d-m}$. Puisque $\deg(P) = d$, on a alors $m = d$, et $P = \alpha X^d$. De plus, pour tout $z \in \mathbb{U}$, $|P(z)| = 1$, donc $|\alpha| = 1$.

Ainsi, ils existent $\alpha \in \mathbb{U}$ et $d \in \mathbb{N}$ tels que

$$P = \alpha X^d.$$

Corrigé exercice 20.10

1 - Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Soit la fonction f_n donnée par

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto P_n(x) = x^n - nx + 1 \end{aligned}$$

f_n est polynomiale donc dérivable (et même régulière) sur $[0, 1]$. Sa dérivée est donnée par

$$\begin{aligned} f'_n : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto nx^{n-1} - n \end{aligned}$$

Si $x \in [0, 1]$, on a $nx^{n-1} \leq n$, donc $f'_n(x) \leq 0$, et même $f'_n(x) < 0$ si $x < 1$. f_n est donc strictement décroissante sur $[0, 1[$.

De plus, comme $f_n(0) = 1$ et $f_n(1) = 2 - n \leq 0$, le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie assurent qu'il existe un unique $x_n \in [0, 1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$, autrement dit, P_n admet une unique racine $x_n \in [0, 1]$.

2 - Montrons que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est décroissante. Soient $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On a

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} - (n+1)x + 1 - x^n + nx - 1 = \underbrace{x^n(x-1)}_{\leq 0} - x \leq 0.$$

Ainsi, on a

$$f_{n+1}(x_n) \leq f_n(x_n) = 0.$$

Puisque f_{n+1} est négative en x_n , comme elle est décroissante et elle s'annule en un unique point $x_{n+1} \in [0, 1]$, ce point se trouve avant x_n , donc $x_{n+1} \leq x_n$. La suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est donc décroissante.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $x_n \in [0, 1]$, donc en particulier, la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est minorée. Comme elle est décroissante, elle converge.

Déterminons sa limite. Puisque $f_3(1) = P_3(1) = -1 < 0$, comme f_3 est strictement décroissante sur $[0, 1[$, on a donc $x_3 < 1$. Or, $(x_n)_{n \geq 2}$ est décroissante, donc, pour tout $n \geq 3$, $x_n \leq x_3 < 1$. Or, pour tout $n \geq 2$, on a

$$x_n^n - nx_n + 1 = 0,$$

donc on obtient

$$x_n = \frac{1}{n} (x_n^n + 1) \leq \frac{1}{n} (x_3^n + 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

La suite $(x_n)_{n \geq 2}$ étant positive par définition, on en déduit par encadrement que

$$\boxed{x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.}$$

3 - Puisque l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$

$$x_n = \frac{1}{n} (x_n^n + 1) = \frac{1}{n} + \frac{x_n^n}{n},$$

cela implique donc que

$$nx_n = 1 + x_n^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On obtient ainsi l'équivalent

$$\boxed{x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.}$$

20.4 Corrigé exercices niveau 2

Corrigé exercice 20.11

• **Exercice 1 :** Trouvons une expression explicite de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de n . On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} + a_n = 2^n.$$

On peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = u_n + v_n$, où $u_{n+1} + u_n = 0$ (solution de l'équation homogène) et $v_{n+1} + v_n = 2^n$ (solution particulière).

Concernant la solution de l'équation homogène, on remarque que $u_n = (-1)^n u_0$, où $u_0 \in \mathbb{R}$ convient. Pour la solution particulière, recherchons une solution vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 2^n$, où $v_0 \in \mathbb{R}$. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} + v_n = 2^n &\iff 3 \cdot 2^n v_0 = 2^n \\ &\iff v_0 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = (-1)^n u_0 + \frac{1}{3} \cdot 2^n.$$

La condition initiale en $n = 0$ donne également $u_0 = a_0 - \frac{1}{3}$, donnant ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{2^n}{3} + (-1)^n \left(a_0 - \frac{1}{3} \right).$$

On veut déterminer pour quelle.s valeur.s de a_0 la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle croissante. On a

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n \geq 0 &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \frac{2^n}{3} \geq 2 \cdot (-1)^n \left(a_0 - \frac{1}{3} \right). \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \frac{2^n}{6} \geq (-1)^n \left(a_n - \frac{1}{3} \right). \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_0 - \frac{1}{3} \leq \frac{2^n}{6} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{3} - a_0 \leq \frac{2^n}{6} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_0 - \frac{1}{3} \leq \frac{2^n}{6} & \text{si } n \text{ est pair} \\ a_0 - \frac{1}{3} \geq -\frac{2^n}{6} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_0 \leq \frac{1}{3} + \frac{2^n}{6} & \text{si } n \text{ est pair} \\ a_0 \geq \frac{1}{3} - \frac{2^n}{6} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

Cela implique donc $a_0 \in [0, \frac{1}{2}]$. Réciproquement, si $0 \leq a_0 \leq \frac{1}{2}$, alors, si $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} - a_n = \begin{cases} \frac{2^n}{3} - 2\left(a_0 - \frac{1}{3}\right) & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{2^n}{3} + 2\left(a_0 - \frac{1}{3}\right) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Si n est pair, alors, puisque $a_0 \leq \frac{1}{2}$,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2^n + 2}{3} - 2a_0 \underbrace{\geq}_{a_0 \leq \frac{1}{2}} \frac{2^n + 2}{3} - 1 = \frac{2^n - 1}{3} \underbrace{\geq}_{n \geq 0} 0.$$

De même, si n est impair, alors, puisque $a_0 \geq 0$,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2^n - 2}{3} + 2a_0 \underbrace{\geq}_{a_0 \geq 0} \frac{2^n - 2}{3} \underbrace{\geq}_{n \geq 1} 0.$$

On a ainsi notre condition nécessaire et suffisante

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n \geq 0 \iff 0 \leq a_0 \leq \frac{1}{2}.}$$

• **Exercice 2 :** Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}.$$

On cherche alors $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^3 + 2M = A$. Puisque A est un polynôme en M , A et M commutent. Ainsi, si l'on note

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, alors on a

$$\begin{aligned} MA = AM &\iff \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{bmatrix} 3a & 5a - 12b \\ 3c & 5c - 12d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a + 5c & 3b + 5d \\ -12c & -12d \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{bmatrix} -5c & 5a - 15b - 5d \\ -15c & 5c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

cela impose $c = 0$. M est donc triangulaire supérieure. Le produit de matrices triangulaires supérieures assure que les coefficients diagonaux de $M^3 + 2M$ sont $a^3 + 2a$ et $d^3 + 2d$, impliquant donc, avec l'égalité $M^3 + 2M$, les équations

$$a^3 + 2a = 3 \quad \text{et} \quad d^3 + 2d = -12.$$

L'étude de la fonction polynomiale

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 + 2x,$$

montre que sa dérivée, valant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 2$ (f est polynomiale donc régulière), est strictement positive, impliquant l'injectivité de f . De plus, la continuité et les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, valant respectivement $-\infty$ et $+\infty$, assurent que f est surjective. f est donc bijective. Ainsi, les équations $f(a) = 3$ et $f(d) = -12$ admettent une unique solution. On trouve $a = 1$ et $d = -2$. M est donc de la forme

$$M = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Pour trouver b , calculons $M^3 + 2M$ en fonction de b . On trouve

$$M^3 + 2M = \begin{bmatrix} 3 & 5b \\ 0 & -12 \end{bmatrix}.$$

L'égalité $M^3 + 2M = A$ implique $b = 1$. On a finalement, une unique solution, donnée par

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Corrigé exercice 20.12

• **Exercice 1 :** Une récurrence ainsi que l'inégalité $\sin(x) \leq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ assurent que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < u_{n+1} \leq u_n \leq \frac{\pi}{2}.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée, donc converge vers une certaine limite que l'on note ℓ . Par continuité de la fonction sinus, cette limite vérifie $\sin(\ell) = \ell$. La seule solution possible à cette équation est ainsi $\ell = 0$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc de limite nulle.

Le développement limité de la fonction sinus assure que

$$u_{n+1} = \sin(u_n) = u_n - \frac{1}{6}u_n^3 + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n^5) = u_n \left[1 - \frac{1}{6}u_n^2 + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n^4) \right].$$

En élevant au carré, on obtient

$$u_{n+1}^2 = u_n^2 \left[1 - \frac{1}{3}u_n^2 + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n^4) \right].$$

Inversons. Le développement limité à l'ordre 1 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ assure que

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} = \frac{1}{u_n^2} \left[1 + \frac{1}{3}u_n^2 + \underset{n \rightarrow +\infty}{O}\left(u_n^4\right) \right] = \frac{1}{u_n^2} + \frac{1}{3} + \underset{n \rightarrow +\infty}{O}\left(u_n^2\right).$$

Nous avons donc

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3}.$$

Par sommation des équivalents dans le cas d'une série divergente, nous obtenons

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{3} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{u_n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{3}.$$

On obtient ainsi

$$\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}}.$$

Maintenant, essayons de rechercher un second terme. Pour cela, il va falloir pousser le développement limité de $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ l'ordre supérieur (en calculant à l'ordre plus élevé le développement limité de la fonction sinus), puis "réinjecter" l'équivalent obtenu précédemment.

Le développement limité de la fonction sinus à l'ordre 5 assure que

$$u_{n+1} = \sin(u_n) = u_n - \frac{1}{6}u_n^3 + \frac{1}{120}u_n^5 + \underset{n \rightarrow +\infty}{O}\left(u_n^7\right) = u_n \left[1 - \frac{1}{6}u_n^2 + \frac{1}{120}u_n^4 + \underset{n \rightarrow +\infty}{O}\left(u_n^6\right) \right].$$

En élevant au carré, on obtient

$$u_{n+1}^2 = u_n^2 \left[1 - \frac{1}{3}u_n^2 + \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{60} \right) u_n^4 + \underset{n \rightarrow +\infty}{O}\left(u_n^6\right) \right] = u_n^2 \left[1 - \frac{1}{3}u_n^2 + \frac{2}{45}u_n^4 + \underset{n \rightarrow +\infty}{O}\left(u_n^6\right) \right].$$

En utilisant le développement limité

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \underset{x \rightarrow 0}{O}\left(x^3\right),$$

on obtient

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} = \frac{1}{u_n^2} \left[1 + \frac{1}{3}u_n^2 + \left(-\frac{2}{45} + \frac{1}{9} \right) u_n^4 + \underset{n \rightarrow +\infty}{O}\left(u_n^6\right) \right] = \frac{1}{u_n^2} \left[1 + \frac{1}{3}u_n^2 + \frac{1}{15}u_n^4 + \underset{n \rightarrow +\infty}{O}\left(u_n^6\right) \right].$$

On a finalement

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}u_n^2 + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n^4).$$

Sachant que

$$u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\sqrt{\frac{3}{n}}\right),$$

on obtient

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right),$$

soit finalement

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3} + \frac{1}{5n}.$$

Par sommation des équivalents dans le cas d'une série divergente, on a

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{3} + \frac{\ln(n)}{5} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{u_n^2} = \frac{n}{3} + \frac{\ln(n)}{5} + o_{n \rightarrow +\infty}(\ln(n)).$$

On a ainsi

$$u_n = \left[\frac{n}{3} + \frac{\ln(n)}{5} + o_{n \rightarrow +\infty}(\ln(n)) \right]^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{n}} \left[1 + \frac{3}{5n} \ln(n) + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Finalement, le développement limité au premier ordre au voisinage de 0 de $x \mapsto (1+x)^{-\frac{1}{2}}$ assure que

$$u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} \left[1 - \frac{3}{10n} \ln(n) + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \right].$$

• **Exercice 2 :** Etudions le groupe G .

1 - Puisque G est un groupe, il comporte un élément neutre E . Notons r le rang de E .

Soit $M \in G$. Montrons que $\text{rg}(M) = r$. Puisque G est un groupe, M possède un inverse dans G , que l'on note $\tilde{M}$, telle que $M \times \tilde{M} = \tilde{M} \times M = E$. $\times$ étant le produit matriciel "classique", on a ainsi

$$r = \text{rg}(E) = \text{rg}(\tilde{M}M) \leq \text{rg}(M).$$

De plus, puisque E est l'élément neutre de G , on a $ME = EM = M$, donc, en prenant le rang,

$$r = \operatorname{rg}(E) \geq \operatorname{rg}(EM) = \operatorname{rg}(M).$$

On a ainsi $\operatorname{rg}(M) = r$. M étant quelconque dans G , tous les éléments de G ont même rang.

- 2 - Puisque E est l'élément neutre de G , il vérifie alors $E \times E = E$. $\times$ correspondant au produit matriciel "classique", on a $E^2 = E$. E est donc une matrice de projection, donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}EP = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

où r désigne le rang de E .

Soit $M \in G$. Montrons que M est de la forme

$$M = P \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} P^{-1},$$

où $M_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $M_2 \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $M_3 \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$ et $M_4 \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$ (ce qui revient à écrire $P^{-1}MP$ sous la forme de quatre blocs dont les tailles sont précisées précédemment).

L'égalité $ME = M = EM$ entraîne donc

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix},$$

soit alors

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ M_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ce qui implique que les blocs M_2 , M_3 et M_4 sont nuls et que M est de la forme

$$M = P \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Puisque tous les éléments de G ont même rang, on a $M_1 \in GL_r(\mathbb{R})$.

De plus, en posant

$$M' := P \begin{bmatrix} M_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1},$$

le produit matriciel par blocs assure que $M \times M' = M' \times M = E$, donc, par unicité de l'inverse,

$$\tilde{M} = P \begin{bmatrix} M_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Soit l'application φ donnée par

$$\begin{aligned}\varphi : G &\longrightarrow GL_r(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto M_1.\end{aligned}$$

Concrètement, l'image d'une matrice de G par φ est obtenue en lui appliquant l'opération $M \longmapsto PMP^{-1}$ puis en extrayant les r premières lignes et r premières colonnes.

Montrons alors que

$$H := \{\varphi(M), M \in G\},$$

est un sous-groupe de $GL_r(\mathbb{R})$.

Tout d'abord, si $M_1, N_1 \in H$, alors ils existent $M, N \in G$ tels que $M_1 = \varphi(M)$ et $N_1 = \varphi(N)$. On a ainsi

$$M_1 = \varphi\left(P \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}\right) \quad \text{et} \quad N_1^{-1} = \varphi\left(P \begin{bmatrix} N_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}\right).$$

De plus,

$$M_1 N_1^{-1} = \varphi\left(P \begin{bmatrix} M_1 N_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}\right) = \varphi(M\tilde{N}),$$

donc $M_1 N_1^{-1} \in H$.

On a par ailleurs $I_r = \varphi(E) \in H$. H est donc un sous-groupe de $GL_r(\mathbb{R})$. Ainsi, $\varphi : G \longrightarrow H$ étant bijective de réciproque

$$\begin{aligned}\varphi^{-1} : H &\longrightarrow G \\ M_1 &\longmapsto P^{-1} \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P,\end{aligned}$$

on a bien

$$G = \left\{ P^{-1} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P, A \in H \right\}.$$

Corrigé exercice 20.13

1 - On a

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

soit alors

$$\begin{aligned}
A^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} n-1 & n-2 & \cdots & n-2 \\ n-2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n-2 \\ n-2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{bmatrix} \\
&= (n-1)I_n + (n-2)A.
\end{aligned}$$

On a ainsi $A(A + (2-n)I_n) = (n-1)I_n$. A est donc inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{n-1} (A + (2-n)I_n).$$

2 - On a

$$A + I_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$\text{rg}(A + I_n) = 1$, donc, en vertu du théorème du rang, on a

$$\dim(\ker(A + I_n)) = n - 1.$$

1 est donc une valeur propre de A , et le sous-espace propre associé est de dimension $n - 1$. On a alors

$$\ker(A + I_n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \cdots + x_n = 0\} = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Recherchons la valeur propre manquante. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donné par

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

On a ainsi $AX = (n-1)X$. $n-1$ est donc une valeur propre de A , et X est un vecteur propre associé. On a ainsi

$$\ker [A - (n-1)I_n] = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Corrigé exercice 20.14

1 - Soit $x \in I$.

- Si $x < \frac{\pi}{2}$, $|\sin(x)| < 1$, $|\cos(x)|^\alpha \leq 1$. On a donc $|u_n(x)| \leq |\sin(x)|^n$. Par comparaison avec une série géométrique, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge simplement sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.
- Si $x = \frac{\pi}{2}$, comme $\alpha > 0$, $\cos^\alpha(x) = 0$, $\sum_{n \geq 0} u_n \left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. La série est donc convergente.

La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est donc simplement convergente sur I .

2 - Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminons $\|u_n\|_{L^\infty(I)}$. Comme $u_n(0) = u_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, on peut se ramener à une étude sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. $u_n :]0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable, de dérivée

$$\begin{aligned} u'_n :]0, \frac{\pi}{2}[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto n \sin^{n-1}(x) \cos^{\alpha+1}(x) - \alpha \cos^{\alpha-1}(x) \sin^{n+1}(x). \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} u'_n(x) = 0 &\iff [n \cos^2(x) - \alpha \sin^2(x)] \underbrace{\sin^{n-1}(x) \cos^{\alpha-1}(x)}_{>0} = 0 \\ &\iff n \cos^2(x) - \alpha + \alpha \cos^2(x) = 0 \\ &\iff \cos(x) = \left(\frac{\alpha}{n + \alpha}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

De plus, cela implique que $\sin(x) = \left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$. Par ailleurs, u'_n ne change de signe qu'une seule fois en $x_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ ($\cos :]0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow]0, 1[$ est bijective). Ainsi, comme $u'_n < 0$ sur $]0, x_0[$ et $u'_n > 0$ sur $]x_0, \frac{\pi}{2}[$, le maximum de u_n est bien atteint en x_0 . On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u_n\|_{L^\infty(I)} = \left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\|u_n\|_{L^\infty(I)} &= e^{-\frac{n}{2} [\ln(n+\alpha) - \ln(n)]} \cdot \frac{\alpha^{\frac{\alpha}{2}}}{(n+\alpha)^{\frac{\alpha}{2}}} \\
&= \underbrace{e^{-\frac{n}{2} [\ln(1+\frac{\alpha}{n})]}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1} \cdot \frac{\alpha^{\frac{\alpha}{2}}}{(n+\alpha)^{\frac{\alpha}{2}}} \\
&\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha^{\frac{\alpha}{2}}}{n^{\frac{\alpha}{2}}}.
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de convergence des séries dont les termes généraux sont équivalents et positifs ainsi qu'une comparaison avec une série de Riemann, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement si et seulement si $\alpha > 2$.

3 - Si $\alpha > 2$, puisque la convergence normale implique la convergence uniforme, alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge uniformément sur I .

Soient $\alpha \in]0, 2]$ et $x \in I$. Notons S la somme de la série de fonctions.

$$S(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \begin{cases} \frac{\cos^\alpha(x)}{1 - \sin(x)} & \text{si } x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Posons $x = \frac{\pi}{2} - y$. On a

$$S(x) = S\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \frac{\sin^\alpha(y)}{1 - \cos(y)} \underset{y \rightarrow 0}{\sim} 2y^{\alpha-2}.$$

Comme $\alpha \leq 2$, on n'a pas $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 0$. La continuité à la limite n'étant pas assurée pour tout $\alpha \in]0, 2]$, la convergence uniforme ne peut pas avoir lieu.

Références bibliographiques

- [1] Bibmath, 2026. <https://www.bibmath.net/>.
- [2] Christophe Bertault. Mathématiques en mpsi, 2026. <https://christophebertault.fr/cours-et-exercices/>.
- [3] Alain Troesch. Les mathématiques en mp au lycée lakanal, 2026. <http://alain.troesch.free.fr/>.