

Chapitre 2

Probabilités

2.1 Probabilités de base

Exercice 2.1 -

On lance un dé équilibré à six faces.

On note :

- A : "Obtenir un nombre pair".
- B : "Obtenir un nombre supérieur ou égal à 4".

- i) Déterminer $A \cup B$, $A \cap B$ et $\overline{A}$.
- ii) Calculer $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.

Exercice 2.2 -

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes

On note :

- R : "Obtenir une carte rouge".
- C : "Obtenir un cœur".
- F : "Obtenir une figure".

- i) Déterminer $\mathbb{P}(R)$, $\mathbb{P}(C)$ et $\mathbb{P}(F)$.
- ii) Déterminer $R \cap F$. Calculer $\mathbb{P}(R \cap F)$. R et F sont-ils indépendants ?
- iii) Montrer que $R \cap C = C$. R et C sont-ils indépendants ?

Exercice 2.3 -

Dans un groupe de 200 personnes, on s'intéresse au fait d'avoir vu un film au cinéma ou chez soi et au fait d'avoir aimé le film.

On sait que:

- 70% des personnes interrogées ont aimé le film.
- La moitié des personnes interrogées ont vu le film au cinéma. Parmi elles, 80% ont aimé le film.

On sélectionne une personne au hasard, en considérant que tout le monde a la même probabilité d'être sélectionné. On note les événements:

- A : "La personne a aimé le film.
- C : "La personne a vu le film au cinéma".

i) Compléter le tableau suivant

	A aimé le film	N'a pas aimé le film	Total
A vu le film au cinéma			
A vu le film chez soi			
Total			200

ii) Calculer $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(C)$.

iii) Définir par une phrase l'événement $\overline{C}$ puis calculer $\mathbb{P}(\overline{C})$.

iv) Définir par une phrase l'événement $A \cap C$ puis calculer $\mathbb{P}(A \cap C)$. En déduire $\mathbb{P}(A \cup C)$.

v) On sait maintenant que la personne interrogée a vu le film au cinéma. Calculer la probabilité qu'elle a aimé le film.

2.2 Probabilités conditionnelles

Exercice 2.4 -

Un lycée interroge 200 élèves sur la pratique d'un sport. Voici le résultat du sondage:

	Pratique un sport	Ne pratique pas de sport	Total
Garçon	60	40	100
Fille	30	70	100
Total	90	110	200

On sélectionne un.e élève au hasard, en considérant que tout le monde a la même probabilité d'être sélectionné. On note les événements:

- S : "La personne pratique un sport.

- F : "La personne est une fille".

i) Calculer $\mathbb{P}(F)$ et $\mathbb{P}(S)$.

ii) Calculer $\mathbb{P}_F(S)$.

iii) Calculer $\mathbb{P}_S(F)$.

iv) Les événements F et S sont-ils indépendants ?

Exercice 2.5 -

Soient A et B deux événements indépendants.

1. Déterminer $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}_A(B)$, $\mathbb{P}_B(A)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A \cup B)$ sachant que $\mathbb{P}(A) = 0,24$ et $\mathbb{P}_A(B) = 0,35$.
2. Déterminer $\mathbb{P}_A(B)$, $\mathbb{P}_B(A)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A \cup B)$ sachant que $\mathbb{P}(A) = 0,16$ et $\mathbb{P}(B) = 0,45$.
3. On suppose maintenant que A et B sont incompatibles et que $\mathbb{P}(A) = 0,34$ et $\mathbb{P}(B) > 0$. Peut-on avoir A et B indépendants ? Justifier la réponse.

Exercice 2.6 -

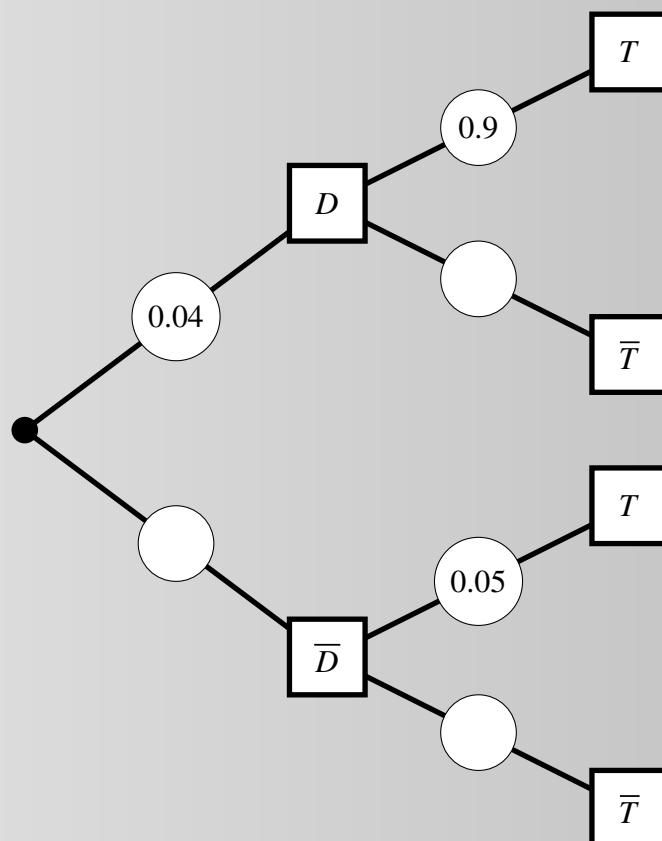
Une entreprise fabrique des pièces. 4% sont défectueuses. On dispose d'un test permettant de détecter les pièces défectueuses:

- Si une pièce est défectueuse, le test est positif dans 90 % des cas.
- Si elle ne l'est pas, le test est positif dans 5 % des cas.

On note les évènements

- D : "La pièce est défectueuse".
- T : "Le test de défectuosité est positif".

i) Compléter l'arbre suivant:



- ii) Calculer la probabilité que le test soit un faux positif (c'est-à-dire la pièce n'est pas défectueuse mais le test est positif).
- iii) Calculer la probabilité que le test soit positif.
- iv) On suppose que le test est positif. Calculer la probabilité que la pièce soit défectueuse.

Exercice 2.7 -

Dans une réserve australienne, on étudie les animaux observés au cours d'une journée. On considère uniquement les kangourous, les koalas et les wombats. On sait qu'il y a 50 % de kangourous, 30 % de koalas et 20 % de wombats.

De plus, la répartition entre mâles et femelles est la suivante:

- 60 % chez les kangourous.
- 40 % chez les koalas.
- 70 % chez les wombats.

On choisit un animal au hasard. On note les événements:

- K : "L'animal est un kangourou".
- O : "L'animal est un koala".
- W : "L'animal est un wombat".
- M : "L'animal est un mâle".

- i) Montrer que K , O et W forment une partition de l'univers.
- ii) Faire un arbre pondéré.
- iii) Calculer la probabilité que l'animal choisi soit un mâle.
- iv) Sachant que l'animal choisi est un mâle, calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un koala.
- v) Sachant que l'animal choisi n'est pas un mâle, calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un kangourou.

Exercice 2.8 -

Dans un centre de soins, les animaux accueillis sont répartis en trois catégories de la manière suivante: oiseaux (40 %), mammifères (35 %) et reptiles (25 %).

On sait que 75% des oiseaux, 80% et 60% des reptiles sont guéris après les soins.

On choisit au hasard un animal accueilli. On note les évènements:

- O : "L'animal choisi est un oiseau".
- M : "L'animal choisi est un mammifère".
- R : "L'animal choisi est un reptile".
- G : "L'animal choisi est guéri après les soins".

i). Justifier que O , M et R forment une partition de l'univers.

ii). Construire l'arbre pondéré correspondant.

iii). Calculer la probabilité qu'un animal soit guéri après les soins.

iv). Calculer $\mathbb{P}(G \cap M)$.

v). Sachant que l'animal est guéri, la probabilité qu'il s'agisse d'un mammifère.

vi). Les évènements G et M sont-ils indépendants ? (On pourra comparer $\mathbb{P}_G(M)$ et $\mathbb{P}(M)$).

Exercice 2.9 -

Dans un lycée, les élèves interrogés sont répartis en trois catégories selon leur genre musical préféré de la manière suivante : pop (50 %), rap (30 %) et rock (20 %).

On distingue trois manières principales d'écouter de la musique : sur un téléphone, sur un ordinateur et sur une enceinte. On sait que :

- parmi les élèves préférant la pop, 60% écoutent principalement de la musique sur leur téléphone, 35% sur un ordinateur et 5% sur une enceinte.
- parmi les élèves préférant le rap, 50% écoutent principalement de la musique sur leur téléphone, 35% sur un ordinateur et 15% sur une enceinte.
- parmi les élèves préférant le rock, 40% écoutent principalement de la musique sur leur téléphone, 20% sur un ordinateur et 40% sur une enceinte.

On choisit au hasard un élève interrogé. On note les événements :

- P : "L'élève choisi préfère la pop".
- R : "L'élève choisi préfère le rap".
- K : "L'élève choisi préfère le rock".
- T : "L'élève choisi écoute principalement de la musique sur son téléphone".
- O : "L'élève choisi écoute principalement de la musique sur un ordinateur".
- E : "L'élève choisi écoute principalement de la musique sur une enceinte".

- i). Justifier que P , R et K forment une partition de l'univers.
- ii). Pour chacune des trois catégories, vérifier que T , O et E forment une partition de l'univers.
- iii). Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.
- iv). Calculer la probabilité qu'un élève écoute principalement de la musique sur une enceinte.
- v). Calculer $\mathbb{P}(R \cap E)$.
- vi). Sachant qu'un élève écoute principalement de la musique sur une enceinte, déterminer la probabilité qu'il préfère le rap.
- vii). Les événements R et E sont-ils indépendants ? (On pourra comparer $\mathbb{P}_R(E)$ et $\mathbb{P}(E)$).

2.3 Répétition d'épreuves indépendantes

Exercice 2.10 -

On lance trois fois une pièce équilibrée.

- i) Construire l'arbre pondéré.
- ii) Calculer la probabilité d'avoir trois pile.
- iii) Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux pile.
- iv) Calculer la probabilité d'obtenir au moins un pile.

Exercice 2.11 -

Une machine produit une pièce conforme avec une probabilité de 0.9. On considère quatre pièces produites indépendamment.

Calculer la probabilité :

- i) Que les quatre pièces soient conformes.
- ii) Qu'exactly trois pièces soient conformes.
- iii) Qu'au moins une pièce soit non conforme.