

Chapitre 3

Suites

3.1 Définition

Exercice 3.1 -

Calculer les cinq premiers termes des suites suivantes:

- i) La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 + 3$.
- ii) La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n^2 + 1$.
- iii) La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{2n-1}{n+4}$.
- iv) La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3 + (-1)^n \times 2$.
- v) La suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.
- vi) La suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+1}$.

3.2 Variations d'une suite

Exercice 3.2 -

Étudier les variations des suites suivantes, définies pour tout entier naturel n par:

- i) La suite (u_n) définie par $u_n = -2n^2 + n + 5$.
- ii) La suite (u_n) définie par $u_n = 3n^2 + 5n + 2$.
- iii) La suite (u_n) définie par $u_n = 7 - 4n$.
- iv) La suite (u_n) définie par $u_n = \frac{3n+1}{n+2}$.
- v) La suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n^2+1}$.
- vi) La suite (u_n) définie par $u_n = 5 \times 2^n$.
- vii) La suite (u_n) définie par $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Exercice 3.3 -

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$.

Montrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 1$ et en déduire la variation de (u_n) .

Exercice 3.4 -

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = -u_n^2 - 1$.

- i) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 - u_n - 1$.
- ii) Étudier le signe du trinôme $P(x) = -x^2 - x - 1$. En déduire la variation de (u_n) .

3.3 Suites arithmétiques

3.3.1 Premier terme, raison, terme général

Exercice 3.5 -

Dans chacun des cas suivants, démontrer que la suite (u_n) est arithmétique. Préciser son premier terme et sa raison :

- i) La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 5n - 2$.
- ii) La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 7 - \frac{3}{4}n$.
- iii) La suite (u_n) définie par $u_0 = -3$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n + 11$.
- iv) La suite (u_n) définie par $u_1 = 100$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_{n+1} = u_n - \frac{9}{2}$.
- v) La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{6n+1}{2}$.
- vi) La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = (n+1)^2 - n^2$.

Exercice 3.6 -

Déterminer la raison r et le premier terme u_0 (ou u_1) de la suite arithmétique (u_n) dans les cas suivants :

- i) On sait que $u_0 = 4$ et $u_{12} = 40$.
- ii) On sait que $u_0 = 15$ et $u_8 = -1$.
- iii) On sait que $u_3 = 12$ et $u_7 = 32$.
- iv) On sait que $u_5 = 45$ et $u_{20} = 0$.
- v) On sait que $u_{10} = -5$ et $u_{50} = 75$.
- vi) On sait que $u_2 + u_4 = 20$ et $u_5 = 17$.

Exercice 3.7 -

Pour chaque suite arithmétique (u_n) définie pour tout entier naturel n , on donne son premier terme et sa raison. Déterminer l'expression générale de u_n en fonction de n , calculer le terme u_{57} , puis déterminer la valeur de n pour laquelle la suite atteint la valeur cible indiquée :

- i) Premier terme $u_0 = 5$, raison $r = 3$. **Valeur cible :** $u_n = 308$.
- ii) Premier terme $u_0 = -10$, raison $r = 4$. **Valeur cible :** $u_n = 490$.
- iii) Premier terme $u_1 = 2$, raison $r = \frac{1}{2}$. **Valeur cible :** $u_n = 100$.

Exercice 3.8 -

Pour chaque suite arithmétique (u_n) définie pour tout entier naturel n , on donne son premier terme et sa raison. Déterminer l'expression générale de u_n en fonction de n , calculer le terme u_{57} , puis déterminer la valeur de n pour laquelle la suite atteint la valeur cible indiquée :

- i) Premier terme $u_0 = 100$, raison $r = -2$. **Valeur cible :** $u_n = -150$.
- ii) Premier terme $u_0 = 12$, raison $r = -1,5$. **Valeur cible :** $u_n = -93$.
- iii) Premier terme $u_1 = 5$, raison $r = -\frac{1}{3}$. **Valeur cible :** $u_n = -20$.

3.3.2 Somme

Exercice 3.9 -

Calculer la valeur de chacune des sommes suivantes :

- i) $S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$ (La somme des 100 premiers entiers).
- ii) $S_2 = 5 + 6 + 7 + \dots + 60$.
- iii) $S_3 = 2 + 4 + 6 + \dots + 200$ (Somme des nombres pairs jusqu'à 200).
- iv) $S_4 = 1 + 3 + 5 + \dots + 99$ (Somme des nombres impairs jusqu'à 99).
- v) $S_5 = -10 - 7 - 4 - 1 + 2 + \dots + 80$.
- vi) $S_6 = 100 + 95 + 90 + \dots + 0$.

Exercice 3.10 -

Dans chacun des cas suivants, (u_n) désigne une suite arithmétique. On donne son premier terme et sa raison r . Calculer la somme S demandée :

- i) Premier terme $u_0 = 4$ et raison $r = 3$. Calculer la somme des 20 premiers termes : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{19}$.
- ii) Premier terme $u_0 = 50$ et raison $r = -2$. Calculer la somme : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{50}$.
- iii) Premier terme $u_0 = \frac{3}{2}$ et raison $r = \frac{1}{2}$. Calculer la somme : $S = u_5 + u_6 + \cdots + u_{60}$.

Exercice 3.11 -

Dans chacun des cas suivants, (u_n) désigne une suite arithmétique. On donne son premier terme et sa raison r . Calculer la somme S de termes consécutifs demandée :

- i) Premier terme $u_0 = -5$ et raison $r = 4$. Calculer la somme : $S = u_{10} + u_{11} + \cdots + u_{30}$.
- ii) Premier terme $u_0 = 100$ et raison $r = -5$. Calculer la somme : $S = u_5 + u_6 + \cdots + u_{25}$.
- iii) Premier terme $u_0 = 2$ et raison $r = \frac{1}{3}$. Calculer la somme : $S = u_{13} + u_{14} + \cdots + u_{42}$.

3.4 Suites géométriques

3.4.1 Premier terme, raison, terme général

Exercice 3.12 -

Dans chacun des cas suivants, démontrer que la suite (u_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison :

- i) La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 5 \times 2^n$.
- ii) La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{7}{3^n}$.
- iii) La suite (u_n) définie par $u_0 = -3$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 11u_n$.
- iv) La suite (u_n) définie par $u_1 = 100$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_{n+1} = -\frac{2}{5}u_n$.
- v) La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{6^{n+1}}{2}$.
- vi) La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 4^{2n+1}$.

Exercice 3.13 -

Déterminer la raison q et le premier terme u_0 (ou u_1) de la suite géométrique (u_n) à termes strictement positifs dans les cas suivants :

- i) On sait que $u_0 = 4$ et $u_3 = 32$.
- ii) On sait que $u_0 = 81$ et $u_4 = 1$.
- iii) On sait que $u_3 = 12$ et $u_5 = 48$.
- iv) On sait que $u_5 = 64$ et $u_8 = 8$.
- v) On sait que $u_{10} = 5$ et $u_{12} = 125$.
- vi) On sait que $u_4 = 16$ et $u_5 = 32$.

Exercice 3.14 -

Pour chaque suite géométrique (u_n) définie pour tout entier naturel n , on donne son premier terme et sa raison. Déterminer l'expression générale de u_n en fonction de n , calculer le terme u_7 (valeur exacte), puis déterminer la valeur de n pour laquelle la suite atteint la valeur cible indiquée :

- i) Premier terme $u_0 = 5$, raison $q = 3$. **Valeur cible :** $u_n = 365$.
- ii) Premier terme $u_0 = 2$, raison $q = 4$. **Valeur cible :** $u_n = 2048$.
- iii) Premier terme $u_1 = 3$, raison $q = \frac{1}{2}$. **Valeur cible :** $u_n = \frac{3}{256}$.

Exercice 3.15 -

Pour chaque suite géométrique (u_n) définie pour tout entier naturel n , on donne son premier terme et sa raison. Déterminer l'expression générale de u_n en fonction de n , calculer le terme u_7 (valeur exacte), puis déterminer la valeur de n pour laquelle la suite atteint la valeur cible indiquée :

- i) Premier terme $u_0 = 100$, raison $q = -2$. **Valeur cible :** $u_n = -12800$.
- ii) Premier terme $u_0 = 12$, raison $q = \frac{1}{2}$. **Valeur cible :** $u_n = \frac{3}{4}$.
- iii) Premier terme $u_1 = 5$, raison $q = -\frac{1}{3}$. **Valeur cible :** $u_n = -\frac{5}{243}$.

3.4.2 Somme

Exercice 3.16 -

Calculer la valeur exacte de chacune des sommes suivantes :

- i) $S_1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 1024$.
- ii) $S_2 = 1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 2187$.
- iii) $S_3 = 5 + 10 + 20 + 40 + \cdots + 5120$.
- iv) $S_4 = 1 - 2 + 4 - 8 + \cdots + 256$.
- v) $S_5 = 64 + 32 + 16 + \cdots + 0,5$.
- vi) $S_6 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{2187}$.

Exercice 3.17 -

Dans chacun des cas suivants, (u_n) désigne une suite géométrique. On donne son premier terme et sa raison q . Calculer la somme S demandée (valeur exacte) :

- i) Premier terme $u_0 = 4$ et raison $q = 3$. Calculer la somme des 10 premiers termes : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$.
- ii) Premier terme $u_0 = 50$ et raison $q = \frac{1}{2}$. Calculer la somme : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_6$.
- iii) Premier terme $u_0 = 3$ et raison $q = 2$. Calculer la somme : $S = u_5 + u_6 + \cdots + u_{12}$.

Exercice 3.18 -

Dans chacun des cas suivants, (u_n) désigne une suite géométrique. On donne son premier terme et sa raison q . Calculer la somme S de termes consécutifs demandée :

- i) Premier terme $u_0 = 1$ et raison $q = 4$. Calculer la somme : $S = u_4 + u_5 + \cdots + u_9$.
- ii) Premier terme $u_0 = 100$ et raison $q = -\frac{1}{2}$. Calculer la somme : $S = u_2 + u_3 + \cdots + u_7$.
- iii) Premier terme $u_0 = 2$ et raison $q = \frac{1}{3}$. Calculer la somme : $S = u_3 + u_4 + \cdots + u_8$.

3.5 Reconnaître une suite arithmétique / géométrique

Exercice 3.19 -

Pour chacune des suites (u_n) suivantes, définies pour tout entier naturel n , déterminer si elle est arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre. Justifier la réponse :

- i) La suite (u_n) définie par $u_n = 3(n - 2) + 7$.
- ii) La suite (u_n) définie par $u_n = \frac{5 \times 2^n}{3}$.
- iii) La suite (u_n) définie par $u_n = n^2 - n$.
- iv) La suite (u_n) définie par $u_n = \frac{4 - 9n}{3}$.
- v) La suite (u_n) définie par $u_n = 3^n + 1$.
- vi) La suite (u_n) définie par $u_n = 7 \times 0.5^{-n}$.

Exercice 3.20 -

Pour chacune des suites (u_n) suivantes, déterminer si elle est arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre. Justifier la réponse :

- i) La suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n - \frac{5}{2}$.
- ii) La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 3u_n + 2$.
- iii) La suite (u_n) définie par $u_0 = 9$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{u_n}{4}$.
- iv) La suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = (u_n)^2$.
- v) La suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2}$.
- vi) La suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n + 2n$.

3.6 Problèmes

Exercice 3.21 -

Résoudre les problèmes suivants en modélisant la situation à l'aide d'une suite appropriée :

- i) Une entreprise de forage facture le premier mètre creusé à 50 euros. Chaque mètre supplémentaire coûte 8 euros de plus que le précédent (le 2ème mètre coûte 58€, le 3ème coûte 66€, etc.).
 - a) Calculer le coût du 20ème mètre linéaire creusé.
 - b) Déterminer le coût total pour un forage d'une profondeur de 20 mètres.
- ii) Un particulier place un capital initial de 2 000 euros sur un compte bancaire rémunéré à un taux d'intérêt annuel composé de 3 %. On note C_n le capital disponible après n années.
 - a) Exprimer C_n en fonction de n .
 - b) Calculer, au centime près, le capital dont il disposera au bout de 2 ans.
- iii) Un lac contient initialement 8 000 poissons. Chaque année, la pêche détruit 15 % de la population de poissons présente, mais l'association locale réintroduit 1 500 nouveaux poissons à la fin de la saison. On note p_n le nombre de poissons au bout de n années.
 - a) Donner la valeur de p_0 et exprimer p_{n+1} en fonction de p_n .
 - b) Calculer le nombre de poissons présents au bout de 2 ans.

Exercice 3.22 -

Résoudre les problèmes suivants en utilisant les propriétés des suites et de leurs sommes :

- i) Une personne décide de lancer une chaîne de messages par courriel. Le premier jour (jour 0), elle envoie un courriel à 3 personnes. Le lendemain (jour 1), chacune de ces 3 personnes envoie à son tour le message à 3 nouvelles personnes, et ainsi de suite.
 - a) Déterminer le nombre de nouveaux courriels envoyés uniquement le 6ème jour.
 - b) Calculer le nombre total cumulé de courriels envoyés entre le jour 0 et le jour 6 inclus.
- ii) Un objet en chute libre lâché sans vitesse initiale parcourt environ 4,9 mètres durant la première seconde. À cause de la gravité, il parcourt à chaque seconde supplémentaire 9,8 mètres de plus que la seconde précédente (il parcourt 14,7 m la 2ème seconde, 24,5 m la 3ème seconde, etc.).
 - a) Quelle distance exacte l'objet parcourt-il durant la 10ème seconde de sa chute ?
 - b) Calculer la hauteur totale de la falaise si l'objet met exactement 10 secondes à toucher le sol.
- iii) On laisse tomber une balle d'une hauteur de 2 mètres. À chaque rebond, la balle remonte aux trois quarts $\left(\frac{3}{4}\right)$ de la hauteur atteinte au rebond précédent.
 - a) Quelle hauteur, au centimètre près, atteint la balle après le 3ème rebond ?
 - b) Modéliser la distance verticale totale parcourue par la balle (phases de montée et de descente) juste au moment où elle touche le sol pour la 4ème fois. On donnera le résultat sous forme d'une fraction et d'une valeur approchée au centimètre près.