OM3 - Feuille d'exercices 2 : Fonctions de plusieurs variables, limites et continuité

Exercice 1
Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f(x,y)=\ln(x+y) \quad , \quad f(x,y)=\sqrt{y-2x^2} \quad , \quad f(x,y)=\frac{x}{x^2-y^2} \quad , \quad f(x,y)=\frac{1}{\cos(x-y)}$$

$$f(x,y)=\frac{\ln(\exp x-1)}{\sqrt{x^2+y^2-3}} \quad , \quad f(x,y)=\frac{\ln(y-x^2)}{\sqrt{xy}}$$

Essayez, lorsque cela est possible, de les représenter par un dessin.

Exercice 2
Déterminer le domaine de définition et tracer les courbes de niveau pour les valeurs c indiquées pour les fonctions suivantes :

$f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2} \quad , \quad c=0,\ 1/2$

$f(x,y)=x^2-y^2 \quad , \quad c=0,\ 1$

$f(x,y)=\dfrac{x^2+y}{x+y^2} \quad , \quad c=0,\ -1$

$f(x,y)=\dfrac{xy-x+y}{xy} \quad , \quad c=1,\ 2$

$f(x,y)=\dfrac{x^4+y^4}{8-x^2y^2} \quad , \quad c=2$

$f(x,y)=x-y-|x-y| \quad , \quad c=-1,\ 0,\ 1$

Exercice 3
Déterminer le domaine de définition, les courbes de niveaux à $c=0,\ c=1,\ c=-1,\ c=2,\ c=3$ dans chacun des cas suivants :

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2} \quad , \quad f(x,y)=\frac{x}{y}$$

Exercice 4
Soient deux parties bornées A et B de $\mathbb{R}$, montrer que $A+B$ est aussi une partie bornée.

Exercice 5
Déterminer les limites suivantes quand elles existent :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\exp(x^2+y^2)-1}{x^2+y^2} \quad , \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin x\sin y}{xy} \quad , \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin x\sin y}{x^2+y^2} \quad , \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x|}{y^2}$$

Exercice 6
Pour une fonction $z = f(x,y)$, on définit lorsque cela est possible :

$$l = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \quad , \quad m = \lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x,y)) \quad , \quad n = \lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y))$$

En utilisant les fonctions :

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad , \quad f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad , \quad f(x,y) = \frac{\sin x}{y} \quad ;$$

ainsi que le point $(a,b) = (0,0)$, montrer que l'on peut rencontrer les trois situations suivantes :
(1) Deux de ces trois limites existent mais pas la troisième.
(2) Une de ces trois limites existe sans que les deux autres existent.
(3) Les limites m et n existent mais sont distinctes.

Exercice 7
Étudier la continuité au point $(0,0)$ des fonctions définies comme suit :

$$\forall(x,y) \neq (0,0) \quad , \quad f(x,y) = |\frac{x}{y}| \qquad \text{et} \quad f(0,0) = 1$$

$$\forall(x,y) \neq (0,0) \quad , \quad f(x,y) = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \qquad \text{et} \quad f(0,0) = 0$$

$$\forall(x,y) \neq (0,0) \quad , \quad f(x,y) = \frac{2x^2-y^2+4xy}{4x^2+y^2} \qquad \text{et} \quad f(0,0) = 3$$

$$\forall(x,y) \neq (0,0) \quad , \quad f(x,y) = y\sin\frac{x}{y} \qquad \text{et} \quad f(0,0) = 0$$

Exercice 8
Déterminer si les fonctions suivantes peuvent être prolongées en l'origine.

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2+xy} \;,\quad f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^3} \;,\quad f(x,y) = \frac{\sin(x^2)-(\sin y)^2}{x^2+y^2} \;,\quad f(x,y) = \frac{x^7+x^4y+x^3y}{x^6+x^3y+y^3}$$

Exercice 9
Soit la fonction f définie comme suit :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; (x,y) \longrightarrow f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = 0 \end{cases}$$

Étudier la continuité de cette fonction sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10
Comment faut-il choisir le nombre réel α pour que la fonction définie comme suit :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; (x,y) \longrightarrow f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si} \quad (x,y) = 0 \end{cases}$$

soit continue sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 11
Montrer que la fonction définie comme suit :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ (x,y) \longrightarrow f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{y(y-x^2)} & \text{si} \quad y(y-x^2) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y(y-x^2) = 0 \end{cases}$$

n'est pas continue en l'origine mais que ses restrictions à toute droite passant par $(0,0)$ sont continues.

Exercice 12
Pour chacune des fonctions suivantes définies sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, donner son domaine de définition et dire (en le justifiant) si elle admet ou non un prolongement continu sur $\mathbb{R}^2$.

$$f_1(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2} \quad , \quad f_2(x,y) = \frac{y}{x^2}\exp(-\frac{|y|}{x^2}) \quad , \quad f_3(x,y) = (x-5y)\sin\frac{x}{x^2-y^2}$$

Exercice 13
On considère les fonctions définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$f(x,y) = \mathrm{Sup}\left(\frac{x}{2+|y|} \ , \ \frac{y}{1+|x|}\right) \quad , \quad g(x,y) = \mathrm{Inf}\left(\frac{x^4y}{|x|+4y^2} \ , \ \frac{xy^4}{|y|+4x^2}\right)$$

Sont-elles continues ?

Exercice 14
On considère le sous ensemble $X = \{ \ (x,y) \in \mathbb{R} \ / \ x \geq 0 \quad y \geq 0\}$ de $\mathbb{R}^2$. On muni X de la distance euclidienne. Trouver deux boules ouvertes $B((x_1,y_1),r_1)$ et $B((x_2,y_2),r_2)$ de X telles que $r_1 > r_2$ et $B((x_1,y_1),r_1) \subset B((x_2,y_2)r_2)$.

Exercice 15
Trouver un sous ensemble X de $\mathbb{R}$ tel que les ensembles $\overline{X}$, $\mathring{X}$, $\overline{\mathring{X}}$, $\mathring{\overline{X}}$, $\mathring{\overline{\mathring{X}}}$ et $\overline{\mathring{\overline{X}}}$ sont tous distincts.

Exercice 16
On considère le sous ensemble $X = \{ \ (x,y) \in \mathbb{R} \ / \ xy = 0\}$ de $\mathbb{R}^2$. On muni X de la distance définie comme suit $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \mathrm{Max}(|x_1-x_2|, |y_1-y_2|)$. Dessiner :
— la boule ouverte $B((1,0),1)$,
— l'adhérance $\overline{B((1,0),1)}$ de $B((1,0),1)$,
— la boule fermée $B_f((1,0),1)$.
Que pouvez-vous en déduire ?