Exponentielle de matrices antisymétriques

Domaines: Réduction des endomorphismes orthogonaux, Exponentielle de matrices, Suites et séries de fonctions

Dans tout ce qui suit, n désigne un entier naturel non nul.

Théorème (Image par l'exponentielle des matrices antisymétriques)

L'application:

$$\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$$

est continue et surjective.

Voici le plan de la démonstration:

1. Montrer le lemme
2. Montrer que l'application est bien définie.
3. Montrer qu'elle est continue.
4. Montrer enfin sa surjectivité.

Lemme

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on introduit les matrices:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ et } J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$J \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$. De plus, on a:

$$e^{\theta J} = R_\theta$$

Démonstration. *Remarquons tout d'abord que $J^2 = I_2$, et donc que $J^3 = -J$ et $J^4 = I_2$.*

On revient ensuite à la définition d'exponentielle de matrice:

$$
\begin{aligned}
e^{\theta J} &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\theta^j}{j!} J^j \\
&= \sum_{j=0, j \text{ pair}}^{+\infty} \frac{\theta^j}{j!} J^j + \sum_{j=0, j \text{ impair}}^{+\infty} \frac{\theta^j}{j!} J^j \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\theta^{2j}}{(2j)!} J^{2j} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\theta^{2j+1}}{(2j+1)!} J^{2j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j \theta^{2j}}{(2j)!} I_2 + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j \theta^{2j+1}}{(2j+1)!} J \\
&= \cos(\theta) I_2 + \sin(\theta) J \\
&= R_\theta
\end{aligned}
$$

ce qui montre le lemme.

■

Démonstration. - ***Application bien définie:*** *Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On a ainsi:*

$$
\begin{aligned}
\left(e^A\right)^T &= e^{A^T} \\
&= e^{-A}
\end{aligned}
$$

$A^T = -A$ commute avec A, donc:

$$
\begin{aligned}
e^A \times \left(e^A\right)^T &= e^A \times e^{-A} \\
&= e^{A-A} \\
&= I_n
\end{aligned}
$$

De plus,

$$
\begin{aligned}
\left(e^A\right)^T \times e^A &= e^{-A} \times e^A \\
&= e^{-A+A} \\
&= I_n
\end{aligned}
$$

Donc $e^A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, et ainsi, $\det(A) \in \{-1, 1\}$. Cependant, comme $\det(A) = e^{Tr(A)} > 0$, on a ainsi $\det(A) = 1$, i.e. $A \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

L'application est bien définie.

- ***Continuité:*** *Montrons que* exp *est continue sur* $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. *On sait que, pour* $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$*:*

$$e^A \quad = \quad \lim_{N \to +\infty} \sum_{j=0}^{N} \frac{A^j}{j!}$$

Pour montrer la continuité de exp, *il suffit ainsi de montrer que la série converge uniformément sur tout compact de* $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Soit alors $K \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ *un compact. L'application* $A \mapsto |||A|||$ *est bien sûr continue et donc bornée sur* K*, par une constante notée* M_K. *On a ainsi, pour* $N \in \mathbb{N}$, $A \in K$*:*

$$\sum_{j=0}^{N} \left|\left|\left| \frac{A^j}{j!} \right|\right|\right| \quad \leqslant \quad \sum_{j=0}^{N} \frac{|||A|||^j}{j!}$$

Donc:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N} \sup_{A \in K} \left|\left|\left| \frac{A^j}{j!} \right|\right|\right| \quad & \leqslant \quad \sum_{j=0}^{N} \frac{M_K^j}{j!} \\ & \leqslant \quad e^{M_K} \end{aligned}$$

Donc la série converge normalement, donc uniformément sur tout compact, ce qui montre donc la continuité de l'application.

- ***Surjectivité:*** *Montrons que l'application est surjective. Soit* $P \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. *Par le théorème de réduction des endomorphismes orthogonaux, il existe* $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ *telle que:*

$$QPQ^T = \begin{bmatrix} R_{\theta_1} & & & & \\ & \ddots & & (0) & \\ & & R_{\theta_d} & & \\ & (0) & & -I_k & \\ & & & & I_l \end{bmatrix}$$

avec $\theta_1, \cdots, \theta_d \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$, $k, l \in \mathbb{N}^*$ *et, pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$*:*
$P \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$*, donc* k *est pair, et on écrit* $k = 2\sigma$*, où* $\sigma \in \mathbb{N}$.

Or, on a $R_\theta = e^{\theta J}$, $-I_2 = e^{\pi J}$ *et* $I_l = e^{0_l}$*, donc on a:*

$$QPQ^T \quad = \quad e^{\Delta}$$

où la matrice Δ *- antisymétrique et diagonale par blocs - est donnée par:*

$$\Delta = \begin{bmatrix} \theta_1 J & & & & & & \\ & \ddots & & & & (0) & \\ & & \theta_d J & & & & \\ & & & \pi J & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & (0) & & & & \pi J & \\ & & & & & & 0_l \end{bmatrix}$$

où la matrice πJ apparaît σ fois (éventuellement 0 fois).

Donc $P = Q^T e^{\Delta} Q = e^{Q^T \Delta Q}$. Il reste à montrer que $Q^T \Delta Q \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On a:

$$\left(Q^T \Delta Q\right)^T = Q^T \underbrace{\Delta^T}_{=-\Delta} Q = -Q^T \Delta Q$$

donc $Q^T \Delta Q \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Donc l'application est surjective.

■

Remarques. 1. *L'application n'est pas forcément injective. Un contre-exemple trivial est le cas $n = 1$, où $e^0 = e^{2i\pi} = 1$, où encore le cas $n = 2$, avec $e^{0_2} = e^{2\pi J} = I_2$.*

2. *On a les analogies suivantes:*

Propriété	*Version complexe*	*Version matricielle*
Homéomorphisme	$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$	$\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
Surjection continue	$\exp : i\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$	$\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$
Homéomorphisme de forme/décomposition polaire	$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ (r,\theta) & \longmapsto & re^{i\theta} \end{array}$	$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ (S,\Omega) & \longmapsto & S\Omega \end{array}$