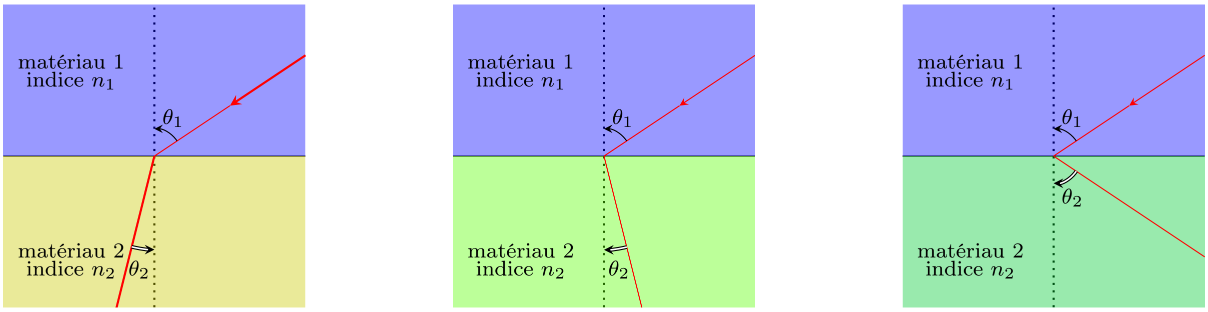
Ma thèse de maths expliquée à celles et ceux qui veulent

Magali Jay

Ma thèse s'intitule *Dynamique des billards dans les pavages*, sous-titrée *Renormalisation des échanges d'intervalles et des surfaces de demi-translation*. Le but de ces quelques pages est d'en expliquer les grandes lignes de façon accessible. Si tu as des questions, viens me les poser après la soutenance, ça me fera plaisir ! Je pourrais ajouter tous les détails que tu veux :-)

## 1 Petite introduction physique

Quand un rayon lumineux change de milieux, par exemple en passant de l'air à l'eau, il est dévié. L'*indice de réfraction* $n_{\text{mat}}$ d'un matériau décrit à quel point ce matériau dévie la lumière.




(a) $n_1, n_2 > 0$ (b) $n_1 > 0 > n_2$ (c) $n_2 = -n_1$

FIGURE 1 – Réfraction d'un rayon lumineux à l'interface entre deux matériaux

Entre deux matériaux, les angles $\theta_1$ et $\theta_2$ sont reliés par la loi de Snell-Descartes :

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2.$$

J'ai mis la formule, mais tu n'as pas besoin de savoir ce qu'elle veut dire pour la suite, pas d'inquiétude ! Les matériaux comme l'air, l'eau ou le verre ont des indices de réfraction positifs, comme illustré dans la figure 1(a), mais les physiciens savent fabriquer des matériaux dont l'indice de réfraction est négatif. Un rayon est alors réfracté comme dans la figure 1(b). Nous nous intéressons dans la suite au cas particulier d'indices de réfraction opposés, comme dans la figure 1(c). Cela veut dire que le rayon change de milieu et repart exactement en miroir.

## 2 Les questions que l'on se pose

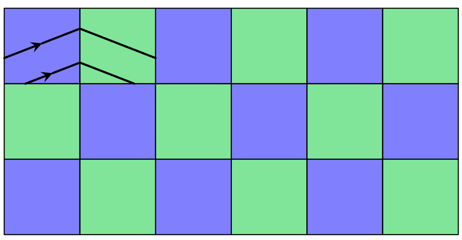


FIGURE 2 – Exemples de trajectoires... à compléter !

Considérons l'arrangement de deux matériaux illustré dans la figure 2, d'indices respectifs $n_1$ et $n_2 = -n_1$. On laisse un rayon lumineux se propager dans cet arrangement de matériaux. J'ai laissé de la place sur la figure 2 pour continuer les deux trajectoires, et en tracer de nouvelles. Notre but est de répondre à la question générale :

**Quelles trajectoires peut-on obtenir ?**

Plus spécifiquement :

1. Y a-t-il des trajectoires *bornées*[1] ? Si oui, à quoi ressemblent ces trajectoires ? Tournent-elles "en rond" en passant périodiquement exactement au même endroit, dirigées dans la même direction (on dit alors qu'elles sont *périodiques*) ? Ou alors ont-elles un trajet plus compliqué, qui ne refait jamais exactement deux fois la même chose ?
2. Y a-t-il des trajectoires *non bornées*[2] ? Si oui, à quoi ressemblent ces trajectoires ? Reviennent-elles infiniment souvent proches de leur point de départ (on dit qu'elles sont *récurrentes*) ? Ou alors vont-elles toujours plus loin sans revenir (on dit qu'elles sont *divergentes*) ?
3. Si on change très légèrement de point de départ et la direction initiale de la trajectoire, est-ce que la trajectoire garde le même comportement (on dit alors qu'elle est *stable*) ?

Un *pavage* est un remplissage du plan par des polygones. Ces polygones doivent occuper tout l'espace et ne pas se superposer. On trouve des pavages carrés dans les cuisines et les salles de bain, les tommettes et les abeilles dans leur ruches forment des pavages hexagonaux. La figure 2 présente des (débuts de) trajectoires dans un pavage carré. Dans ce cas, les réponses à ces questions reposent sur des mathématiques élémentaires. As-tu une idée des différents comportements possibles ?

Dans ma thèse, je me suis posé les questions 1, 2 et 3 dans le cas de différents pavages, avec un rayon lumineux réfracté. On appelle cela un *billard dans un pavage*. Les pavages constituent un domaine de recherche actif encore aujourd'hui, en particulier à Marseille. Mais pour moi le pavage est seulement le paysage et non l'objet d'étude, je travaille sur les trajectoires des rayons lumineux.

**Auto-interview : Magali, essayes-tu de mettre la trajectoire en équation ?**

Pas exactement. J'essaye de dire dans quels cas la trajectoire est périodique, dans quels cas elle est divergente. Je cherche alors à décrire la façon dont elle diverge. Mais en aucun cas je ne cherche à donner la position exacte de la trajectoire (ce que fait une équation).

## 3 Quelques définitions

Je voudrais te raconter un peu les objets mathématiques[3] que j'ai étudiés pour répondre à ces questions. Le but c'est que la suite soit accessible même si tu n'as aucun souvenir de mathématiques, donc je vais commencer par le début. Tu auras le droit à une seule définition formelle, écrite en bleu, et surtout beaucoup d'exemples de la vie courantes, en violet.

En mathématiques, on étudie différentes sortes d'objets. Il y a bien sûr les nombres, les formes, et il y a aussi les fonctions. Une fonction décrit une dépendance. Par exemple, "le plat du midi de Magali durant la dernière semaine de juin 2024" est une fonction : le menu de mon déjeuner dépend du jour. Plus formellement, une *fonction* est définie sur un ensemble de départ, prend ses valeurs dans un ensemble d'arrivée, et à chaque élément de l'ensemble de départ associe un unique élément de l'ensemble d'arrivée. On note souvent une fonction par une lettre, par exemple $f$, et si $x$ est un élément de l'ensemble de départ, on note $f(x)$ l'élément de l'ensemble d'arrivée que lui associe la fonction $f$. La fonction "le plat du midi de Magali durant la dernière semaine de juin 2024", que je noterai $p$ comme plat, est définie sur l'ensemble de départ "les jours de la semaine" et prend ses valeurs dans l'ensemble "toutes les recettes déjà réalisées sur Terre". À chaque jour de la semaine, cette fonction associe le plat que j'ai mangé le midi ce jour-là. Dans ce cas, $p(\text{mercredi}) = \text{tagliatelles à la bolognaise}$. Cela nous montre qu'une fonction n'est pas forcément définie par une formule. Elle n'a pas forcément quelque chose à voir avec les nombres. Il y a beaucoup à dire sur les fonctions, mais ce n'est pas le but de ce texte, donc je me retiens et je passe à la définition suivante !

Pour certaines fonctions, l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée sont les mêmes. C'est le cas par exemple de la fonction "mère biologique" définie sur l'ensemble des "filles et femmes vivant ou ayant vécu sur Terre" et qui à chacune d'entre elles associe sa mère. On peut alors itérer la fonction.

1. c'est-à-dire qui restent pour toujours dans une partie bornée du plan, autrement dit, une partie du plan que l'on peut encercler
2. c'est-à-dire que l'on ne peut pas encercler
3. Le terme d'objet mathématique est peut-être un peu flou, je le prends au sens le plus large possible : un objet est un *quelque chose*, par exemple ça peut être un nombre, un point, un cercle, une suite de nombres...

Pour cet exemple, itérer la fonction, c'est faire un arbre généalogique en remontant toujours par la branche maternelle. Si j'appelle $f$ la fonction, et $m$ moi-même, alors $f(m) =$ ma mère, $f(f(m)) =$ ma grand-mère maternelle, $f(f(f(m))) =$ la grand-mère maternelle de ma mère, etc. Le terme de *système dynamique*[4] désigne l'étude des itérations d'une fonction. Pour être plus efficace, on écrit $f^2(m)$ à la place de $f(f(m))$, $f^3(m)$ à la place de $f(f(f(m)))$, et ainsi de suite. En jargon mathématique, on appelle cette suite l'*orbite* de $m$ par la fonction $f$. De façon générale, quand on étudie un système dynamique, on cherche les propriétés partagées par toutes les orbites[5]. Pour notre exemple, la propriété "l'orbite ne peut pas prendre plusieurs fois la même valeur" est vérifiée pour toutes les orbites : une femme ne peut pas être sa propre mère, ni aucune de ses ancêtres !

## 4 Les objets mathématiques derrière les billards de pavages

Pour répondre aux questions 1, 2 et 3, on peut, dans certains cas, traduire notre problème en un problème sur des *échanges d'intervalles* ou des *surfaces de demi-translation*. Comme il faut faire des choix, je n'expliquerai pas dans ce texte comment passer d'un billard dans un pavage à un échange d'intervalles ou à une surface de demi-translation. Je préfère garder de la place pour te présenter quelles bestioles sont les échanges d'intervalles[6], et l'idée centrale de *renormalisation* que l'on utilise pour les étudier.

Un *échange d'intervalles* est un certain type de fonctions définies sur un intervalle, par exemple sur l'intervalle $[0, 1[$, c'est-à-dire tous les nombres (à virgule) entre 0 inclus et 1 exclu. Notons $I$ cet intervalle. À chaque point de l'intervalle $I$, l'échange d'intervalles associe un point de $I$, de la façon particulière suivante. La fonction coupe l'intervalle $I$ en un nombre fini de sous-intervalles, puis elle les mélange. Voici un exemple d'échange d'intervalles : la fonction $f$ qui à tout point $x$ compris entre 0 (inclus) et 0.3 (exclu) associe $x + 0.7$, et à tout point $x$ compris entre 0.3 (inclus) et 1 (exclu) associe $x - 0.3$. En notation mathématique, on abrège toute cette phrase en :

$$f(x) = \begin{cases} x + 0.7 & \text{si } x \in [0, 0.3[ \\ x - 0.3 & \text{si } x \in [0.3, 1[ \end{cases}$$

On représente cet échange d'intervalles de la façon suivante. L'intervalle du haut représente l'ensemble de départ, ici l'intervalle $I = [0, 1[$, sur lequel est défini l'échange d'intervalles $f$. L'intervalle du bas représente le même intervalle $I$, mais dans son rôle d'ensemble d'arrivée de la fonction $f$. Cette représentation permet de visualiser comment la fonction déplace chaque point.

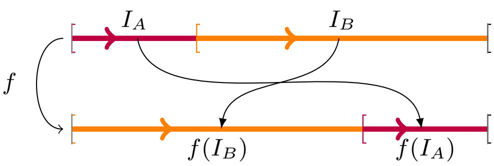



FIGURE 3 – L'échange d'intervalles $f$

Un *échange d'intervalles avec retournements* est un type un peu plus général de fonctions. Après avoir coupé l'intervalle et réordonné les morceaux, un échange d'intervalles avec retournements renverse certains des morceaux (éventuellement tous). Par exemple, la fonction

$$g(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \in ]0, 0.3] \\ x - 0.3 & \text{si } x \in ]0.3, 1[ \end{cases}$$

définie sur l'intervalle $]0, 1[$ des nombres (à virgules) compris strictement entre 0 et 1, est un échange d'intervalles avec retournements. Il retourne l'intervalle $I_A$ (c'est sa seule différence avec la fonction $f$)

4. Je parle ici de systèmes dynamiques discrets, il y a aussi des systèmes dynamiques continus, mais nous mettrons cela de côté.

5. ou alors par *la plupart* d'entre elles

6. Je t'aurais bien parlé aussi de surfaces de demi-translation, mais ce petit texte s'allongerait franchement... viens me poser des questions si je frustre ta curiosité !

et laisse l'intervalle $I_B$ dans le même sens. La figure 4 le représente. On lit grâce aux sens des flèches quels sont les intervalles renversés.

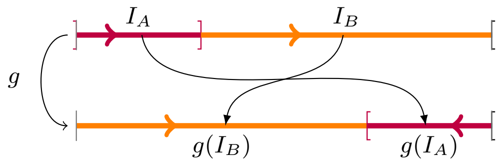



FIGURE 4 – L'échange d'intervalles avec retournements $g$

Étudier le système dynamique défini par l'échange d'intervalles $f$ ou celui avec retournements $g$, c'est étudier le comportement des orbites $(x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots)$ ou $(x, g(x), g^2(x), g^3(x), \ldots)$ respectivement, pour tous les points $x$ de l'intervalle $I$. Ces suites de points explorent-elles tout l'intervalle $I$ ou restent-elles dans une partie de $I$ seulement ?

Pour répondre à cette question, on utilise le principe de *renormalisation*. C'est une idée géniale. Prenons de la hauteur, et considérons l'ensemble des échanges d'intervalles, notons le $\mathcal{E}$. Chaque *élément* ou *point* de $\mathcal{E}$ est une fonction, plus précisément c'est un échange d'intervalles. Cette idée est peut-être surprenante au premier abord. Pour s'y habituer, prenons un nouvel exemple de fonctions : les fonctions du type "la dernière personne avec qui...", définies sur l'ensemble des êtres humains vivant ou ayant vécu sur Terre. Exemple : "la dernière personne à qui on a souri" associe à chacun d'entre nous... la dernière personne à qui l'on a souri ! Ou encore "la dernière personne avec qui on a mangé". Bref, il y a de nombreuses fonctions de ce type [7]. Dans le contexte de ma thèse, nous regardons l'ensemble $\mathcal{E}$ de tous les échanges d'intervalles. Nous définissons sur cet ensemble une nouvelle fonction $\mathcal{R}$, qui à chaque échange d'intervalles associe un nouvel échange d'intervalles. Cette fonction $\mathcal{R}$ s'appelle l'*induction de Rauzy* [8]. Il me faudrait plus de place pour t'expliquer quel échange d'intervalles elle associe à $f$ ou à $g$. L'important c'est l'idée de changer de système dynamique : passer d'un système défini sur un intervalle $I$ à un "méta" système défini sur l'ensemble $\mathcal{E}$ des échanges d'intervalles. Étudier ce nouveau système dynamique, c'est étudier la suite $(f, \mathcal{R}(f), \mathcal{R}^2(f), \mathcal{R}^3(f), \ldots)$, pour tout échange d'intervalles $f$. On dit que $\mathcal{R}(f)$ est la renormalisation de $f$.

Mais pourquoi tout compliquer comme ça ? En fait, ce nouveau système dynamique n'est pas si difficile à étudier et il simplifie l'étude du premier système. Il l'accélère, un peu comme si on considérait directement la grand-mère maternelle plutôt que la mère, dans le cas de notre fonction "mère biologique". Renormaliser la fonction, c'est comme la faire monter sur des échasses, elle fait des pas plus grands [9] ! Grâce à cette accélération, le "méta" système dynamique nous donne des informations sur le système dynamique de départ ! La construction qui peut sembler compliquée facilite en fait notre étude du premier système dynamique, celui de l'échange d'intervalles.

## 5 Un théorème

Bon, on a vu l'objet d'étude – les trajectoires en zig-zag dans différents pavages – et un des objets mathématiques qui permettent de répondre aux questions posées – les échanges d'intervalles avec retournements. Mais qu'est-ce qu'on en fait, qu'est ce que ça donne ? J'ai choisi un résultat [10] de ma thèse pour te montrer à quoi peut ressembler un théorème, et puis dire deux mots de réponse aux questions que j'ai posées.

Je considère un pavage qui ressemble au pavage carré (le traditionnel des cuisines et des salles de bain), mais avec quelques différences :

— les carreaux peuvent être rectangulaires,

7. Tu peux imaginer celles que tu veux... mais attention ! pour être aussi rigoureuse qu'une mathématicienne, il faut que la fonction associe à *chaque* personne de notre ensemble (l'humanité) *une et une seule* personne de notre ensemble.

8. (1938-2010) mathématicien, entre autres co-fondateur du CIRM

9. mais ses pas ne sont pas toujours plus grands de la même façon, par exemple deux fois plus grands à certains endroits, trois fois plus grands à d'autres

10. c'est-à-dire une propriété vraie (j'en ai donné la preuve) qui n'était pas établie avant mon travail

— je laisse un large espace entre les carreaux (imagine une salle de bain où le joint peut être aussi large voire plus large que les carreaux),

— leur position n'est pas nécessairement selon un quadrillage à angle droit, cela peut être un quadrillage "penché".

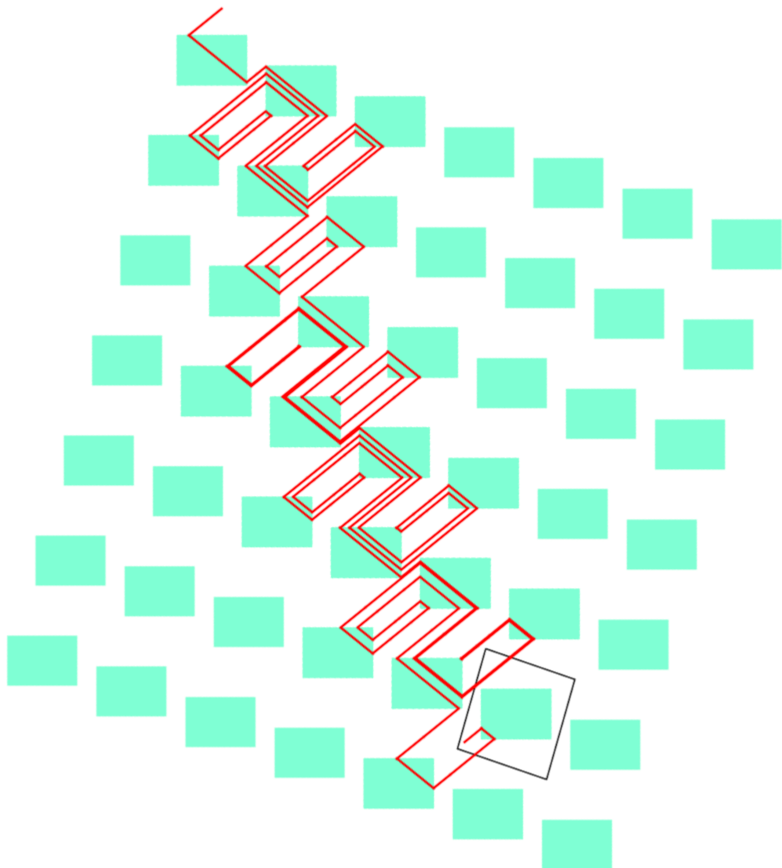
J'obtiens ainsi un ensemble d'éléments qui ont tous la même nature mais avec des légères variations entre eux. C'est comme une assemblée de visages humains : ils ont différentes tailles, formes, une variété formidable de couleurs, mais ils ont en commun d'être tous des visages humains. Pour la *famille*[11] de pavages que je considère, il y a beaucoup moins de paramètres que pour les visages humains :

1. la taille du rectangle : ce sont deux longueurs,
2. le quadrillage "penché" selon lequel on dispose les carreaux : on peut le décrire par les deux directions que l'on suit (qui remplacent les directions horizontale et verticale des pavages traditionnels) et l'espacement entre deux rectangles dans chacune de ces directions (c'est-à-dire l'épaisseur du joint).

Dans cette situation, je considère que les rectangles ont tous le même indice de réfraction $n_r$ et que l'espace entre les rectangles est d'indice de réfraction opposé : $-n_r$.

**Théorème.** *Dans presque tout*[12] *arrangement de ce type, pour presque toute direction initiale, il existe une direction et une largeur telle que la trajectoire reste pour toujours dans une bande de cette largeur et orientée dans cette direction.*

En image, cela donne



11. on utilise vraiment ce terme en mathématiques

12. cette formulation a un sens mathématique précis (incroyable non ?) : c'est le sens courant "tous sauf quelques exceptions", pour lequel on précise la quantité d'exceptions qu'on "accepte"

# 6 Quel rapport avec un billard ?

Très bonne question ! On en parle en direct après ma soutenance ? Ce texte est déjà assez long ;)