Rapport de stage

Combinatoire et Théorie des Nombres

Nathanaël Hassler

Juin 2020

Résumé

J'ai effectué mon stage à l'Institut Camille Jordan sous la direction de Boris Adamczewski que je tiens avant tout à remercier pour m'avoir permis de réaliser ce travail. Le but est d'aborder la théorie des nombres sous l'angle de la combinatoire, c'est à dire en reliant la façon de représenter les nombres avec notamment leurs propriétés d'irrationnalité ou de transcendance. Dans cette optique, chacune des deux parties est conclue par la démonstration d'un résultat important de la théorie dû à Adamczewski et Bugeaud [3].

Table des matières

1 Propriétés combinatoires du développement dans une base et transcendance **2**
- 1.1 Théorèmes d'approximation rationnelle . . . 2
  - 1.1.1 Inégalité de Liouville . . . 2
  - 1.1.2 Théorème de Roth . . . 3
  - 1.1.3 Théorème de Ridout . . . 5
  - 1.1.4 Théorème du sous-espace de Schmidt . . . 6
- 1.2 Critères de transcendance et répétitions dans les mots infinis . . . 7
  - 1.2.1 Un premier critère qui découle du théorème de Roth . . . 7
  - 1.2.2 Une première amélioration grâce au théorème de Ridout . . . 8
  - 1.2.3 Une autre amélioration grâce au théorème du sous-espace de Schmidt . . . 9
- 1.3 Majoration du nombre de blocs de chiffres distincts d'un nombre transcendant . . . 10

2 Théorie des fractions continues **12**
- 2.1 Définition et propriétés . . . 12
  - 2.1.1 Propriétés des réduites . . . 12
  - 2.1.2 Fractions continues infinies convergentes . . . 15
  - 2.1.3 Fractions continues à coefficients entiers . . . 17
- 2.2 Représentation des nombres en fractions continues . . . 19
  - 2.2.1 Développement en fraction continue d'un nombre . . . 19
  - 2.2.2 Nombres quadratiques et développement en fraction continue périodique . . . 21
- 2.3 Fractions continues, palindromes et nombres transcendants . . . 22

1 Propriétés combinatoires du développement dans une base et transcendance

L'objet de cette partie est de relier des propriétés combinatoires du développement dans une base b d'un nombre à sa transcendance. Ces propriétés consistent en des répétitions de motifs dans la suite des chiffres du nombre, qui vont le rendre bien approchable par des nombres rationnels. On va ainsi voir dans un premier temps plusieurs résultats d'approximation des nombres algébriques par des rationnels [2], [6]. On verra ensuite comment les exploiter en reliant les répétitions dans le développement à la bonne approximation du nombre par des rationnels. On terminera cette partie avec le Théorème 18 dû à Adamczewski et Bugeaud qui est actuellement le résultat le plus précis concernant le développement dans une base d'un nombre transcendant [3].

1.1 Théorèmes d'approximation rationnelle

1.1.1 Inégalité de Liouville

Contrairement à ce qu'on pourrait imaginer, les nombres algébriques sont mal approchables par des rationnels, comme en témoigne cette proposition.

Proposition 1 (Liouville 1844)**.** *Soit ξ un nombre algébrique de degré $d \geq 2$. Alors il existe une constante c_ξ telle que pour tout rationnel $\frac{p}{q}$ avec $q \geq 1$,*

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c_\xi}{q^d}.$$

Démonstration. Soit P le polynôme minimal de ξ (avec la convention $P \in \mathbb{Z}[X]$). On a alors P de degré $d \geq 2$, $P(\xi) = 0$ et P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Considérons $c_\xi = 1/(1 + \max\limits_{|\xi - x| \leq 1} |P'(x)|)$.
Soit $\frac{p}{q}$ avec $q \geq 1$ un rationnel.
- Si $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > 1$ alors $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^d} \geq \frac{c_\xi}{q^d}$ car $c_\xi \leq 1$.
- Si $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leq 1$, comme P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, $P\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$ et donc $q^d P\left(\frac{p}{q}\right) \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ et $\left|q^d P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq 1$. Or par inégalité des accroissements finis,

$$\left|P(\xi) - P\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq \left(\max_{|\xi - x| \leq 1} |P'(x)|\right) \left|\xi - \frac{p}{q}\right|.$$

Ainsi,

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^d \max\limits_{|\xi - x| \leq 1} |P'(x)|} \geq \frac{c_\xi}{q^d}$$

car

$$c_\xi \leq \frac{1}{\max\limits_{|\xi - x| \leq 1} |P'(x)|}.$$

□

Exemple 2. Pour tout $b \geq 2$, le nombre

$$\mathscr{L}_b = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b^{n!}}$$

est transcendant. En effet, soit $d \geq 2$ et $j \geq d$. Notons

$$\frac{p_j}{b^{j!}} = \sum_{n=1}^{j} \frac{1}{b^{n!}}$$

avec $p_j \in \mathbb{N}$. Alors

$$\left|\mathscr{L}_b - \frac{p_j}{b^{j!}}\right| = \sum_{n=j+1}^{+\infty} \frac{1}{b^{n!}} = \frac{1}{b^{(j+1)!}} + \frac{1}{b^{(j+1)!}} \left(\frac{1}{b^{(j+2)!-(j+1)!}} + \frac{1}{b^{(j+3)!-(j+1)!}} + \dots \right) < \frac{2}{b^{(j+1)!}}$$

car pour tout $i \geq 2$, $b^{(j+i)!-(j+1)!} \geq 2^{(j+i)!-(j+1)!} \geq 2^i$ donc

$$\sum_{i=2}^{+\infty} \frac{1}{b^{(j+i)!-(j+1)!}} \leq \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{1}{2^i} < 1.$$

Donc

$$\left|\mathscr{L}_b - \frac{p_j}{b^{j!}}\right| < \frac{2}{(b^{j!})^{j+1}} < \frac{2}{(b^{j!})^d}$$

pour tout $j \geq d$. Donc par l'inégalité de Liouville, $\mathscr{L}_b$ ne peut pas être algébrique de degré d et ce pour tout $d \geq 2$, donc $\mathscr{L}_b$ est transcendant.

1.1.2 Théorème de Roth

Le théorème de Roth qui suit ainsi que ses deux améliorations (théorèmes de Ridout et du sous-espace de Schmidt) sont donnés sans démonstrations car celles-ci dépassent largement l'objet de mon stage. Cependant, on va donner de multiples exemples d'application et voir comment ils permettent de montrer la transcendance de nouveaux nombres.

Théorème 3 (Roth 1955)**.** *Soit ξ un nombre algébrique et $\epsilon > 0$. Alors il existe seulement un nombre fini de rationnels $\frac{p}{q}$ tels que $q \geq 1$ et*

$$0 < \left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\epsilon}}.$$

Ce théorème ressemble beaucoup à l'inégalité de Liouville mais il en est une amélioration optimale car on ne peut pas prendre $\epsilon = 0$. C'est donc un grand pas dans la théorie qui a valu la médaille Fields à Roth. On en donne ici quelques exemples d'application.

Exemple 4. Si $b \geq 2$ est un entier alors

$$\mathscr{N}_b = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b^{3^n}}$$

est transcendant. En effet, de même que pour $\mathscr{L}_b$, soit $j \in \mathbb{N}^*$ et notons

$$\frac{p_j}{b^{3^j}} = \sum_{n=1}^{j} \frac{1}{b^{3^n}}$$

avec $p_j \in \mathbb{N}$. Alors

$$\left|\mathscr{N}_b - \frac{p_j}{b^{3^j}}\right| = \sum_{n=j+1}^{+\infty} \frac{1}{b^{3^n}} < \frac{2}{b^{3^{j+1}}} = \frac{2}{(b^{3^j})^3}.$$

On a donc trouvé une infinité de rationnels $\frac{p}{q}$ tels que $0 < \left|\mathscr{N}_b - \frac{p}{q}\right| < \frac{2}{q^{2+1}}$ donc d'après le théorème de Roth, $\mathscr{N}_b$ est transcendant.

Remarque 5. Les mêmes arguments fonctionnent pour montrer la transcendance de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b^{\lfloor d^n \rfloor}}$$

pour tout réel $d > 2$. En revanche, on ne peut rien dire du nombre

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b^{2^n}}.$$

Ce cas sera résolu par la suite grâce à une amélioration p-adique du théorème de Roth.

Jusqu'à présent, on a tronqué les nombres ayant un grand nombre de zéros dans leur développement décimal juste avant une longue série de zéros afin d'en tirer de très bonnes approximations rationnelles et montrer leur transcendance. Mais une astuce consistant à compléter le développement décimal par périodicité permet aussi d'utiliser le théorème de Roth pour prouver la transcendance de nombres n'ayant pas de grandes séries de zéros dans leur développement décimal, comme le nombre de Fibonacci défini ci-après qui n'a pas plus de 3 zéros consécutifs. On considère σ le morphisme sur l'alphabet $\{0, 1\}$ défini par $\sigma(0) = 01$ et $\sigma(1) = 0$. Alors la suite $(\sigma^n(0))_{n\geq 1}$ converge vers le mot de Fibonacci

$$f = 0100101001001010010 10\ldots$$

au sens où pour tout préfixe p de f, il existe un entier N_p tel que pour tout $n \geq N_p$, p est un préfixe de $\sigma^n(0)$. C'est à dire que tout préfixe de f est un préfixe de tous les $\sigma^n(0)$ à partir d'un certain rang. On lui associe alors le nombre en base b

$$\xi_f = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n}{b^n}$$

où f_n désigne la $n^{\text{ème}}$ lettre de f.

Théorème 6. *Le nombre de Fibonacci*

$$\xi_f = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n}{b^n}$$

est transcendant.

Démonstration. On note $(F_j)_{j\geq 0}$ la suite de Fibonacci initialisée avec $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$. On va d'abord montrer un lemme concernant les préfixes de f qui nous permettra de construire de rationnels approchant bien ξ_f.

Lemme 7. *Pour tout entier $j \geq 4$ le mot*

$$f_1 f_2 \ldots f_{F_j} f_1 \ldots f_{F_j} f_1 \ldots f_{F_{j-1}-2}$$

est un préfixe de f.

Démonstration du lemme. Pour $j \geq 3$ on note $w_j = f_1 \dots f_{F_j} = \sigma^{j-2}(0)$. Si $u = u_1 \dots u_n$ est un mot de longueur $|u| \geq 3$ on note $h(u) = u_1 \dots u_{n-2}$. Le mot f vérifie la relation fondamentale $w_{j+1} = w_j w_{j-1}$ pour tout $j \geq 3$. Montrons la par récurrence. On a clairement $w_4 = w_3 w_2 = 010$. Soit $j \geq 3$ tel que $w_{j+1} = w_j w_{j-1}$. Alors $w_{j+2} = \sigma^j(0) = \sigma(\sigma^{j-1}(0)) = \sigma(w_{j+1}) = \sigma(w_j w_{j-1}) = \sigma(\sigma^{j-2}(0)\sigma^{j-3}(0)) = \sigma^{j-1}(0)\sigma^{j-2}(0) = w_{j+1}w_j$. La relation fondamentale étant démontrée, on va maintenant montrer par récurrence que pour tout $j \geq 4$, $h(w_j w_{j-1}) = h(w_{j-1} w_j)$. On a $w_4 w_3 = 01001$ et $w_3 w_4 = 01010$ donc $h(w_4 w_3) = h(w_3 w_4) = 010$. Soit $j \geq 4$ tel que $h(w_j w_{j-1}) = h(w_{j-1} w_j)$. Alors $h(w_{j+1} w_j) = h(w_j w_{j-1} w_j) = w_j h(w_{j-1} w_j)$ car $|w_j| \geq 2$. Donc $h(w_{j+1} w_j) = w_j h(w_j w_{j-1}) = h(w_j w_j w_{j-1}) = h(w_j w_{j+1})$. On peut alors finir la démonstration du lemme en remarquant que par définition, pour tout $j \geq 4$, $h(w_{j+2})$ est un préfixe de f. Or $h(w_{j+2}) = h(w_{j+1} w_j) = h(w_j w_{j+1}) = h(w_j w_j w_{j-1}) = f_1 f_2 \dots f_{F_j} f_1 \dots f_{F_j} f_1 \dots f_{F_{j-1}-2}$ □

Ce lemme nous indique que pour $j \geq 1$ le nombre $\rho_j = 0.(f_1 \dots f_{F_j})^\omega$ est une bonne approximation rationnelle de ξ_f. En effet d'après celui-ci

$$|\xi_f - \rho_j| < b^{-(F_j + F_j + F_{j-1} - 2)} = b^{-F_{j+2}+2}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\rho_j &= \frac{f_1}{b} + \frac{f_2}{b^2} + \dots + \frac{f_{F_j}}{b^{F_j}} + \frac{f_1}{b^{F_j+1}} + \dots + \frac{f_{F_j}}{b^{2F_j}} + \dots \\
&= \left(\frac{f_1}{b} + \frac{f_2}{b^2} + \dots + \frac{f_{F_j}}{b^{F_j}}\right)\left(1 + \frac{1}{b^{F_j}} + \frac{1}{b^{2F_j}} + \dots\right) \\
&= \left(\frac{f_1}{b} + \frac{f_2}{b^2} + \dots + \frac{f_{F_j}}{b^{F_j}}\right)\frac{b^{F_j}}{b^{F_j} - 1}
\end{aligned}$$

Donc il existe un entier p_j tel que $\rho_j = \frac{p_j}{b^{F_j}-1}$. Et f n'est pas périodique à partir d'un certain rang donc pour tout $j \geq 1$

$$0 < \left|\xi_f - \frac{p_j}{b^{F_j} - 1}\right| < \frac{b^2}{b^{F_{j+2}}}.$$

De plus, par récurrence immédiate, pour tout $j \geq 1$, $F_{j+2} \geq 1,5 F_{j+1}$ donc pour tout $j \geq 4$

$$0 < \left|\xi_f - \frac{p_j}{b^{F_j} - 1}\right| < \frac{b^2}{b^{1,5^2 F_j}} = \frac{b^2}{b^{2,25 F_j}} < \frac{b^2}{(b^{F_j} - 1)^{2,25}}.$$

Donc par le théorème de Roth, ξ_f est transcendant. □

1.1.3 Théorème de Ridout

On donne ici une version p-adique du théorème de Roth. On note $|.|_l$ la valeur absolue l-adique telle que $|l|_l = 1$.

Théorème 8 (Ridout 1957)**.** *Soit ξ un nombre algébrique et $\epsilon > 0$. Soit S un ensemble fini de nombres premiers. Alors il existe seulement un nombre fini de rationnels $\frac{p}{q}$ avec $q \geq 1$ et*

$$\left(\prod_{l \in S} |p|_l |q|_l\right)\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\epsilon}}.$$

Cette amélioration du théorème de Roth nous permet de gagner en terme de critère de transcendance, et notamment de résoudre le cas du nombre suivant :

Corollaire 9. *Pour tout entier $b \geq 2$ le nombre*

$$\mathscr{B}_b = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b^{2^n}}$$

est transcendant.

Démonstration. Soit $j \in \mathbb{N}^*$ et posons $\frac{p_j}{q_j} = \sum_{n=1}^{j} \frac{1}{b^{2^n}}$ avec $q_j = b^{2^j}$. Alors

$$\left| \mathscr{B}_b - \frac{p_j}{q_j} \right| = \sum_{n=j+1}^{+\infty} \frac{1}{b^{2^n}} < \frac{2}{b^{2^{j+1}}} = \frac{2}{q_j^2}.$$

D'autre part, soit S l'ensemble des diviseurs premiers de b. Alors comme $p_j \in \mathbb{N}$ pour tout $j \geq 1$, $|p_j|_l \leq 1$ pour tout $l \in S$, donc

$$\prod_{l \in S} |p_j|_l |q_j|_l \leq \prod_{l \in S} |q_j|_l = \prod_{l \in S} |b^{2^j}|_l = \left(\prod_{l \in S} |b|_l \right)^{2^j} = \frac{1}{b^{2^j}} = \frac{1}{q_j}.$$

Donc pour tout $j \geq 1$,

$$\left(\prod_{l \in S} |p_j|_l |q_j|_l \right) \left| \mathscr{B}_b - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{2}{q_j^{2+1}}.$$

Et par le théorème de Ridout, $\mathscr{B}_b$ est transcendant. □

1.1.4 Théorème du sous-espace de Schmidt

Il s'agit ici d'exposer la version la plus générale du théorème de Roth, qui est étendu à n'importe quelle dimension.

Théorème 10 (Schmidt 1980)**.** *Soit $m \geq 2$ un entier et $\epsilon > 0$. Soit S un ensemble fini de nombres premiers. Soient $L_1, ..., L_m$ m formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{R}^m$ à coefficients algébriques. Alors l'ensemble des solutions entières $\vec{x} = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{Z}^m$ de l'inégalité*

$$\left(\prod_{i=1}^{m} \prod_{l \in S} |x_i|_l \right) \prod_{i=1}^{m} |L_i(\vec{x})| \leq \max(|x_1|, \ldots, |x_m|)^{-\epsilon}$$

est contenu dans un nombre fini de sous-espaces stricts de $\mathbb{Q}^m$.

Remarque 11. Le théorème de Roth se déduit de celui-ci. Prenons en effet $m = 2$ et $S = \emptyset$. Soit ξ algébrique et $\epsilon > 0$. Les deux formes linéaires $L_1(x, y) = \xi x - y$ et $L_2(x, y) = x$ sont alors indépendantes et à coefficients algébriques. Donc d'après le théorème du sous-espace de Schmidt, l'ensemble des couples d'entiers (q, p) tels que $|L_1(q, p)||L_2(q, p)| = |q||q\xi - p| < \max(|q|, |p|)^{-\epsilon} = |q|^{-\epsilon}$ (on peut supposer sans perte de généralité que $\xi \in [0, 1]$ donc $q \geq p$) est contenu dans une union finie de sous-espaces stricts de $\mathbb{Q}^2$, c'est à dire de droites de $\mathbb{Q}^2$. Donc il existe $t \in \mathbb{N}^*$ et des couples de rationnels $(a_1, b_1), ..., (a_t, b_t)$ tels que pour toute solution entière (q, p) de l'équation ci-dessus il existe $1 \leq i \leq t$ tel que $a_i p + b_i q = 0$ (ce sont les équations des droites). Donc l'ensemble des rationnels $\frac{p}{q}$ tels que $q \geq 1$ et $q|q\xi - p| < q^{-\epsilon}$ est contenu dans l'ensemble fini $\{-\frac{b_1}{a_1}, ..., -\frac{b_t}{a_t}\}$, donc il y a seulement un nombre fini de rationnels $\frac{p}{q}$ tels $q \geq 1$ et $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\epsilon}}$, ce qui est le théorème de Roth.

1.2 Critères de transcendance et répétitions dans les mots infinis

On va pour commencer introduire une notation qui permettra de bien représenter la notion de répétitions dans un mot. Si u est un mot fini et $x > 0$ un réel, on note u^x le mot

$$u^x = \underbrace{uu\ldots u}_{\lfloor x \rfloor \ fois} u'$$

où u' est le préfixe de u de longueur $\lceil (x - \lfloor x \rfloor)|u| \rceil$. On va alors quantifier la notion de répétition dans les mots infinis grâce à la définition suivante.

Définition 12. Soit $w > 1$ et $c \geq 0$ des réels. On dit qu'un mot infini a vérifie la condition $(*)_{w,c}$ si a n'est pas périodique à partir d'un certain rang et s'il existe des suites de mots finis $(u_j)_{j\geq 1}$ et $(v_j)_{j\geq 1}$ telles que

(i) pour tout $j \geq 1$, le mot $u_j v_j^w$ est un préfixe de a,
(ii) la suite $\left(\frac{|u_j|}{|v_j|}\right)_{j\geq 1}$ est bornée par c,
(iii) la suite $(|v_j|)_{j\geq 1}$ est strictement croissante.

Exemple 13. On a montré dans le Théorème 6 que le mot de Fibonacci ξ_f vérifie la condition $(*)_{2,25,0}$. Ce qui a été fait pour montrer la transcendance de ξ_f à l'aide du théorème de Roth se généralise alors en un critère de transcendance.

1.2.1 Un premier critère qui découle du théorème de Roth

Proposition 14. *Si un mot infini $a = a_1a_2a_3\ldots$ défini sur l'alphabet $\{0, 1, \ldots, b-1\}$ vérifie la condition $(*)_{w,0}$ pour un réel $w > 2$ alors le nombre associé $\xi_a = 0, a_1a_2a_3\ldots$ est transcendant.*

Démonstration. La démonstration reprend les mêmes idées que celle du Théorème 6. Soit $w > 2$ et a un mot infini vérifiant $(*)_{w,0}$. Alors il existe une suite de mots finis $(v_j)_{j\geq 1}$ de longueur strictement croissante telle que pour tout $j \geq 1$, le mot v_j^w est un préfixe de a. Pour $j \geq 1$ posons le nombre $\rho_j = 0, v_jv_jv_j\ldots = 0, v_j^\omega$. Notons $v_j = a_1a_2\ldots a_{|v_j|}$. Alors

$$\rho_j = \left(\frac{a_1}{b} + \ldots + \frac{a_{|v_j|}}{b^{|v_j|}}\right)\frac{b^{|v_j|}}{b^{|v_j|} - 1}.$$

Donc il existe $p_j \in \mathbb{N}$ tel que $\rho_j = \frac{p_j}{b^{|v_j|}-1}$. On a alors

$$|\xi_a - \rho_j| \leq b^{-\lfloor w \rfloor |v_j| - \lceil (w - \lfloor w \rfloor)|v_j| \rceil} \leq b^{-\lfloor w \rfloor |v_j| - (w - \lfloor w \rfloor)|v_j|} = b^{-w|v_j|} < \frac{1}{(b^{|v_j|} - 1)^w}.$$

De plus, comme a vérifie la condition $(*)_{w,0}$ il n'est pas périodique à partir d'un certain rang donc ξ_a n'est pas rationnel. Donc pout tout $j \geq 1$,

$$0 < \left|\xi_a - \frac{p_j}{b^{|v_j|} - 1}\right| < \frac{1}{(b^{|v_j|} - 1)^w}.$$

Comme la suite $(|v_j|)_{j\geq 1}$ est strictement croissante, les ρ_j sont distincts et comme $w > 2$, d'après le théorème de Roth, ξ_a est transcendant.

$\square$

1.2.2 Une première amélioration grâce au théorème de Ridout

Proposition 15. *Si un mot infini a défini sur l'alphabet $\{0, 1, \ldots, b-1\}$ vérifie la condition $(*)_{w,c}$ pour des réels $w > 2$ et $c \geq 0$ alors le nombre associé ξ_a est transcendant.*

Démonstration. Soit $w > 2$ et $c \geq 0$, et a un mot infini vérifiant $(*)_{w,c}$. Soient $(u_j)_{j\geq 1}$ et $(v_j)_{j\geq 1}$ comme dans $(*)_{w,c}$. On note $r_j = |u_j|$ et $s_j = |v_j|$, et $u_j = a_1 \ldots a_{r_j}$, $v_j = a'_1 \ldots a'_{s_j}$. Soit pour $j \geq 1$, $\rho_j = u_j v_j v_j v_j \ldots = u_j v_j^\omega$. Alors

$$\rho_j = \frac{a_1}{b} + \ldots + \frac{a_{r_j}}{b^{r_j}} + \frac{a'_1}{b^{r_j+1}} + \ldots + \frac{a'_{s_j}}{b^{r_j+s_j}} + \frac{a'_1}{b^{r_j+s_j+1}} + \ldots$$

Donc il existe un entier α_j tel que

$$\rho_j = \frac{\alpha_j}{b^{r_j}} + \frac{1}{b^{r_j}}\left(\frac{a'_1}{b} + \ldots + \frac{a'_{s_j}}{b^{s_j}}\right)\left(1 + \frac{1}{b^{s_j}} + \frac{1}{b^{2s_j}} + \ldots\right) = \frac{1}{b^{r_j}}\left(\alpha_j + \left(\frac{a'_1}{b} + \ldots + \frac{a'_{s_j}}{b^{s_j}}\right)\frac{b^{s_j}}{b^{s_j}-1}\right).$$

Donc il existe un entier p_j tel que

$$\rho_j = \frac{p_j}{b^{r_j}(b^{s_j}-1)}.$$

Alors comme $u_j v_j^w$ est un préfixe de a de longueur $r_j + \lfloor w \rfloor s_j + \lceil (w - \lfloor w \rfloor) s_j \rceil$,

$$\left|\xi_a - \frac{p_j}{b^{r_j}(b^{s_j}-1)}\right| < \frac{1}{b^{r_j + \lfloor w \rfloor s_j + \lceil (w - \lfloor w \rfloor) s_j \rceil}} \leq \frac{1}{b^{r_j + w s_j}}.$$

Soit S l'ensemble des diviseurs premiers de b et notons $q_j = b^{r_j}(b^{s_j}-1)$. Alors

$$\prod_{l \in S} |q_j|_l \leq \prod_{l \in S} |b^{r_j}|_l = \frac{1}{b^{r_j}}.$$

Donc

$$\left(\prod_{l \in S} |p_j|_l |q_j|_l\right)\left|\xi_a - \frac{p_j}{q_j}\right| < \left(\prod_{l \in S} |q_j|_l\right)\frac{1}{b^{r_j+ws_j}} \leq \frac{1}{b^{2r_j+ws_j}}.$$

Or pour tout $j \geq 1$, $r_j \leq c s_j$ donc $s_j \geq \frac{1}{c+1}(s_j + r_j)$, donc

$$b^{2r_j+ws_j} = b^{2(r_j+s_j)+(w-2)s_j} \geq b^{2(r_j+s_j)+\frac{w-2}{c+1}(r_j+s_j)} = b^{(r_j+s_j)\left(2+\frac{w-2}{c+1}\right)} \geq b^{2+\frac{w-2}{c+1}}.$$

Posons $\epsilon = \frac{w-2}{c+1}$. Alors pour tout $j \geq 1$,

$$\left(\prod_{l \in S} |p_j|_l |q_j|_l\right)\left|\xi_a - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{b^{2+\epsilon}}.$$

Or la suite $(s_j)_{j\geq 1}$ est strictement croissante donc $q_j \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $j \geq j_0$ on ait $q_j \geq b$. Alors il existe une infinité de rationnels $\frac{p_j}{q_j}$ tels que

$$\left(\prod_{l \in S} |p_j|_l |q_j|_l\right)\left|\xi_a - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^{2+\epsilon}}.$$

Comme $\epsilon > 0$, le théorème de Ridout nous donne alors que ξ_a est transcendant. $\square$

1.2.3 Une autre amélioration grâce au théorème du sous-espace de Schmidt

Proposition 16. *Si un mot infini a défini sur l'alphabet $\{0, 1, \ldots, b-1\}$ vérifie la condition $(*)_{w,c}$ pour des réels $w > 1$ et $c \geq 0$ alors le nombre associé ξ_a est transcendant.*

Démonstration. On adopte les mêmes notations u_j, v_j, r_j, s_j, ρ_j et p_j que dans la démonstration précédente. On a alors

$$\left|\xi_a - \frac{p_j}{b^{r_j}(b^{s_j}-1)}\right| < \frac{1}{b^{r_j+ws_j}}. \tag{1}$$

Supposons par l'absurde que ξ_a est algébrique. Considérons alors les trois formes linéaires indépendantes à coefficients algébriques suivantes :

$$\begin{aligned}
L_1(X_1, X_2, X_3) &= \xi_a X_1 - \xi_a X_2 - X_3 \\
L_2(X_1, X_2, X_3) &= X_1 \\
L_3(X_1, X_2, X_3) &= X_2.
\end{aligned}$$

On va les évaluer en $\overrightarrow{x_j} = (x_1^j, x_2^j, x_3^j) = (b^{r_j+s_j}, b^{r_j}, p_j)$ pour $j \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\left|\prod_{i=1}^{3} L_i(\overrightarrow{x_j})\right| &= b^{r_j+s_j} b^{r_j} |\xi_a b^{r_j+s_j} - \xi_a b^{r_j} - p_j| \\
&= b^{2r_j+s_j} b^{r_j}(b^{s_j}-1)\left|\xi_a - \frac{p_j}{b^{r_j}(b^{s_j}-1)}\right| \\
&\leq b^{2r_j+s_j} b^{r_j}(b^{s_j}-1) b^{-r_j-ws_j} \\
&= b^{2r_j+s_j-(w-1)s_j}.
\end{aligned}$$

Soit S l'ensemble des diviseurs premiers de b. Alors

$$\prod_{i=1}^{3}\prod_{l\in S}|x_i^j|_l \leq \left(\prod_{l\in S}|b^{r_j+s_j}|_l\right)\left(\prod_{l\in S}|b^{r_j}|_l\right) = b^{-2r_j-s_j}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{i=1}^{3}\prod_{l\in S}|x_i^j|_l\right)\left|\prod_{i=1}^{3} L_i(\overrightarrow{x_j})\right| &\leq b^{-(w-1)s_j} \\
&= \left(b^{r_j+s_j}\right)^{-(w-1)\frac{s_j}{r_j+s_j}} \\
&= \left(\max_{i\in\{1,2,3\}}|x_i^j|\right)^{-(w-1)\frac{s_j}{r_j+s_j}} \\
&\leq \left(\max_{i\in\{1,2,3\}}|x_i^j|\right)^{-\frac{w-1}{c+1}}.
\end{aligned}$$

Posons $\epsilon = \frac{w-1}{c+1}$. Alors pour tout $j \geq 1$

$$\left(\prod_{i=1}^{3}\prod_{l\in S}|x_i^j|_l\right)\left|\prod_{i=1}^{3} L_i(\overrightarrow{x_j})\right| \leq \left(\max_{i\in\{1,2,3\}}|x_i^j|\right)^{-\epsilon}.$$

Donc d'après le théorème du sous-espace de Schmidt, $\{\overrightarrow{x_j},\ j \geq 1\} = \{(b^{r_j+s_j}, b^{r_j}, p_j),\ j \geq 1\}$ est contenu dans un nombre fini de sous-espaces stricts de $\mathbb{Q}^3$. En particulier, il existe un plan ou une droite de $\mathbb{Q}^3$ qui contient une infinité de $\overrightarrow{x_j}$. Il existe donc une équation $z_1X_1+z_2X_2+z_3X_3=0$ à coefficients entiers $(z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{Z}^3$ dont au plus un est nul vérifiée par une infinité de triplets $(b^{r_j+s_j},b^{r_j},p_j)$. C'est à dire qu'il y a une infinité de $j\in\mathbb{N}$ tels que $z_1b^{r_j+s_j}+z_2b^{r_j}+z_3p_j=0$, ou encore

$$z_1+\frac{z_2}{b^{s_j}}+z_3\frac{p_j}{b^{r_j+s_j}}=0. \tag{2}$$

Or comme $(s_j)_{j\geq 1}$ est strictement croissante, $b^{s_j}\underset{j\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$, et d'après (1), $\frac{p_j}{b^{r_j+s_j}}\underset{j\to+\infty}{\longrightarrow}\xi_a$ donc en faisant tendre j vers $+\infty$ dans (2), on obtient que $z_1+z_3\xi_a=0$ donc ξ_a est rationnel, ce qui est impossible car comme a vérifie la condition $(*)_{w,c}$, il n'est pas périodique à partir d'un certain rang. Finalement, ξ_a est transcendant. □

1.3 Majoration du nombre de blocs de chiffres distincts d'un nombre transcendant

Pour comprendre le contexte dans lequel s'inscrit le résultat suivant, commençons par définir ce qu'est un nombre normal au sens de Borel.

Définition 17. La *fréquence* d'un bloc de chiffre $D=d_1\dots d_k$ de longueur k dans le développement en base b d'un nombre réel ξ est lorsqu'elle existe la limite de la suite $(A_b(D,N,\xi)/N)_{N\geq 1}$ où $A_b(D,N,\xi)$ est le nombre d'occurences de D parmi les N premiers chiffres du développement en base b de ξ. Le nombre ξ est dit *normal* en base b si pour tout $k\geq 1$ la fréquence de n'importe quel bloc de chiffres de longueur k dans le développement en base b de ξ existe et est la même, c'est à dire égale à $1/b^k$: pour tout $k\geq 1$, pour tout $D=d_1\dots d_k$,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{A_b(D,N,\xi)}{N}=\frac{1}{b^k}.$$

La plupart des nombres sont normaux et on s'attend à ce que ce soit le cas des nombres algébriques irrationnels ainsi que des constantes classiques comme π, e ou $\ln 2$. Le fait qu'un nombre soit normal implique en particulier que chaque bloc de chiffres de n'importe quelle taille apparaisse au moins une fois dans son développement en base b. On s'attend donc à ce que pour les nombres algébriques irrationnels, $p_a(n)=b^n$ pour tout $n\geq 1$, où $p_a(n)$ est défini dans l'énoncé du Théorème 18. Ce théorème est le premier et unique pas réalisé dans cette direction en plus d'un siècle.

Théorème 18 (Adamczewski, Bugeaud)**.** *Soit a un mot infini sur l'alphabet $\{0,1,\dots,b-1\}$. Pour $n\in\mathbb{N}$ on note $p_a(n)$ le nombre de blocs de chiffres distincts de longueur n apparaissant dans a. Alors si ξ_a est un nombre algébrique irrationnel,*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{p_a(n)}{n}=+\infty.$$

Démonstration. Soit a un mot infini défini sur l'alphabet $\{0,1,\dots,b-1\}$, non périodique à partir d'un certain rang. Supposons qu'il existe un entier $\kappa\geq 2$ tel que $p_a(n)\leq\kappa n$ pour une infinité de $n\in\mathbb{N}$. On va montrer que ξ_a est transcendant. Soit une suite $(n_k)_{k\geq 1}$ (qu'on peut supposer strictement croissante) telle que pour tout $k\geq 1$, $p_a(n_k)\leq\kappa n_k$. On va montrer qu'il existe des réels $w>1$ et $c\geq 0$ tels que a vérifie la condition $(*)_{w,c}$. Pour $l\in\mathbb{N}^*$ on note $a(l)$ le préfixe de a de longueur l. Soit $k\geq 1$, alors comme $p_a(n_k)\leq\kappa n_k$, par le principe des tiroirs, il existe un mot m_k de longueur n_k qui apparaît deux fois dans $a((\kappa+1)n_k)$. Il existe donc des mots b_k,c_k,d_k et e_k (possiblement vides) tels que $|c_k|\geq 1$ et

$$a((\kappa+1)n_k)=b_km_kd_ke_k=b_kc_km_ke_k.$$

Remarquons que comme $|m_k| = n_k$, $|b_k| \leq \kappa n_k$. Le choix des mots u_k et v_k pour la condition $(*)_{w,c}$ va alors dépendre de l'espace entre les occurences de m_k, ce qui nous amène à distinguer plusieurs cas.

(i) $|c_k| > |m_k|$. Dans ce cas, il existe un mot f_k de longueur au moins égale à 1 et tel que $a((\kappa+1)n_k) = b_k m_k f_k m_k e_k$. On a alors $|m_k f_k| \leq \kappa |m_k|$ et $|(m_k f_k)^{\frac{1}{\kappa}}| \leq |m_k|$. Donc $(m_k f_k)^{\frac{1}{\kappa}}$ est un préfixe de m_k et donc $b_k(m_k f_k)^{1+\frac{1}{\kappa}}$ est un préfixe de a, avec

$$\frac{|b_k|}{|m_k f_k|} \leq \frac{\kappa n_k}{n_k} = \kappa.$$

(ii) $\left\lceil \frac{|m_k|}{3} \right\rceil \leq |c_k| \leq |m_k|$. Alors c_k est un préfixe de m_k. Soit donc m'_k tel que $m_k = c_k m'_k$. Alors $a((\kappa+1)n_k) = b_k c_k c_k m'_k e_k$ donc $b_k(c_k)^2$ est un préfixe de a avec

$$\frac{|b_k|}{|c_k|} \leq \frac{\kappa n_k}{\frac{n_k}{3}} = 3\kappa.$$

(iii) $1 \leq |c_k| < \left\lceil \frac{|m_k|}{3} \right\rceil$. On a alors $m_k = c_k^t m'_k$ avec $t = \left\lfloor \frac{|m_k|}{|c_k|} \right\rfloor$ et $|m'_k| < |c_k|$. Posons $s = \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$. Comme $s \geq \frac{t}{2} - 1$, $|(c_k^s)^2| \geq |c_k^{t-2}|$ donc il existe m''_k tel que $m_k = c_k^s c_k^s m''_k$ et $|m''_k| < 3|c_k|$. Alors

$$|c_k^s| \geq \frac{s}{2s+3}|m_k| \geq \frac{|m_k|}{5}$$

car $s \geq 1$ (en effet $t \geq 3$). Donc $b_k(c_k^s)^2$ est un préfixe de a avec

$$\frac{|b_k|}{|c_k^s|} \leq \frac{\kappa n_k}{\frac{n_k}{5}} = 5\kappa.$$

Donc dans chacun de ces trois cas, on a trouvé des mots u_k et v_k tels que
- $u_k v_k^{1+\frac{1}{\kappa}}$ est un préfixe de a et $2 > 1 + \frac{1}{\kappa} > 1$,
- $\frac{|u_k|}{|v_k|} \leq 5\kappa = \max(\kappa, 3\kappa, 5\kappa)$,
- $|v_k| \geq \frac{n_k}{5} = \min\left(n_k, \frac{n_k}{3}, \frac{n_k}{5}\right)$.

Comme on a supposé $(n_k)_{k\geq 1}$ strictement croissante, la troisième condition nous donne qu'on peut supposer la suite $(|v_k|)_{k\geq 1}$ strictement croissante. Finalement, on a montré que a vérifie la condition $(*)_{1+\frac{1}{\kappa},5\kappa}$ donc ξ_a est transcendant. $\square$

2 Théorie des fractions continues

Dans cette partie on va présenter le concept de fraction continue et les bases de la théorie qui en découle [1]. On verra notamment que c'est un moyen de représenter les réels, à l'image du développement dans une base comme le développement décimal [5], [4]. On montrera aussi des résultats reliant des propriétés des nombres à leur développement en fraction continue, pour arriver au très esthétique Théorème 44 dont la preuve mêle la théorie des fractions continues ainsi que des arguments de la partie précédente [3].

2.1 Définition et propriétés

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels tels que $a_n > 0$ pour tout $n \geq 1$ (on considérera la plupart du temps $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_n \in \mathbb{N}^*$ pour $n \geq 1$). On appelle *fraction continue* une expression de la forme

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

ou

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\cdots}}}}$$

Elle peut en effet être finie ou infinie et on la notera $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ dans le premier cas et $[a_0, a_1, \ldots]$ dans le second. Pour une fraction continue finie ou infinie on note r_k son *reste* d'ordre k, $r_k = [a_k, a_{k+1} \ldots, a_n]$ dans le cas fini (avec $k \leq n$) et $r_k = [a_k, a_{k+1} \ldots]$ dans le cas infini. Enfin, pour $k \in \mathbb{N}$ ($k \leq n$ dans le cas fini) on définit la *réduite* d'ordre k le nombre $\frac{p_k}{q_k}$ tel que $\frac{p_k}{q_k} = [a_0, \ldots, a_k]$ et où la fraction $\frac{p_k}{q_k}$ est écrite sous forme canonique, c'est à dire qu'on l'obtient en réduisant successivement chaque étage de la fraction au même dénominateur, en commençant par le bas.

2.1.1 Propriétés des réduites

Commençons par quelques résultats simples sur les réduites qui se montrent de manière élémentaire, mais qui seront les piliers de la théorie des fractions continues.

Théorème 19. *Pour tout $k \geq 2$,*

$$\begin{cases} p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}. \end{cases}$$

Démonstration. Procédons par récurrence sur k. Pour $k = 2$ on a clairement $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$ et

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$$

et

$$\frac{p_2}{q_2} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = \frac{a_0a_1a_2 + a_0 + a_2}{a_1a_2 + 1}.$$

Donc

$$\begin{cases} p_2 = a_2p_1 + p_0 \\ q_2 = a_2q_1 + q_0. \end{cases}$$

Soit $n > 2$ et supposons les égalités vraies pour tout $k < n$ et toute suite $(a_n)_{n\geq 0}$ telle que $a_n > 0$ pour tout $n \geq 1$. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une telle suite, alors

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, \dots, a_n]}.$$

Notons $\frac{p'_r}{q'_r} = [a_1, a_2, \dots, a_{r+1}]$ les réduites d'ordre r de $[a_1, \dots, a_n]$. Alors $\frac{p_r}{q_r} = a_0 + \frac{q'_{r-1}}{p'_{r-1}}$ pour tout $1 \leq r \leq n$, donc

$$\begin{cases} p_r = a_0p'_{r-1} + q'_{r-1} \\ q_r = p'_{r-1}. \end{cases}$$

pour tout $1 \leq r \leq n$. Alors d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} p_n &= a_0(a_np'_{n-2} + p'_{n-3}) + a_nq'_{n-2} + q'_{n-3} \\ &= a_n(a_0p'_{n-2} + q'_{n-2}) + a_0p'_{n-3} + q'_{n-3} \\ &= a_np_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n &= p'_{n-1} \\ &= a_np'_{n-2} + p'_{n-3} \\ &= a_nq_{n-1} + q_{n-2}. \end{aligned}$$

Par récurrence, on a donc bien les égalités voulues. □

Remarque 20. On note parfois $p_{-1} = 1$ et $q_{-1} = 0$ pour que les formules soient valides pour $k = 1$.

Théorème 21. *Pour tout $k \geq 0$ on a $q_kp_{k-1} - p_kq_{k-1} = (-1)^k$.*

Démonstration. Soit $k \geq 0$.

$$\begin{aligned} q_kp_{k-1} - p_kq_{k-1} &= (a_kq_{k-1} + q_{k-2})p_{k-1} - (a_kp_{k-1} + p_{k-2})q_{k-1} \\ &= q_{k-2}p_{k-1} - p_{k-2}q_{k-1} \\ &= -(q_{k-1}p_{k-2} - q_{k-2}p_{k-1}) \end{aligned}$$

Et comme $q_0p_{-1} - q_{-1}p_0 = 1$, par récurrence, pour tout $k \geq 0$ on a $q_kp_{k-1} - p_kq_{k-1} = (-1)^k$. □

En divisant l'égalité précédente par q_kq_{k-1} on obtient le résultat suivant :

Corollaire 22. *Pour tout $k \geq 1$,*

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_kq_{k-1}}.$$

On a donc l'information de l'écart entre deux réduites consécutives. Les résultats suivants concernent la différence entre des réduites de même parité consécutives.

Théorème 23. *Pour tout* $k \geq 1$, $q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = (-1)^{k-1} a_k$.

Démonstration. Soit $k \geq 1$.

$$\begin{aligned} q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} &= (a_k q_{k-1} + q_{k-2}) p_{k-2} - (a_k p_{k-1} + p_{k-2}) q_{k-2} \\ &= (q_{k-1} p_{k-2} - q_{k-2} p_{k-1}) a_k \\ &= (-1)^{k-1} a_k \end{aligned}$$

□

Et en divisant par $q_k q_{k-2}$, on obtient :

Corollaire 24. *Pour tout* $k \geq 2$,

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^{k-1} a_k}{q_k q_{k-2}}.$$

Grâce aux résultats 22 et 24 on a une description précise du comportement de la suite des réduites.

Théorème 25. *La suite des réduites d'ordres pairs croît strictement et celle des réduites d'ordres impairs décroît strictement. De plus, toute réduite d'ordre pair est plus petite que toute réduite d'ordre impair.*

Démonstration. Commençons par remarquer que d'après les formules du Théorème 19, $q_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ car $a_k > 0$ pour tout $k \geq 1$. D'après le Corollaire 24, on obtient alors bien les strictes monotonies des suites de réduites d'ordres pairs et impairs souhaitées. Et le Corollaire 22 nous donne que toute réduite d'ordre pair est inférieure à la réduite suivante (qui est donc d'ordre impair). Les monotonies que l'on vient de démontrer nous donnent alors le résultat plus fort que toute réduite d'ordre pair est plus petite que toute réduite d'ordre impair. □

Nous allons finir cette section avec deux formules très utiles sur les réduites.

Théorème 26. *Pour tout* $1 \leq k \leq n$,

$$[a_0, \ldots, a_n] = \frac{p_{k-1} r_k + p_{k-2}}{q_{k-1} r_k + q_{k-2}},$$

où r_k *et* $\frac{p_k}{q_k}$ *désignent respectivement le reste et la réduite d'ordre* k *de la fraction continue finie du membre de gauche.*

Démonstration. Soit $1 \leq k \leq n$. Par définition du reste on a $[a_0, \ldots, a_n] = [a_0, \ldots, a_{k-1}, r_k]$. Notons $\frac{p_i}{q_i}$ la réduite d'ordre i de $[a_0, \ldots, a_n]$ et $\frac{p'_i}{q'_i}$ celle de $[a_0, \ldots, a_{k-1}, r_k]$. Comme ces deux fractions continue ont les mêmes k premiers termes, pour tout $0 \leq i \leq k-1$ on a $p_i = p'_i$ et $q_i = q'_i$. Alors par le Théorème 19,

$$\frac{p'_k}{q'_k} = [a_0, \ldots, a_{k-1}, r_k] = [a_0, \ldots, a_n] = \frac{p'_{k-1} r_k + p'_{k-2}}{q'_{k-1} r_k + q'_{k-2}} = \frac{p_{k-1} r_k + p_{k-2}}{q_{k-1} r_k + q_{k-2}}.$$

□

Théorème 27. *Pour tout* $k \geq 1$,

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1].$$

Démonstration. Montrons cette formule par récurrence. Si $k = 1$, on a bien

$$\frac{q_1}{q_0} = \frac{a_1}{1} = [a_1].$$

Soit $k > 1$ et supposons

$$\frac{q_{k-1}}{q_{k-2}} = [a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_1].$$

Alors

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = \frac{a_k q_{k-1} + q_{k-2}}{q_{k-1}} = a_k + \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} = a_k + \frac{1}{[a_{k-1}, \dots, a_1]} = [a_k, a_{k-1}, \dots, a_1].$$

□

2.1.2 Fractions continues infinies convergentes

Dans l'optique d'associer une valeur numérique à une fraction continue infinie (c'est assez direct pour une fraction continue finie), on va définir la *convergence* d'une fraction continue infinie de la façon très simple suivante :

Définition 28. Une fraction continue $[a_0, a_1, \dots]$ converge si la suite de ses réduites $\left(\frac{p_k}{q_k}\right)_{k\geq 0}$ converge vers un réel α. On lui attribue alors la valeur α et on note $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$. Sinon, on dit qu'elle diverge.

On peut déjà faire le lien entre la convergence d'une fraction continue et celle de ses restes.

Théorème 29. *Si une fraction continue converge, il en est de même pour chacun de ses restes. Réciproquement, si au moins un reste converge, la fraction continue converge.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\frac{p_k}{q_k}$ les réduites de la fraction continue et $\frac{p'_k}{q'_k}$ ceux de r_n, son reste d'ordre n. D'après le Théorème 26, on a pour tout $k \geq 0$:

$$\frac{p_{n+k}}{q_{n+k}} = \frac{p_{n-1}[a_n, \dots, a_{n+k}] + p_{n-2}}{q_{n-1}[a_n, \dots, a_{n+k}] + q_{n-2}} = \frac{p_{n-1}\frac{p'_k}{q'_k} + p_{n-2}}{q_{n-1}\frac{p'_k}{q'_k} + q_{n-2}}. \tag{3}$$

Donc si r_n converge, $\left(\frac{p'_k}{q'_k}\right)_{k\geq 0}$ converge, donc $\left(\frac{p_{n+k}}{q_{n+k}}\right)_{k\geq 0}$ converge, d'où $\left(\frac{p_k}{q_k}\right)_{k\geq 0}$ converge et la fraction continue converge, ce qui montre la réciproque. D'autre part, d'après (3),

$$\frac{p'_k}{q'_k} = \left(\frac{p_{n+k}}{q_{n+k}} q_{n-2} - p_{n-2}\right)\left(p_{n-1} - \frac{p_{n+k}}{q_{n+k}} q_{n-1}\right)^{-1}.$$

Donc si $\left(\frac{p_k}{q_k}\right)_{k\geq 0}$ converge vers un réel α, alors $\left(\frac{p_{n+k}}{q_{n+k}}\right)_{k\geq 0}$ converge vers α, et en remarquant d'après le Théorème 25 que α ne peut être égal à $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, on a bien $\left(\frac{p'_k}{q'_k}\right)_{k\geq 0}$ converge d'où r_n converge ce qui termine la preuve du théorème. □

Remarque 30. Le Théorème 25 nous donne que pour une fraction continue infinie convergente la suite des réduites d'ordres pairs et celle des réduites d'ordres impairs sont adjascentes et convergeantes vers α.

Ce comportement très précis de la suite des réduites permet de quantifier sa distance à α en fonction seulement des q_k.

Théorème 31. *La valeur α d'une fraction continue infinie convergente vérifie pour tout $k \geq 0$,*

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

Démonstration. D'après la Remarque 30, α se trouve toujours entre deux réduites consécutifs, donc si $k \geq 0$,

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \left|\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\right| = \frac{1}{q_k q_{k+1}}$$

d'après le Corollaire 22. □

Nous allons terminer cette partie par un critère de convergence pour les fractions continues infinies.

Théorème 32. *Une fraction continue infinie $[a_0, a_1, \ldots]$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ diverge.*

Démonstration. D'après le Théorème 25, la fraction continue converge si et seulement si les suites des réduites d'ordres pairs et impairs convergent vers une même limite. De plus, le Théorème 31 montre que c'est le cas si et seulement si $q_k q_{k+1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Supposons d'abord que $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge. Soit $k \geq 2$, comme $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$, alors $q_k > q_{k-2}$ (d'après les formules 19, $a_k > 0$ et $q_{k-1} > 0$ pour tout $k \geq 2$). On se trouve alors dans l'un des deux cas suivants : soit $q_{k-1} > q_{k-2}$ soit $q_k > q_{k-1}$. Dans le premier cas,

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} < (1 + a_k) q_{k-1} < \frac{q_{k-1}}{1 - a_k}$$

car $(1 + a_k) < (1 - a_k)^{-1}$ si et seulement si $1 - a_k^2 < 1$ si et seulement si $a_k^2 > 0$. Dans le second, $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} < a_k q_k + q_{k-2}$ donc

$$q_k < \frac{q_{k-2}}{1 - a_k}$$

au moins à partir d'un certain rang, car puisque $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge, il existe un rang à partir du quel $0 < a_k < 1$. Donc il existe $k_0 \geq 0$ tel que pour tout $k \geq k_0$ il existe $l_k < k$ tel que

$$q_k < \frac{q_{l_k}}{1 - a_k}.$$

Si $k \geq k_0$, en itérant l'inégalité ci-dessus, il existe $s < k_0$ et $k_0 \leq k_r < \ldots < k_1 < k$ tels que

$$q_k < \frac{q_s}{(1 - a_k)(1 - a_{k_1}) \ldots (1 - a_{k_r})}.$$

Or $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge donc $\prod_{k\geq k_0} (1 - a_k)$ converge vers un réel $\lambda > 0$. Or pour tout $k \geq k_0$, $0 < a_k < 1$ donc $(1 - a_k)(1 - a_{k_1}) \ldots (1 - a_{k_r}) \geq \lambda$. En notant $Q = \max\limits_{0\leq i\leq k_0-1} q_i$, alors $q_k < \lambda^{-1} Q$ pour tout $k \geq k_0$, ce qui empêche d'avoir $q_k q_{k+1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc la fraction continue diverge. Réciproquement, supposons que $\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge. Comme $q_k > q_{k-2}$, en notant $c = \min(q_0, q_1)$, pour tout $k \geq 0$ on a $q_k \geq c$. Donc pour tout $k \geq 2$, $q_k \geq q_{k-2} + c a_k$. En itérant on obtient

$$q_{2k} \geq q_0 + c \sum_{i=1}^{k} a_{2i}$$

et

$$q_{2k+1} \geq q_1 + c \sum_{i=1}^{k} a_{2i+1}.$$

Donc

$$q_{2k} + q_{2k+1} \geq q_0 + q_1 + c \sum_{i=2}^{2k+1} a_i$$

et

$$q_{2k} + q_{2k-1} \geq q_0 + q_1 + c \sum_{i=2}^{2k} a_i$$

et alors pour tout $k \geq 0$,

$$q_k + q_{k+1} \geq q_0 + q_1 + c \sum_{i=2}^{k+1} a_i \geq c \sum_{i=2}^{k+1} a_i.$$

Donc pour tout $k \geq 0$, au moins un facteur de $q_k q_{k+1}$ est plus grand que $\frac{c}{2} \sum_{i=2}^{k+1} a_i$, et l'autre est plus grand que c, donc

$$q_k q_{k+1} \geq \frac{c^2}{2} \sum_{i=2}^{k+1} a_i$$

ce qui montre que $q_k q_{k+1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc la fraction continue converge. □

2.1.3 Fractions continues à coefficients entiers

A partir de maintenant, toutes les fractions continues seront telles que $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_n \in \mathbb{N}^*$ pour tout $n \geq 1$. Le Théorème 32 assure alors que toute telle fraction continue est convergente. Les formules 19 donnent aussi que les nombres p_k et q_k sont des entiers, et le Théorème 21, avec le théorème de Bézout, montre le théorème suivant.

Théorème 33. *Les réduites sont irréductibles.*

On voit alors par le Théorème 31 que les réduites sont une approximation rationnelle de α, et on peut même être plus précis sur la vitesse de convergence.

Théorème 34. *Pour tout $k \geq 2$, $q_k \geq 2^{\frac{k-1}{2}}$.*

Démonstration. Remarquons d'abord que d'après les formules 19, $q_k > q_{k-1}$ pour tout $k \geq 1$. Donc pour tout $k \geq 2$, $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \geq q_{k-1} + q_{k-2} \geq 2q_{k-2}$. D'où $q_{2k} \geq 2^k q_0 = 2^k$ et $q_{2k+1} \geq 2^k q_1 = 2^k a_1 \geq 2^k$ pour tout $k \geq 1$. Finalement, pour tout $k \geq 2$ on a bien $q_k \geq 2^{\frac{k-1}{2}}$. □

On a déjà une idée assez précise du comportement des réduites grâce à la Remarque 30. On va approfondir cette étude grâce à la notion de médiane de deux fractions.

Définition 35. La médiane de deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ est la fraction $\frac{a+c}{b+d}$.

Lemme 36. *La médiane de deux fractions se trouve toujours entre ces deux fractions.*

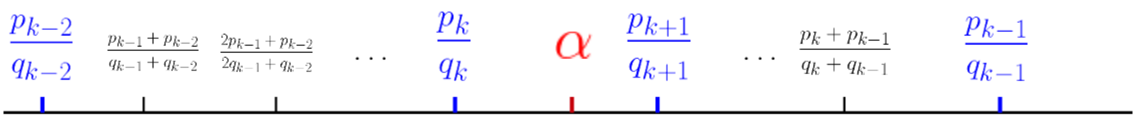

FIGURE 1 – Position relative des réduites par rapport à α

Démonstration. Supposons que $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$. Alors

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} \geq 0$$

et

$$\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{bc-ad}{d(b+d)} \geq 0.$$

Donc

$$\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}.$$

□

Proposition 37. *La suite* $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}, \frac{p_{k-1}+p_{k-2}}{q_{k-1}+p_{k-2}}, \frac{2p_{k-1}+p_{k-2}}{2q_{k-1}+p_{k-2}} \dots, \frac{a_kp_{k-1}+p_{k-2}}{a_kq_{k-1}+p_{k-2}} = \frac{p_k}{q_k}$ *croît lorsque* k *est pair et décroît lorsque* k *est impair.*

Démonstration. Soit $k \geq 2$ et $i \in \mathbb{N}$. Alors

$$\frac{(i+1)p_{k-1}+p_{k-2}}{(i+1)q_{k-1}+p_{k-2}} - \frac{ip_{k-1}+p_{k-2}}{iq_{k-1}+p_{k-2}} = \frac{(-1)^k}{((i+1)q_{k-1}+p_{k-2})(iq_{k-1}+p_{k-2})}.$$

On remarque que le signe dépend seulement de k, et non de i, donc la suite est bien monotone, et la monotonie est donnée par la parité de k. □

Remarque 38. Dans cette suite, chaque terme est la médiane du précedent et de $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$. Cela nous donne une façon de construire les réduites sans connaître la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mais en utilisant la valeur de α. En effet, supposons connus $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ et $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$. On calcule les termes de la suite en faisant à chaque fois la médiane du terme précédent et de $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ jusqu'à ce que le résultat ne soit plus dans l'intervalle $\left[\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}, \alpha\right]$ (ou $\left[\alpha, \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}\right]$ suivant la parité de k). La dernière fraction à être dans l'intervalle est alors $\frac{p_k}{q_k}$. Pour l'initialisation, il suffit de poser $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$, $a_1 = \left\lfloor \frac{1}{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor} \right\rfloor$ et $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$ et $\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_0a_1+1}{a_1}$.

La Figure 1 illustre la situation lorsque k est pair. Mais cette observation a une conséquence encore plus intéressante : elle permet de mieux quantifier la qualité de l'approximation rationnelle de α par les réduites.

Théorème 39. *Pour tout* $k \geq 0$,

$$\frac{1}{q_k(q_k+q_{k+1})} < \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_kq_{k+1}}.$$

Démonstration. La deuxième inégalité a déjà été montrée dans le Théorème 31. Si $k \geq 1$, il découle de la Proposition 37 que $\frac{p_k+p_{k-1}}{q_k+q_{k-1}}$ se trouve entre α et $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$, ce qui est bien illustré sur la Figure 1. Ceci étant valable pour tout $k \geq 1$, on a alors pour tout $k \geq 0$ que $\frac{p_k+p_{k+1}}{q_k+q_{k+1}}$ se trouve entre α et $\frac{p_k}{q_k}$, soit

$$\begin{aligned}\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| &> \left|\frac{p_k + p_{k+1}}{q_k + q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k}\right| \\ &= \left|\frac{q_k p_{k+1} - p_k q_{k+1}}{q_k(q_k + q_{k+1})}\right| \\ &= \left|\frac{(-1)^k}{q_k(q_k + q_{k+1})}\right| \\ &= \frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})}.\end{aligned}$$

□

2.2 Représentation des nombres en fractions continues

2.2.1 Développement en fraction continue d'un nombre

Théorème 40. *Pour tout nombre rationnel α, il existe une unique suite finie d'entiers $a_0, a_1, \ldots, a_n$ avec $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_k \geq 1$ si $k \geq 1$ et $a_n \neq 1$ telle que $\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$. Pour tout nombre irrationnel α, il existe une unique suite d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_n \in \mathbb{N}^*$ si $n \geq 1$ telle que $\alpha = [a_0, a_1, \ldots]$.*

Démonstration. **Existence.** Supposons $\alpha = \frac{a}{b}$ rationnel avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$ et $a \wedge b = 1$. La division euclidienne de a par b nous donne deux entiers $q \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r < b$ tels que $a = bq + r$. Alors

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} = q + \frac{1}{\frac{b}{r}}.$$

On pose alors $a_0 = q$ et on recommence avec $\frac{b}{r}$ (on a bien $r \neq 0$ car $b \wedge r = a \wedge b = 1$). Ce procédé n'est autre que l'algorithme d'Euclide qui va alors nous fournir une suite $a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ avec $a_{n+1} = 1 = a \wedge b$ et n le plus grand entier tel que $a_n \neq 1$ telle que $\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$. Les a_i pour $i \geq 1$ sont alors bien non nuls car $\frac{b}{r} > 1$ donc $a_1 \geq 1$ et le fait que le reste soit strictement plus petit que le diviseur généralise ce fait à chaque étape de l'algorithme donc pour tout $1 \leq i \leq n$, $a_i \geq 1$. Supposons maintenant α irrationnel. Posons $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$ et $r_1 = \frac{1}{\alpha - a_0}$ de telle sorte que $\alpha = a_0 + \frac{1}{r_1}$. On a alors $r_1 > 1$ car $0 < \alpha - \lfloor \alpha \rfloor < 1$ ($\alpha \notin \mathbb{Z}$), r_1 irrationnel car α l'est, et $\alpha = [a_0, r_1]$. Comme $r_1 > 1$, en posant $a_1 = \lfloor r_1 \rfloor$ et $r_2 = \frac{1}{r_1 - a_1}$ alors $a_1 \geq 1$ et r_2 est irrationnel car r_1 l'est et $\alpha = [a_0, a_1, r_2]$. Soit $n \geq 2$ et supposons construits des entiers $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ avec $a_i \geq 1$ pour $i \geq 1$ et un irrationnel $r_n > 1$ tels que

$$\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, r_n].$$

On pose alors $a_n = \lfloor r_n \rfloor \geq 1$ et $r_{n+1} = \frac{1}{r_n - a_n}$ qui est bien irrationnel car r_n l'est. On a donc

$$\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n, r_{n+1}].$$

Donc par récurrence, avec notre construction, il existe une suite d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_n \in \mathbb{N}^*$ pour tout $n \geq 1$ et une suite d'irrationnels $(r_n)_{n\geq 1}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n, r_{n+1}]$. Montrons alors que $\alpha = [a_0, a_1, \ldots]$. On introduit les réduites $\frac{p_n}{q_n}$ de la fraction continue $[a_0, a_1, \ldots]$. Alors d'après le Théorème 26, si $n \geq 2$,

$$\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, r_n] = \frac{p_{n-1}r_n + p_{n-2}}{q_{n-1}r_n + q_{n-2}}$$

et d'autre part,

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}a_n + p_{n-2}}{q_{n-1}a_n + q_{n-2}}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| &= \left|\frac{(p_{n-1}r_n + p_{n-2})(q_{n-1}a_n + q_{n-2}) - (p_{n-1}a_n + p_{n-2})(q_{n-1}r_n + q_{n-2})}{(q_{n-1}r_n + q_{n-2})(q_{n-1}a_n + q_{n-2})}\right| \\
&= \left|\frac{(p_{n-2}q_{n-1} - p_{n-1}q_{n-2})(a_n - r_n)}{(q_{n-1}r_n + q_{n-2})(q_{n-1}a_n + q_{n-2})}\right| \\
&= \frac{|a_n - r_n|}{(q_{n-1}r_n + q_{n-2})(q_{n-1}a_n + q_{n-2})} \\
&< \frac{1}{(q_{n-1}r_n + q_{n-2})(q_{n-1}a_n + q_{n-2})}
\end{aligned}$$

car $a_n = \lfloor r_n \rfloor$ donc $|a_n - r_n| < 1$. De plus, comme r_n est irrationnel, on a $r_n > a_n$ donc $q_{n-1}r_n + q_{n-2} > q_{n-1}a_n + q_{n-2} = q_n$, d'où

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

Comme $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation 19 avec $a_n \geq 1$ pour tout $n \geq 1$, c'est une suite strictement croissante d'entiers et donc $q_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\frac{p_n}{q_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$ ce qui montre que $\alpha = [a_0, a_1, \ldots]$.
Unicité. On a déjà vu dans la Remarque 38 comment construire les réduites et donc les entiers $a_0, a_1, \ldots$ directement à partir de la valeur de α, mais l'unicité peut se prouver plus facilement. La preuve suivante est donnée pour le cas α irrationnel c'est à dire pour les fractions continues infinies mais s'adapte directement aux fractions continues finies. Supposons $\alpha = [a_0, a_1, \ldots] = [a'_0, a'_1, \ldots]$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'entiers avec $a_n \geq 1$ et $a'_n \geq 1$ pour tout $n \geq 1$. Alors $a_0 = a'_0 = \lfloor \alpha \rfloor$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $a_i = a'_i$ pour tout $0 \leq i \leq n$. Alors avec des notations évidentes, $p_i = p'_i$ et $q_i = q'_i$ pour tout $0 \leq i \leq n$. Donc en notant $r_{n+1} = [a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots]$ et $r'_{n+1} = [a'_{n+1}, a'_{n+2}, \ldots]$, d'après le Théorème 26,

$$\alpha = [a_0, \ldots, a_n, r_{n+1}] = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}} = [a'_0, \ldots, a'_n, r'_{n+1}] = \frac{p'_n r'_{n+1} + p'_{n-1}}{q'_n r'_{n+1} + q'_{n-1}} = \frac{p_n r'_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r'_{n+1} + q_{n-1}}.$$

Donc $r_{n+1} = r'_{n+1}$ par bijectivité de $x \mapsto \frac{p_n x + p_{n-1}}{q_n x + q_{n-1}}$. On en déduit que $a_{n+1} = \lfloor r_{n+1} \rfloor = \lfloor r'_{n+1} \rfloor = a'_{n+1}$. Donc par récurrence, $a_i = a'_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, d'où l'unicité. □

Remarque 41. Le Théorème 40 affirme donc que les fractions continues permettent de représenter les nombres réels, comme le fait le développement décimal. Et à l'image de ce dernier, on peut tirer des informations d'un nombre à partir des propriétés de son développement en fraction continue. Par exemple, là où la périodicité à partir d'un certain rang du développement décimal caractérise la rationnalité du nombre, elle se voit directement dans le développement en fraction continue suivant s'il est fini ou infini. Sur le même principe, la partie suivante caractérise les nombres dont le développement en fraction continue est périodique à partir d'un certain rang.

2.2.2 Nombres quadratiques et développement en fraction continue périodique

Théorème 42. *Un nombre réel est quadratique si et seulement si son développement en fraction continue est périodique à partir d'un certain rang.*

Remarque 43. Ici, "périodique à partir d'un certain rang" sous-entend que le développement en fraction continue est infini et qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ et $h \in \mathbb{N}^*$ tels que $a_k = a_{k+h}$ pour tout $k \geq k_0$.

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et supposons que son développement en fraction continue soit périodique à partir d'un certain rang. Il existe alors $k_0 \in \mathbb{N}$ et $h \in \mathbb{N}^*$ tels que $r_k = r_{k+h}$ pour tout $k \geq k_0$. Alors par le Théorème 26, si $k \geq k_0$,

$$\alpha = \frac{p_{k-1}r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}r_k + q_{k-2}} = \frac{p_{k+h-1}r_{k+h} + p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}r_{k+h} + q_{k+h-2}} = \frac{p_{k+h-1}r_k + p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}r_k + q_{k+h-2}}$$

donc

$$(p_{k-1}r_k + p_{k-2})(q_{k+h-1}r_k + q_{k+h-2}) = (p_{k+h-1}r_k + p_{k+h-2})(q_{k-1}r_k + q_{k-2}).$$

Donc r_k vérifie une équation de degré 2 à coefficients entiers (en effet le coefficient devant r_k^2 est $p_{k-1}q_{k+h-1} - q_{k-1}p_{k+h-1}$ qui est bien non nul car $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ et $\frac{p_{k+h-1}}{q_{k+h-1}}$ sont deux réduites distinctes, donc $p_{k-1}q_{k+h-1} \neq q_{k-1}p_{k+h-1}$). Or

$$r_k = \frac{p_{k-2} - q_{k-2}\alpha}{q_{k-1}\alpha - p_{k-1}}$$

donc si $ar_k^2 + br_k + c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, alors

$$a(p_{k-2} - q_{k-2}\alpha)^2 + b(p_{k-2} - q_{k-2}\alpha)(q_{k-1}\alpha - p_{k-1}) + c(q_{k-1}\alpha - p_{k-1})^2 = 0$$

donc α est aussi racine d'une équation de degré 2 à coefficients entiers, donc algébrique de degré au plus 2. Or son développement en fraction continue est infini, il est alors irrationnel et donc de degré au moins 2. Donc α est quadratique. Réciproquement, supposons maintenant α quadratique. Soit alors $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^2$ tels que $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$. Toujours par le Théorème 26, pour tout $n \geq 2$ on a

$$\alpha = \frac{p_{n-1}r_n + p_{n-2}}{q_{n-1}r_n + q_{n-2}}.$$

Donc si $n \geq 2$, r_n vérifie $A_n r_n^2 + B_n r_n + C_n = 0$ avec

$$\begin{cases} A_n = ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2 \\ B_n = 2ap_{n-1}p_{n-2} + b(p_{n-2}q_{n-1} + p_{n-1}q_{n-2}) + 2cq_{n-1}q_{n-2} \\ C_n = ap_{n-2}^2 + bp_{n-2}q_{n-2} + cq_{n-2}^2 \end{cases}$$

De plus, par le Théorème 31,

$$\left|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \frac{1}{q_n q_{n-1}} \leq \frac{1}{q_{n-1}^2}$$

donc $|p_{n-1} - q_{n-1}\alpha| < \frac{1}{q_{n-1}}$. Donc il existe $\delta_{n-1} \in \mathbb{R}$ tel que $|\delta_{n-1}| < 1$ et

$$p_{n-1} = q_{n-1}\alpha + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
A_n &= a\left(q_{n-1}^2\alpha^2 + \frac{\delta_{n-1}^2}{q_{n-1}^2} + 2\alpha\delta_{n-1}\right) + bq_{n-1}^2\alpha + b\delta_{n-1} + cq_{n-1}^2 \\
&= (a\alpha^2 + b\alpha + c)q_{n-1}^2 + a\frac{\delta_{n-1}^2}{q_{n-1}^2} + 2a\alpha\delta_{n-1} + b\delta_{n-1} \\
&= a\frac{\delta_{n-1}^2}{q_{n-1}^2} + 2a\alpha\delta_{n-1} + b\delta_{n-1}
\end{aligned}$$

donc

$$|A_n| \leq |a| + 2|a\alpha| + |b|.$$

La suite $(A_n)_{n\geq 2}$ est donc bornée, et en remarquant que $C_n = A_{n-1}$, la suite $(C_n)_{n\geq 2}$ est bornée aussi. Remarquons de plus que

$$B_n^2 - 4A_nC_n = (b^2 - 4ac)(p_{n-1}q_{n-2} - q_{n-1}p_{n-2})^2 = b^2 - 4ac$$

donc

$$|B_n| \leq \sqrt{|b^2 - 4ac| + |A_n||C_n|}$$

et $(B_n)_{n\geq 2}$ est bornée également. Rappelons que A_n, B_n et C_n sont des entiers, donc la suite $(A_nX^2 + B_nX + C_n)_{n\geq 2}$ ne parcourt qu'un nombre fini de polynômes, et donc la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ et $h \in \mathbb{N}^*$ tels que $r_k = r_{k+h}$, donc par unicité du développement en fraction continue, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir du rang k. □

2.3 Fractions continues, palindromes et nombres transcendants

Terminons avec un très beau résultat dû à Adamczewski et Bugeaud qui utilise le théorème du sous-espace de Schmidt pour déduire d'une propriété du développement en fraction continue d'un nombre qu'il est transcendant ou quadratique. En effet, pour les nombres algébriques de degré supérieur ou égal à 3, on s'attend à un comportement relativement aléatoire de la suite des quotients partiels. Or dans le cas où ils commencent par des palindromes arbitrairement grands, on a une symétrie extrême du nombre, et on s'attend donc à ce qu'il soit quadratique ou transcendant.

Théorème 44 (Adamczewski, Bugeaud)**.** *Soit $a = a_1a_2a_3\ldots$ un mot infini dont les lettres sont des entiers strictement positifs. Si le mot a admet des palindromes arbitrairement longs comme préfixes, alors le nombre $\zeta_a = [0, a_1, a_2, \ldots]$ est quadratique ou transcendant.*

Démonstration. Soit $a = a_1a_2a_3\ldots$ un tel mot. Soit $(n_j)_{j\geq 1}$ la suite strictement croissante des longueurs des palindromes de a. Notons aussi

$$\frac{p_{n_j}}{q_{n_j}} = [0, a_1, a_2, \ldots, a_{n_j}]$$

les réduites associées de ζ_a. Supposons ζ_a algébrique. On va montrer qu'il est quadratique. Soit $j \geq 1$, comme $a_1a_2\ldots a_{n_j}$ est un palindrome, $[a_1, a_2, \ldots, a_{n_j}] = [a_{n_j}, \ldots, a_2, a_1]$, donc

$$\frac{p_{n_j}}{q_{n_j}} = [0, a_1, a_2, \ldots, a_{n_j}] = \frac{1}{[a_1, a_2, \ldots, a_{n_j}]} = \frac{1}{[a_{n_j}, \ldots, a_2, a_1]}.$$

Or d'après le Théorème 27,
$$[a_{n_j},\dots,a_2,a_1]=\frac{q_{n_j}}{q_{n_j-1}}$$
donc
$$\frac{p_{n_j}}{q_{n_j}}=\frac{q_{n_j-1}}{q_{n_j}}$$
et $p_{n_j}=q_{n_j-1}$ pour tout $j\geq 1$. De plus, par le Théorème 31,
$$\left|\zeta_a-\frac{p_{n_j}}{q_{n_j}}\right|<\frac{1}{q_{n_j}q_{n_j+1}}<\frac{1}{q_{n_j^2}}$$
et
$$\left|\zeta_a-\frac{p_{n_j-1}}{q_{n_j-1}}\right|<\frac{1}{q_{n_j}q_{n_j-1}}.$$
Donc
$$|q_{n_j}\zeta_a-p_{n_j}|=|q_{n_j}\zeta_a-q_{n_j-1}|<\frac{1}{q_{n_j}}$$
et
$$|q_{n_j-1}\zeta_a-p_{n_j-1}|<\frac{1}{q_{n_j}}.$$
Considérons alors les trois formes linéaires indépendantes à coefficients algébriques suivantes :
$$\begin{aligned}L_1(X_1,X_2,X_3)&=\zeta_aX_1-X_2\\ L_2(X_1,X_2,X_3)&=\zeta_aX_2-X_3\\ L_3(X_1,X_2,X_3)&=X_1.\end{aligned}$$
Posons aussi le vecteur $\vec{x}=(q_{n_j},q_{n_j-1},p_{n_j-1})$. Alors
$$\prod_{i=1}^{3}|L_i(\vec{x})|=q_{n_j}|q_{n_j-1}\zeta_a-p_{n_j-1}||q_{n_j}\zeta_a-q_{n_j-1}|<\frac{1}{q_{n_j}}=\frac{1}{\max(q_{n_j},q_{n_j-1},p_{n_j-1})}.$$
En effet, $0<\zeta_a<1$ donc au moins à partir d'un certain rang on a $p_{n_j-1}\leq q_{n_j-1}<q_{n_j}$. Donc d'après le théorème du sous-espace de Schmidt, les triplets $(q_{n_j},q_{n_j-1},p_{n_j-1})$ pour $j\geq 1$ sont dans un nombre fini de droites et/ou plans de $\mathbb{Q}^3$. Donc il existe $(z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{Z}^3$ tels que $z_1q_{n_j}+z_2q_{n_j-1}+z_3p_{n_j-1}=0$ pour une infinité de $j\geq 1$, soit
$$z_1+z_2\frac{q_{n_j-1}}{q_{n_j}}+z_3\frac{p_{n_j-1}}{q_{n_j}}=0$$
ou encore
$$z_1+z_2\frac{p_{n_j}}{q_{n_j}}+z_3\frac{p_{n_j-1}}{q_{n_j-1}}\frac{p_{n_j}}{q_{n_j}}=0.$$
Ceci étant vrai pour une infinité de $j\geq 1$, on peut passer à la limite $j\to\infty$, et comme $\frac{p_{n_j}}{q_{n_j}}\underset{j\to\infty}{\longrightarrow}\zeta_a$, alors on obtient que $z_1+z_2\zeta_a+z_3\zeta_a^2=0$. Donc ζ_a est quadratique, ce qui achève la preuve. □

Références

[1] Khinchin Aleksandr. *Continued Fractions.* Dover Publications, 1997.

[2] Adamczewski Boris and Bell Jason. *Automata in Number Theory.* 2018.

[3] Adamczewski Boris and Bugeaud Yann. *Combinatorics, Automata and Number Theory.* Valérie Berthé et Michel Rigo, 2010.

[4] Allouche Jean-Paul and Shallit Jeffrey. *Automatic Sequences.* Cambridge University Press, 2003.

[5] Bugeaud Yann. *Approximation by Algebraic Numbers.* Cambridge University Press, 2004.

[6] Bugeaud Yann. *Distribution Modulo One and Diophantine Approximation.* Cambridge University Press, 2012.