TD 10 : Théorèmes de l'application ouverte et du graphe fermé, dualité

Exercice 1.

a) Trouver une application linéaire continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas ouverte.

b) Trouver une application continue surjective $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas ouverte.

c) Soit $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'espace des suites $(x_n)_n$ presque nulles muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Vérifier que cet espace vectoriel normé n'est pas complet et trouver $T \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})})$ bijectif et continu dont l'inverse n'est pas continu.

Exercice 2. Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. On considère une norme N sur l'espace $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$ qui le rend complet et qui vérifie que toute suite de fonctions (f_n) de $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$ qui converge pour la norme N converge aussi simplement vers la même limite. Montrer que la norme N est alors équivalente à la norme infinie, *i.e.*

$$\exists c_1, c_2 > 0, \forall f \in \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}), \quad c_1 N(f) \leq \|f\|_\infty \leq c_2 N(f).$$

Exercice 3. Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}_c(E, F)$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout x de E, $\|Tx\| \geq \alpha \|x\|$.

(ii) T est injective et d'image fermée.

Exercice 4. Soient E un espace de Banach et F, G deux sous-espaces vectoriels fermés de E. On suppose que F et G sont des supplémentaires algébriques, *i.e.*

$$F + G = E, \quad F \cap G = \{0\}.$$

Montrer que F et G sont des supplémentaires topologiques, *i.e.* les projections associées sont continues.

Exercice 5. Pour $f \in L^1([0, 2\pi])$, on définit la suite de ses coefficients de Fourier par

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \, \mathrm{d}t, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

On considère l'application $\mathscr{F} : f \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ sur $L^1([0, 2\pi])$.

a) Montrer que $\mathscr{F}$ prend ses valeurs dans l'espace $c_0(\mathbb{Z})$ des suites qui convergent vers 0 à l'infini. *Indication* : On pourra admettre la densité des fonctions $C^1([0, 1])$ dans $L^1([0, 1])$ et faire une intégration par parties.

b) Montrer que l'application $\mathscr{F}$ est injective.

c) Montrer par l'absurde que $\mathscr{F}$ n'est pas surjective.

Exercice 6. Soit $T : \mathcal{C}^1([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ l'opérateur de dérivation défini par $T(f) = f'$. Montrer que si $\mathcal{C}^1([0,1])$ et $\mathcal{C}([0,1])$ sont munis de la norme $\|\cdot\|_\infty$, alors le graphe de T est fermé mais T n'est pas continu.

Exercice 7. Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire. On suppose que pour toute suite $(x_n)_n$ de E qui converge vers 0 et pour toute forme linéaire continue $\varphi \in F'$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi(Tx_n) = 0.$$

Montrer que T est continue.
Indication : Montrer à l'aide du théorème de Hahn-Banach que $\|x\| = \sup\{\varphi(x) : \varphi \in F',\ \|\varphi\| \leq 1\}$.

Exercice 8. Soient E un espace de Banach et $T : E \to E'$ linéaire, où E' désigne le dual topologique de E.

a) On suppose que $\langle Tx, x\rangle_{E',E} \geq 0$ pour tout $x \in E$. Montrer que T est continue.

b) Même question en supposant que pour tout $x, y \in E$, $\langle Tx, y\rangle_{E',E} = \langle Ty, x\rangle_{E',E}$.

Exercice 9. On considère, dans l'espace de Banach $E = \mathcal{C}^0([0,1])$ muni de la norme uniforme, un sous-espace vectoriel fermé F tel que tout élément de F est de classe $\mathcal{C}^1$.

a) Montrer que $T : F \to E,\ f \to f'$ est continue.

b) Montrer que la boule unité de F est équicontinue.

c) En déduire que F est de dimension finie.

Exercice 10. Exhiber une forme linéaire continue de norme 1 sur un sous-espace vectoriel strict de $\ell^1(\mathbb{N})$ qui admet une infinité de prolongements linéaires continus de norme 1 sur tout l'espace $\ell^1(\mathbb{N})$.

Exercice 11. Soit $(a_n)_n$ une suite de $]1,+\infty[$ qui diverge vers $+\infty$. Montrer que l'ensemble

$$W = \mathrm{Vect}\Big\{x \in [0,1] \mapsto \frac{1}{x - a_n} : n \geq 0\Big\},$$

est dense dans l'espace $\mathcal{C}^0([0,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.