

TD 11 : ESPACES DE HILBERT

EXERCICE 1. Montrer que $\ell^2(\mathbb{N})$ est un espace de Hilbert, et en donner une base hilbertienne dénombrable. Cette base hilbertienne est-elle une base d'espace vectoriel ?

EXERCICE 2. Soit E un ev de dimension finie muni d'un produit scalaire, et F un sev non réduit à $\{0\}$. Montrer qu'une projection de E sur F est de norme 1 si et seulement si elle est orthogonale.

EXERCICE 3. Soit H un espace de Hilbert et C un convexe fermé de H . On note p_C la projection orthogonale sur C , u et v des éléments de H .

- Montrer que $v = p_C(u)$ si et seulement si $v \in C$ et $\langle u - v, c - v \rangle \leq 0$ pour tout c dans C .
- Montrer que p_C est 1-lipschitzienne.
- Montrer que $\langle p_C(u) - p_C(v), u - v \rangle \geq 0$ quels que soient u et v dans H .

EXERCICE 4. Soit H un espace de Hilbert et T un opérateur continu sur H .

- Montrer qu'il existe une unique fonction $T^* \in \mathcal{L}_c(H)$ telle que $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$ pour tous x et y dans H . On l'appelle *adjoint* de T .
- Montrer que $\ker(T^*) = \text{Im}(T)^\perp$ et $\text{Im}(T^*) \subset \ker(T)^\perp$.
- Soit $H = L^2([0, 1], \mathbb{R})$ et T défini sur H par $Tf(x) = \int_0^x f(t) dt$. Montrer que T est continu et déterminer son adjoint.

EXERCICE 5. Soient E un espace vectoriel normé et $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E . On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est sommable de somme S si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists J$ finie, $J \subset I$, telle que pour toute partie K finie satisfaisant $J \subset K \subset I$, on a :

$$\left\| S - \sum_{k \in K} x_k \right\| < \varepsilon.$$

- Montrer que si E est complet, cela équivaut à : " $\forall \varepsilon > 0, \exists J$ finie, $J \subset I$, telle que pour toute partie L finie satisfaisant $L \subset I$ et $J \cap L = \emptyset$ on a : $\| \sum_{k \in L} x_k \| < \varepsilon$ ".
- Montrer qu'une famille sommable est à support dénombrable.
- Soit $I = \mathbb{N}$, et E complet. Montrer que la famille $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si elle est commutativement convergente, c'est-à-dire : pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, la série $\sum x_{\varphi(i)}$ est convergente.
- Soient H un espace de Hilbert, et $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ une famille orthonormale. Montrer que, pour tout x , la famille $\{\langle x, u_\alpha \rangle u_\alpha : \alpha \in A\}$ est sommable, et que sa somme est la projection hilbertienne de x sur $\overline{\text{Vect}\{u_\alpha : \alpha \in A\}}$.

EXERCICE 6.

- a) Rappeler pourquoi un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert est dense si et seulement si son orthogonal est réduit à $\{0\}$.
- b) Soit c_{00} l'espace préhilbertien des suites nulles à partir d'un certain rang, muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$

Soit f la forme linéaire sur c_{00} donnée par $f(u) = \sum_n \frac{u_n}{n+1}$.

Montrer que $\text{Ker}(f)$ est un hyperplan fermé, et que $(\text{Ker}(f))^\perp = \{0\}$.

- c) (Bonus **) Plus généralement, montrer que dans tout espace pré-hilbertien non complet, il existe un hyperplan fermé dont l'orthogonal est réduit à $\{0\}$.

EXERCICE 7. Soit H un espace de Hilbert et (x_n) une suite de H . On dit que x_n converge faiblement vers $x \in H$ si pour tout y dans H , $\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$, et on le note $x_n \rightharpoonup x$.

- a) Soient (x_n) et (y_n) deux suites de H . Que dire de $\langle x_n, y_n \rangle$ dans les cas suivants ?

$$(a) \begin{cases} x_n \rightarrow x, \\ y_n \rightarrow y. \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x_n \rightarrow x, \\ y_n \rightharpoonup y. \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x_n \rightharpoonup x, \\ y_n \rightarrow y. \end{cases}$$

- b) Soit K un compact de H . Montrer qu'une suite de K converge si et seulement si elle converge faiblement.
- c) Montrer que toute suite faiblement convergente est bornée.
- d) Soit x_n une suite de H faiblement convergente. Montrer que pour tout $T \in \mathcal{L}_c(H)$, la suite (Tx_n) est faiblement convergente.

EXERCICE 8. Le but de cet exercice est de démontrer que toute suite bornée d'un Hilbert converge faiblement à extraction près. Soit H un espace de Hilbert séparable (pour commencer), et (x_n) une suite bornée de H .

- a) Supposons H séparable et D une partie dénombrable dense de H . Montrer qu'on peut extraire de $(x_n)_n$ une suite $(\tilde{x}_n)_n$ telle que pour chaque y de D , $\langle \tilde{x}_n, y \rangle$ converge quand $n \rightarrow \infty$ vers une limite qu'on notera $\ell(y)$.
- b) Montrer que $\langle \tilde{x}_n, y \rangle$ converge pour tout y de H .
- c) Montrer que la fonction ℓ ainsi définie est une forme linéaire continue sur H . Conclure.
- d) Comment faire sans hypothèse de séparabilité sur H ?

Remarque : ce résultat est la traduction du *théorème de Banach-Alaoglu* dans un espace de Hilbert.

EXERCICE 9. Soit H un espace de Hilbert, et $\{\nu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un ensemble de vecteurs de H linéairement indépendants.

- a) Construire un ensemble orthonormé $\{u_n\}$ où u_n est une combinaison linéaire de ν_1, \dots, ν_n .
- b) En déduire que tout espace de Hilbert séparable possède une base hilbertienne (sans utiliser l'axiome du choix).
- c) Montrer que H est séparable si et seulement si il possède une base hilbertienne finie ou dénombrable.