

Couplages Leçons/Développements  
Préparation Agrégation Externe de Mathématiques

Paul Alphonse

2015-2016

## Leçons d'Algèbre

### Leçon 101 - Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

1. Automorphismes de  $\mathfrak{S}_n$ .
2. Isomorphisme entre  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  et  $\mathrm{SO}_0(2, 1)$ .
3. Loi de réciprocity quadratique.

### Leçon 102 - Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

1. Irréductibilité des polynômes cyclotomiques.
2. Multiplication rapide de polynômes.
3. Polygones réguliers constructibles.
4. Structure des groupes abéliens finis.

### Leçon 103 - Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

1. Automorphismes de  $\mathfrak{S}_n$ .
2. Sous-groupes distingués et noyaux de caractères.
3. Théorème de Frattini.

### Leçon 104 - Groupes finis. Exemples et applications.

1. Automorphismes de  $\mathfrak{S}_n$ .
2. Sous-groupes distingués et noyaux de caractère.
3. Structure des groupes abéliens finis.
4. Théorème de Frattini.

### Leçon 105 - Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

1. Automorphismes de  $\mathfrak{S}_n$ .
2. Isométries du simplexe régulier.

### Leçon 106 - Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie $E$ , sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$ . Applications.

1. Homéomorphisme entre  $\mathrm{O}(p, q)$  et  $\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times \mathbb{R}^{pq}$ .
2. Isomorphisme entre  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  et  $\mathrm{SO}_0(2, 1)$ .
3. Théorème de Von-Neumann.

### Leçon 107 - Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

1. Sous-groupes distingués et noyaux de caractère.
2. Structure des groupes abéliens finis.

### Leçon 108 - Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

1. Automorphismes de  $\mathfrak{S}_n$ .
2. Théorème de Frattini.

### Leçon 109 - Représentations de groupes finis de petit cardinal.

1. Sous-groupes distingués et noyaux de caractère.
2. Table de caractères de  $\mathfrak{S}_4$ .

**Leçon 110 - Caractères d'un groupe abélien fini et transformée de Fourier discrète.****Applications.**

1. Multiplication rapide de polynômes.
2. Structure des groupes abéliens finis.

**Leçon 120 - Anneaux  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Applications.**

1. Irréductibilité des polynômes cyclotomiques.
2. Loi de réciprocité quadratique.
3. Théorème de Sophie Germain.

**Leçon 121 - Nombres premiers. Applications.**

1. Loi de réciprocité quadratique.
2. Théorème de Chevalley-Waring.
3. Théorème de Sophie Germain.

**Leçon 122 - Anneaux principaux. Exemples et applications.**

1. Equation de type Ramanujan-Nagell.
2. Irréductibilité des polynômes cyclotomiques.
3. Un anneau principal non euclidien.

**Leçon 123 - Corps finis. Applications.**

1. Endomorphismes nilpotents sur les corps finis.
2. Loi de réciprocité quadratique.
3. Polynômes irréductibles sur les corps finis.
4. Théorème de Chevalley-Waring.

**Leçon 124 - Anneau des séries formelles. Applications.**

1. Nombres de Catalan.
2. Partitions d'un entier en parts fixées.

**Leçon 125 - Extensions de corps. Exemples et applications.**

1. Equation de type Ramanujan-Nagell.
2. Polygones réguliers constructibles.
3. Polynômes irréductibles sur les corps finis

**Leçon 126 - Exemples d'équations diophantiennes.**

1. Equation de Pell-Fermat.
2. Equation de type Ramanujan-Nagell.
3. Théorème de Sophie Germain.

**Leçon 127 - Droite projective et birapport.**

1. Groupe circulaire.
2. Théorème de Pascal.

**Leçon 140 - Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif.****Applications.**

1. Partitions d'un entier en parts fixées.
2. Théorème de Rothstein-Trager.

**Leçon 141 - Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture.****Exemples et applications.**

1. Irréductibilité des polynômes cyclotomiques.
2. Polynômes irréductibles dans les corps finis.

**Leçon 142 - Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.**

1. Borne de Bezout.
2. Théorème de Chevalley-Waring.

**Leçon 143 - Résultant. Applications.**

1. Borne de Bezout.
2. Théorème de Rothstein-Trager.

**Leçon 144 - Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires.****Exemples et applications.**

1. Borne de Bezout.
2. Théorème de Chevalley-Waring.

**Leçon 150 - Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.**

1. Isomorphisme entre  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  et  $\mathrm{SO}_0(2, 1)$ .
2. Loi de réciprocité quadratique.
3. Réduction des endomorphismes normaux.

**Leçon 151 - Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie).****Rang. Exemples et applications.**

1. Isomorphisme entre  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  et  $\mathrm{SO}_0(2, 1)$ .
2. Réduction des endomorphismes normaux.
3. Théorème de Frattini.
4. Théorème des extrema liés.

**Leçon 152 - Déterminant. Exemples et applications.**

1. Borne de Bezout.
2. Isomorphisme entre  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  et  $\mathrm{SO}_0(2, 1)$ .

**Leçon 153 - Polynômes d'endomorphisme en dimension finie.****Application à la réduction d'un endomorphisme en dimension finie.**

1. Endomorphismes semi-simples.
2. Réduction des endomorphismes normaux.

**Leçon 154 - Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.**

1. Endomorphismes semi-simples.
2. Réduction des endomorphismes normaux.

**Leçon 155 - Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.**

1. Décomposition de Dunford.
2. Endomorphismes semi-simples.

**Leçon 156 - Exponentielle de matrices. Applications.**

1. Homéomorphisme entre  $O(p, q)$  et  $O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$ .
2. Théorème de Von Neumann.

**Leçon 157 - Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.**

1. Décomposition de Dunford.
2. Endomorphismes nilpotents sur les corps finis.

**Leçon 158 - Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.**

1. Homéomorphisme entre  $O(p, q)$  et  $O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$ .
2. Lemme de Morse.

**Leçon 159 - Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.**

1. Théorème de Pascal.
2. Théorème des extrema liés.

**Leçon 160 - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).**

1. Points extrémaux de la boule unité de  $\mathcal{L}(E)$ .
2. Réduction des endomorphismes normaux.

**Leçon 161 - Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimension 2 et 3.**

1. Isométries du simplexe régulier.
2. Points extrémaux de la boule unité de  $\mathcal{L}(E)$ .

**Leçon 162 - Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.**

1. Algorithme du gradient à pas optimal.
2. Méthode de Kacmarz.

**Leçon 170 - Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.**

1. Homéomorphisme entre  $O(p, q)$  et  $O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$ .
2. Isomorphisme entre  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  et  $\text{SO}_0(2, 1)$ .
3. Lemme de Morse.
4. Loi de réciprocité quadratique.

**Leçon 171 - Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.**

1. Homéomorphisme entre  $O(p, q)$  et  $O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$ .
2. Isomorphisme entre  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  et  $\text{SO}_0(2, 1)$ .
3. Lemme de Morse.

**Leçon 180 - Coniques. Applications.**

1. Equation de Pell-Fermat.
2. Théorème de Pascal.

**Leçon 181 - Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité.****Applications.**

1. Isométries du simplexe régulier.
2. Points extrémaux de la boule unité de  $\mathcal{L}(E)$ .

**Leçon 182 - Applications des nombres complexes à la géométrie. Homographies.**

1. Groupe circulaire.
2. Polygones réguliers constructibles.

**Leçon 183 - Utilisation des groupes en géométrie.**

1. Groupe circulaire.
2. Isométries du simplexe régulier.

**Leçon 190 - Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.**

1. Loi de réciprocité quadratique.
2. Nilpotents sur les corps finis.
3. Partitions d'un entier en parts fixées.
4. Polynômes irréductibles sur les corps finis.

## Leçons d'Analyse

### Leçon 201 - Espaces de fonctions : exemples et applications.

1. Equation de la chaleur.
2. Espace de Bergman.
3. Théorème de Rademacher.

### Leçon 202 - Exemples de parties denses et applications.

1. Espace de Bergman.
2. Théorème de Grothendieck.
3. Théorème de Rademacher.
4. Théorème taubérien de Hardy-Littlewood.

### Leçon 203 - Utilisation de la notion de compacité.

1. Théorème d'Ascoli.
2. Théorème de Brouwer.

### Leçon 204 - Connexité. Exemples et applications.

1. Isomorphisme entre  $PSL(2, \mathbb{R})$  et  $SO_0(2, 1)$ .
2. Théorème de Cauchy-Lipchitz.

### Leçon 205 - Espaces complets. Exemples et applications.

1. Espace de Bergman.
2. Théorème de Cauchy-Lipschitz.
3. Théorème de Grothendieck.
4. Théorème de Rademacher.

### Leçon 206 - Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

1. Théorème de Brouwer.
2. Théorème de Cauchy-Lipschitz.

### Leçon 207 - Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

1. Formule des compléments.
2. Théorème de Rademacher.

### Leçon 208 - Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

1. Théorème de Grothendieck.
2. Théorème de Rademacher.

### Leçon 209 - Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

1. Densité des polynômes orthogonaux.
2. Equation de la chaleur.
3. Théorème taubérien de Hardy-Littlewood.

### Leçon 213 - Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

1. Equation de la chaleur.
2. Espace de Bergman.

**Leçon 214 - Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites.****Exemples et applications.**

1. Isomorphisme entre  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  et  $\mathrm{SO}_0(2, 1)$ .
2. Lemme de Morse.
3. Théorème de Von Neumann.
4. Théorème des extrema liés.

**Leçon 215 - Applications différentiables définies sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .****Exemples et applications.**

1. Algorithme du gradient à pas optimal.
2. Isomorphisme entre  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  et  $\mathrm{SO}_0(2, 1)$ .
3. Lemme de Morse.
4. Théorème de Cartan-Von Neumann.

**Leçon 217 - Sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$ . Exemples.**

1. Isomorphisme entre  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  et  $\mathrm{SO}_0(2, 1)$ .
2. Théorème de Cartan-Von Neumann.

**Leçon 218 - Applications des formules de Taylor.**

1. Etude de  $\mathrm{VP}(\frac{1}{x})$ .
2. Lemme de Morse.
3. Méthode de Laplace.
4. Théorème central limite.

**Leçon 219 - Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.**

1. Algorithme du gradient à pas optimal.
2. Equation de la chaleur.
3. Résolution d'un problème aux limites non linéaire.
4. Théorème des extrema liés.

**Leçon 220 - Équations différentielles  $X' = f(t, X)$ .****Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.**

1. Théorème de Cauchy-Lipschitz.
2. Théorème de Lyapunov.

**Leçon 221 - Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires.****Exemples et applications.**

1. Théorème de Cauchy-Lipschitz adapté.
2. Théorème de Lyapunov.

**Leçon 222 - Exemple d'équations aux dérivées partielles linéaires.**

1. Equation de la chaleur.
2. Equation de Schrodinger.

**Leçon 223 - Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.**

1. Inversion de Möbius et développements asymptotiques.
2. Théorème taubérien de Hardy-Littlewood.

**Leçon 224 - Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.**

1. Inversion de Möbius et développements asymptotiques.
2. Méthode de Laplace.

**Leçon 226 - Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Exemples et applications.**

1. Algorithme du gradient à pas optimal.
2. Méthode de Kacmarz.

**Leçon 228 - Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.**

1. Equation de la chaleur.
2. Théorème de Rademacher.

**Leçon 229 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.**

1. Algorithme du gradient à pas optimal.
2. Résolution d'un problème aux limites non linéaire.

**Leçon 230 - Séries de nombres réels ou complexes.****Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.**

1. Inversion de Möbius et développements asymptotiques.
2. Théorème taubérien de Hardy-Littlewood.

**Leçon 232 - Méthodes d'approximation des solutions d'une équation  $F(X) = 0$ . Exemples..**

1. Algorithme du gradient à pas optimal.
2. Méthode de Kacmarz.

**Leçon 233 - Analyse numérique matricielle : résolution approchée de systèmes linéaires, recherche de vecteurs propres, exemples.**

1. Algorithme du gradient à pas optimal.
2. Méthode de Kacmarz.

**Leçon 234 - Espaces  $L^p, 1 \leq p \leq \infty$ .**

1. Espace de Bergman.
2. Théorème de Grothendieck.
3. Théorème de Rademacher.

**Leçon 235 - Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.**

1. Equation de la chaleur.
2. Espace de Bergman.
3. Formule des compléments.
4. Théorème taubérien de Hardy-Littlewood.

**Leçon 236 - Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.**

1. Equation de Schrodinger.
2. Formule des compléments.

**Leçon 239 - Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre.****Exemples et applications.**

1. Equation de Schrodinger.
2. Méthode de Laplace.

**Leçon 240 - Produit de convolution, Transformation de Fourier. Applications.**

1. Equation de Schrodinger.
2. Densité des polynômes orthogonaux.

**Leçon 241 - Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.**

1. Equation de la chaleur.
2. Théorème taubérien de Hardy-Littlewood.

**Leçon 243 - Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.**

1. Espace de Bergman.
2. Théorème taubérien de Hardy-Littlewood.

**Leçon 244 - Fonctions développables en série entière, fonctions analytiques. Exemples.**

1. Espace de Bergman.
2. Formule des compléments.
3. Théorème taubérien de Hardy-Littlewood.

**Leçon 245 - Fonctions holomorphes sur un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Exemples et applications.**

1. Espace de Bergman.
2. Formule des compléments.

**Leçon 246 - Séries de Fourier. Exemples et applications.**

1. Equation de la chaleur.
2. Résolution d'un problème aux limites non linéaire.

**Leçon 247 - Exemples de problèmes d'interversion de limites.**

1. Equation de la chaleur.
2. Espace de Bergman.
3. Formule des compléments.
4. Théorème taubérien de Hardy-Littlewood.

**Leçon 249 - Suites de variables de Bernoulli indépendantes.**

1. Marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$ .
2. Nombres normaux.

**Leçon 253 - Utilisation de la notion de convexité en analyse.**

1. Algorithme du gradient à pas optimal.
2. Résolution d'un problème aux limites non linéaire.

**Leçon 254 - Espaces de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  et distributions tempérées. Dérivation et transformation de Fourier dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  et  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ .**

1. Distributions tempérées harmoniques.
2. Equation de Schrodinger.

**Leçon 260 - Espérance, variance et moments de variables aléatoires.**

1. Convergence d'un estimateur.
2. Nombres normaux.
3. Théorème central limite.

**Leçon 261 - Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples et applications.**

1. Inégalité de Hoeffding.
2. Théorème central limite.

**Leçon 262 - Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.**

1. Convergence d'un estimateur.
2. Théorème central limite.

**Leçon 263 - Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.**

1. Convergence d'un estimateur.
2. Théorème central limite.

**Leçon 264 - Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.**

1. Marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$ .
2. Nombres normaux.