Mathématiques 1

PC **2016**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrices autorisées

On utilise la fonction Gamma d'Euler Γ (partie I) pour calculer, en partie II, une intégrale dépendant d'un paramètre. En partie III, en liaison avec des variables aléatoires suivant une loi de Poisson, on détermine l'équivalent, quand $n \to +\infty$, de sommes dépendant d'un paramètre entier n. Les trois parties sont largement indépendantes.

I Autour de la fonction Gamma d'Euler

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque cela a un sens, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

I.A –

I.A.1) Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction Γ ?

I.A.2) Pour tout $x \in \mathcal{D}$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et de $\Gamma(x)$.

En déduire, pour tout $x \in \mathcal{D}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $\Gamma(x+n)$ en fonction de x, n et $\Gamma(x)$, ainsi que la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

I.A.3) Montrer l'existence des deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^4}\,\mathrm{d}t$ et les exprimer à l'aide de Γ.

I.B –

I.B.1) Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que, pour tout $t > 0$ et tout $x \in [a, b]$,

$$t^x \leqslant \max(t^a, t^b) \leqslant t^a + t^b$$

I.B.2) Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathcal{D}$. Exprimer $\Gamma^{(k)}(x)$, dérivée k-ième de Γ au point x, sous forme d'une intégrale.

I.C –

I.C.1) Montrer que Γ' s'annule en un unique réel ξ dont on déterminera la partie entière.

I.C.2) En déduire les variations de Γ sur $\mathcal{D}$. Préciser en particulier les limites de Γ en 0 et en $+\infty$. Préciser également les limites de Γ' en 0 et en $+\infty$. Esquisser le graphe de Γ.

II Une transformée de Fourier

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{-3/4}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t$, où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

II.A – Montrer que la fonction $F : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto F(x) \end{array}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Soit k un entier naturel non nul et soit x un réel. Donner une expression intégrale de $F^{(k)}(x)$, dérivée k-ième de F en x. Préciser $F(0)$.

II.B –

II.B.1) Montrer qu'au voisinage de $x = 0$, la fonction F peut s'écrire sous la forme

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{(\mathrm{i}x)^n}{n!} \qquad (S)$$

où c_n est la valeur de Gamma en un point à préciser. On exprimera c_n en fonction de n et de c_0.

Quel est le rayon de convergence de la série entière qui apparaît au second membre de (S) ?

II.B.2) On admet que $\Gamma(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, x^{(x-1/2)}\, \mathrm{e}^{-x}$.

Étudier si la série du second membre de (S) converge absolument lorsque $|x| = R$.

II.B.3) Soit $R(x)$ la partie réelle et $I(x)$ la partie imaginaire de $F(x)$.

Déterminer, au voisinage de 0, le développement limité de $R(x)$ à l'ordre 3 et de $I(x)$ à l'ordre 4.

II.C –

II.C.1) Prouver que F vérifie sur $\mathbb{R}$ une équation différentielle de la forme $F' + A\,F = 0$, où A est une fonction à préciser.

II.C.2) En déduire une expression de $F(x)$.

On pourra commencer par dériver la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{8}\ln(1+x^2) + \dfrac{\mathrm{i}}{4}\arctan x$.

III Autour de la loi de Poisson

Dans cette partie, λ désigne un réel strictement positif.

On rappelle qu'une variable aléatoire X, à valeurs dans $\mathbb{N}$, suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre λ si, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

Pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}$, $\mathrm{P}(X \in A)$ désigne la probabilité de l'événement $X^{-1}(A)$.

On note $G_X(t) = \mathrm{E}(t^X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(X = k)t^k$ (série génératrice de la variable aléatoire X).

III.A – Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

III.A.1) Déterminer $G_X(t)$.

III.A.2) Calculer l'espérance $\mathrm{E}(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart type de X.

III.A.3) Soit μ un réel strictement positif. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\mu)$ et telle que X et Y soient indépendantes. Déterminer la loi de $X + Y$.

III.B – Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. On rappelle que, quels que soient les entiers $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ et les intervalles I_1, I_2,...I_k de $\mathbb{R}$

$$\mathrm{P}(X_{i_1} \in I_1,\, X_{i_2} \in I_2,\, \ldots,\, X_{i_k} \in I_k) = \prod_{j=1}^{j=k} \mathrm{P}(X_{i_j} \in I_j)$$

III.B.1) Pour tout entier $n \geqslant 1$, déterminer la loi de $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

III.B.2) Déterminer l'espérance et l'écart type des variables aléatoires S_n et $T_n = \dfrac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$.

III.B.3) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $c(\varepsilon)$ tel que, si $c \geqslant c(\varepsilon)$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{P}(|T_n| \geqslant c) \leqslant \varepsilon$.

III.C – Dans cette sous-partie, on fixe deux réels a et b tels que $a < b$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$ tel que $a + \sqrt{n\lambda} > 0$, on pose

$$I_n = \{k \in \mathbb{N} \mid n\lambda + a\sqrt{n\lambda} \leqslant k \leqslant n\lambda + b\sqrt{n\lambda}\}$$

Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose $x_{k,n} = \dfrac{k - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$.

On considère enfin la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

III.C.1) Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que f soit une fonction M-lipschitzienne.

III.C.2)

a) Montrer que, si x, $h \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, alors $\left|hf(x) - \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M\dfrac{h^2}{2}$.

b) En déduire, lorsque I_n est non vide, une majoration de

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sum_{k\in I_n} f(x_{k,n}) - \int_{x_{p,n}}^{x_{q+1,n}} f(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

où p est le plus petit élément de I_n et q est le plus grand.

c) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sum_{k\in I_n} f(x_{k,n}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

III.C.3) Pour tout $k \in I_n$, on note $y_{k,n} = \left(1 - \frac{x_{k,n}}{k}\sqrt{n\lambda}\right)^k \exp(x_{k,n}\sqrt{n\lambda})$.

Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer l'existence d'un entier $N(\varepsilon)$ tel que, pour tout $n \geqslant N(\varepsilon)$ et tout $k \in I_n$, les inégalités suivantes soient satisfaites :

a) $\dfrac{1-\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{n\lambda}}y_{k,n} \leqslant \mathrm{e}^{-n\lambda}\dfrac{(n\lambda)^k}{k!} \leqslant \dfrac{1+\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{n\lambda}}y_{k,n}$;

On utilisera la formule de Stirling $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.

b) $(1-\varepsilon)f(x_{k,n}) \leqslant y_{k,n} \leqslant (1+\varepsilon)f(x_{k,n})$.

III.C.4) Exprimer, sous forme d'intégrale, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k\in I_n}\frac{(n\lambda)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$.

III.C.5) Comparer $\mathrm{P}(a \leqslant T_n \leqslant b)$ et $\displaystyle\sum_{k\in I_n}\mathrm{P}(S_n = k)$, où S_n et T_n sont définies en III.B.

III.C.6) Déterminer les limites, quand $n \to +\infty$, de

$$\mathrm{P}(T_n \geqslant a), \qquad \mathrm{P}(T_n = a), \qquad \mathrm{P}(T_n > a) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}(T_n \leqslant b)$$

III.D –

III.D.1) Déduire de la question III.C.6) la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

III.D.2) Déterminer un équivalent, lorsque $n \to +\infty$, de

$$A_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n\lambda\rfloor}\frac{(n\lambda)^k}{k!} \qquad \text{et} \qquad B_n = \sum_{\lfloor n\lambda\rfloor}^{+\infty}\frac{(n\lambda)^k}{k!}$$

où $\lfloor t\rfloor$ désigne la partie entière du réel t.

On interprétera $\mathrm{e}^{-n\lambda}A_n$ comme la probabilité d'un événement lié à S_n et donc à T_n.

III.D.3) Pour $\lambda \neq 1$, on note $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(n\lambda)^k}{k!}$ et $D_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(n\lambda)^k}{k!}$.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-n\lambda}C_n$ si $\lambda < 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-n\lambda}D_n$ si $\lambda > 1$.

III.E – On suppose $\lambda < 1$.

III.E.1) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left((n\lambda)^{-n}\int_0^{n\lambda}(n\lambda - t)^n\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right)$.

III.E.2) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, en déduire un équivalent de D_n quand $n \to +\infty$.

III.F – Si $\lambda > 1$, déterminer un équivalent de C_n lorsque $n \to +\infty$.

Considérer l'intégrale $\displaystyle\frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{0}(r-t)^n\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ et choisir convenablement le réel r.

• • • FIN • • •