

Autour de la transformation de Fourier rapide

Samuel Gallay et Ludovic Arnaud

Rapport de lectures dirigées de L3
sous la supervision de Stéphane Balac

7 avril 2022

Objectif : évaluer numériquement une transformée de Fourier continue

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx} dt$$

Quadrature de l'intégrale par la méthode des rectangles :

$$\hat{f}(x) \approx \frac{a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j)e^{-it_j x} \quad \text{avec} \quad t_j = -\frac{a}{2} + j\frac{a}{n}$$

On suppose f continue et à support dans $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$.

Calcul de $\hat{f}(x)$ en de nombreux points

Évaluation en un point : $O(n)$

Évaluation en m points $(x_k)_{1 \leq k \leq m}$: algorithme naïf en $O(n \times m)$

Peut-on faire mieux ? Dans un cas particulier, oui !

On suppose maintenant que $m = n$ et que $x_k = -\frac{b}{2} + k\frac{b}{n}$

Algorithme classique

Par la transformation de Fourier rapide : $O(n \log n)$

Contrainte

$$ab = 2\pi n$$

Définition de la transformation de Fourier discrète

$$D_k(z) = \sum_{j=0}^{n-1} z_j e^{-\frac{2i\pi jk}{n}} \quad \text{et} \quad D_k^{-1}(z) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} z_j e^{\frac{2i\pi jk}{n}}$$

Théorème d'inversion

$$z_k = D_k^{-1} \left((D_j(z))_{0 \leq j \leq n-1} \right)$$

Théorème de convolution circulaire

$$D_k(x * y) = D_k(x) \cdot D_k(y) \quad \text{avec} \quad (x * y)_l = \sum_{j=0}^{n-1} x_j y_{l-j}$$

Attention !

Ne s'applique que dans le cas où n est une puissance de 2.

$$D_k(z) = D_k \left((z^{2j})_{0 \leq j \leq \frac{n}{2}-1} \right) + e^{\frac{-2ik\pi}{n}} D_k \left((z^{2j+1})_{0 \leq j \leq \frac{n}{2}-1} \right)$$
$$D_{\frac{n}{2}+k}(z) = D_k \left((z^{2j})_{0 \leq j \leq \frac{n}{2}-1} \right) - e^{\frac{-2ik\pi}{n}} D_k \left((z^{2j+1})_{0 \leq j \leq \frac{n}{2}-1} \right)$$

Approche de type *diviser pour régner* !

Calcul de sa complexité

$$C(n) = 2C\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$$

Ainsi, $C(n) = \Theta(n \log(n))$ par le *Master Theorem*.

Retour au calcul des $\hat{f}(x_k)$

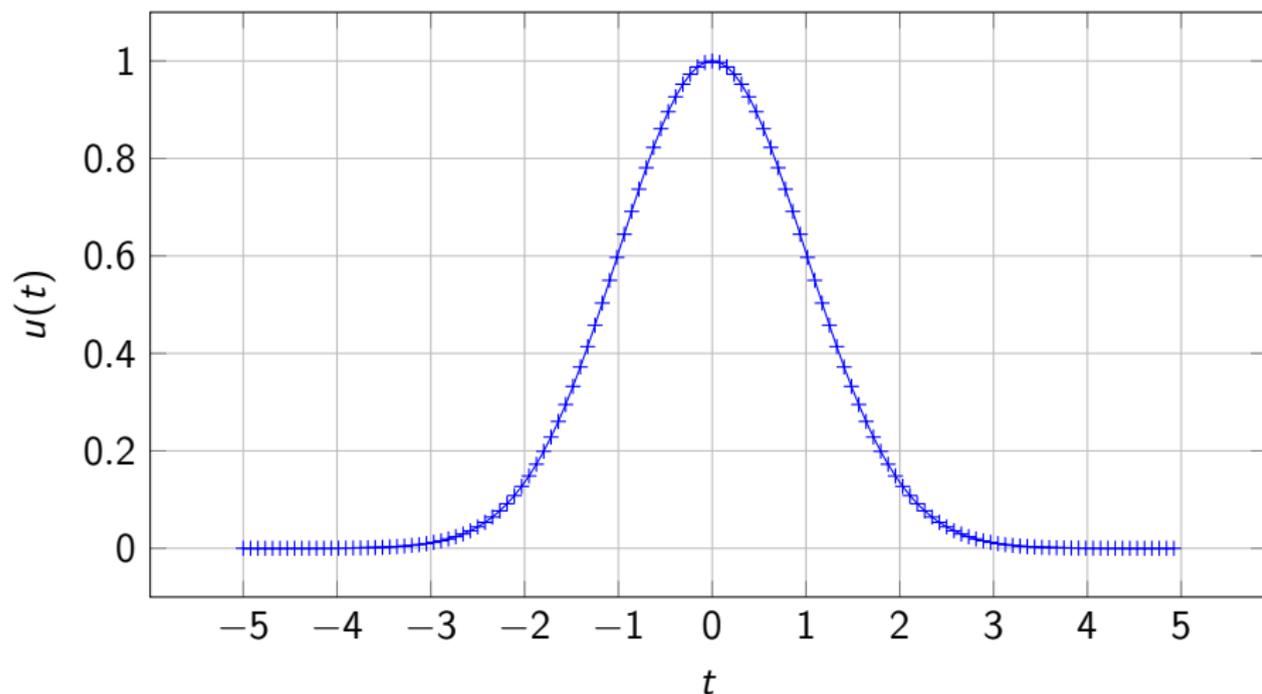
$$\begin{aligned}\hat{f}(x_k) &\approx \frac{a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j) e^{-it_j x_k} = \frac{a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j) e^{-i(-\frac{a}{2} + j\frac{a}{n})(-\frac{b}{2} + k\frac{b}{n})} \\ &= \frac{a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j) e^{-i\frac{ab}{4}} e^{i\frac{abk}{2n}} e^{i\frac{abj}{2n}} e^{-i\frac{abkj}{n^2}} \\ &= \frac{a}{n} e^{-i\frac{ab}{4}} e^{i\frac{abk}{2n}} \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j) e^{i\frac{abj}{2n}} e^{-i\frac{abkj}{n^2}}\end{aligned}$$

On reconnaît une transformée de Fourier discrète !
Mais avec une contrainte...

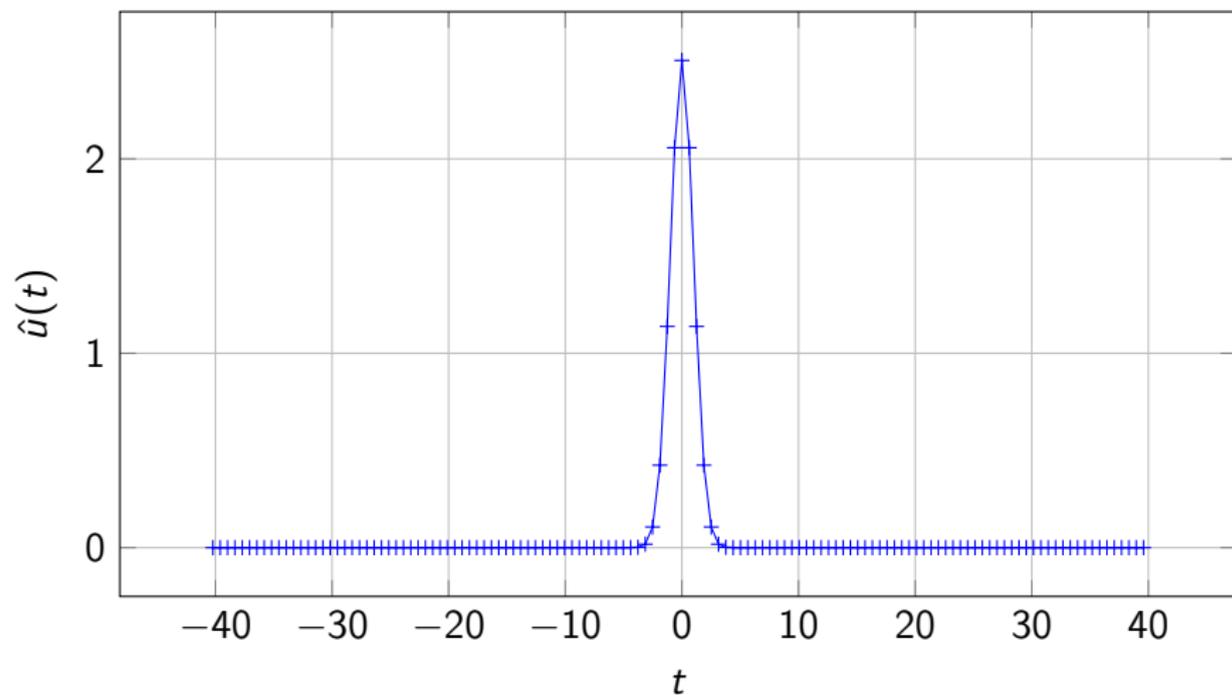
Contrainte

$$ab = 2\pi n$$

Signal d'entrée ($n = 128$)



Transformée de Fourier du signal



Définition

$$G_k(x, \alpha) = \sum_{j=0}^{n-1} x_j e^{-2i\pi jk\alpha}$$

Technique de Bluestein : $-2jk = -k^2 - j^2 + (k - j)^2$. Ainsi :

$$G_k(x, \alpha) = e^{-i\pi\alpha k^2} \sum_{j=0}^{n-1} x_j e^{-i\pi\alpha j^2} e^{i\pi\alpha(k-j)^2}$$

C'est presque une convolution circulaire !

Complexité

Ainsi, $(G_k(x, \alpha))_{0 \leq k \leq n-1}$ peut être calculé en $O(n \log(n))$ opérations par la FFT.

Calcul des $\hat{f}(x_k)$ par la transformation fractionnaire

On reprend l'expression de $\hat{f}(x_k)$ précédente :

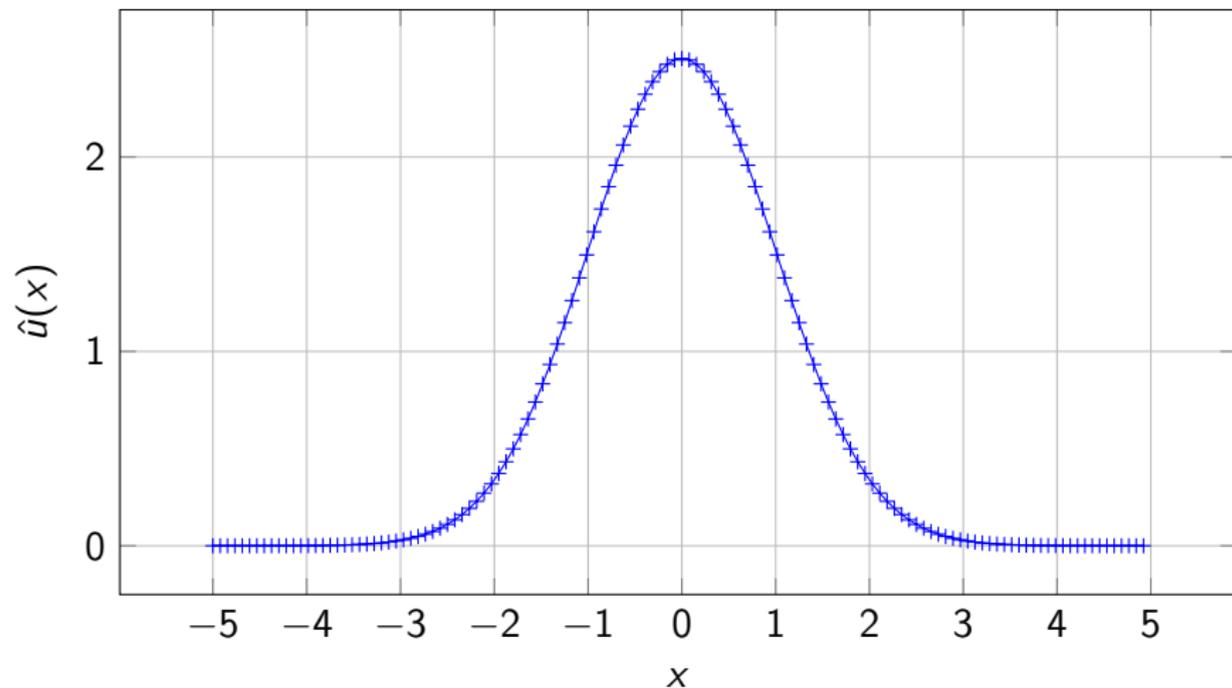
$$\begin{aligned}\hat{f}(x_k) &\approx \frac{a}{n} e^{-i\frac{ab}{4}} e^{i\frac{abk}{2n}} \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j) e^{i\frac{ab}{2n}j} e^{-i\frac{ab}{n^2}jk} \\ &\approx \frac{a}{n} e^{-i\frac{ab}{4}} e^{i\frac{abk}{2n}} \cdot G_k \left(\left(f(t_j) e^{i\frac{ab}{2n}j} \right)_{0 \leq j < n}, \frac{ab}{2\pi n^2} \right)\end{aligned}$$

On reconnaît une transformation de Fourier discrète fractionnaire !

Complexité

Ainsi, $(\hat{f}(x_k))_{0 \leq k \leq n-1}$ peut être calculé en $O(n \log(n))$ opérations par la transformation fractionnaire rapide.

Transformée de Fourier du signal



Formule d'inversion de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) e^{itx} dx$$

En reprenant le raisonnement depuis le début on obtient :

$$\begin{aligned} f(t_j) &\approx \frac{b}{2\pi n} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(x_k) e^{ix_k t_j} \\ &\approx \frac{b}{2\pi n} e^{-i\frac{b}{2} t_j} \cdot G_j \left(\left(\hat{f}(x_k) e^{-i\frac{ab}{2n} k} \right)_{0 \leq k < n}, -\frac{ab}{2\pi n^2} \right) \end{aligned}$$

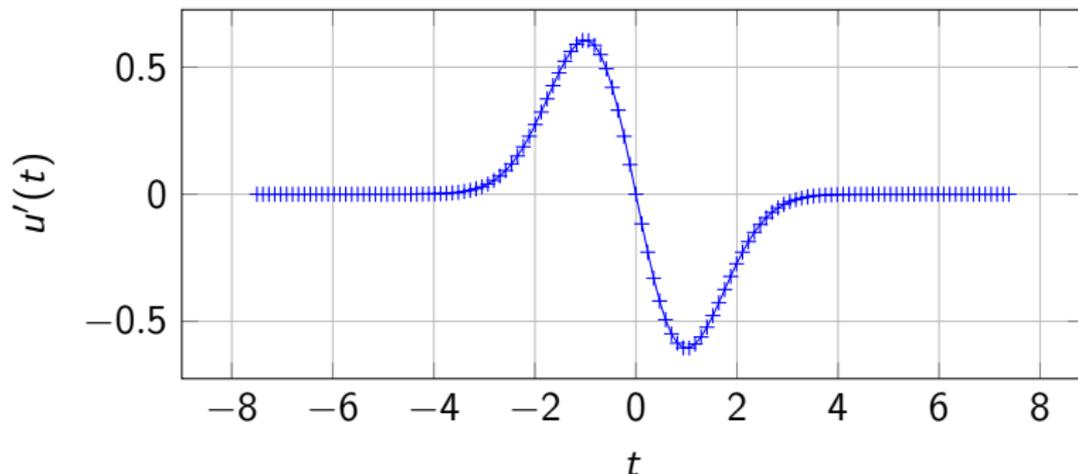
Complexité

L'inverse aussi se calcule en $O(n \log(n))$

Dérivation et transformée de Fourier

Si de plus f est continûment dérivable, $\hat{f}'(x) = ix\hat{f}(x)$

Dérivée numérique de $u : t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$



L'équation de Schrödinger non-linéaire en optique

Voici le comportement d'une fibre optique :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z}(z, t) = -i \frac{\text{sign}(\beta_2)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(z, t) + iN^2 u(z, t)|u(z, t)|^2 \\ u(0, t) = u_0(t) \end{cases}$$

Notons la ressemblance avec l'habituelle :

$$i\hbar\dot{\Psi} = \frac{-\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V\Psi$$

À la place de résoudre directement l'équation, on résout successivement les trois problèmes :

$$\frac{\partial u_1}{\partial z}(z, t) = iN^2 u_1(z, t)|u_1(z, t)|^2 \quad u_1(0, t) = u(z_k, t)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial z}(z, t) = -i \frac{\text{sign}(\beta_2)}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}(z, t) \quad u_2(z=0, t) = u_1\left(\frac{h}{2}, t\right)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial z}(z, t) = iN^2 u_3(z, t)|u_3(z, t)|^2 \quad u_3(0, t) = u_2\left(h, t\right)$$

Et finalement : $u(z_{k+1}, t) = u(z_k + h, t) = u_3\left(\frac{h}{2}, t\right)$

On traite les deux parties non linéaires par une intégration, puis approximation de l'intégrale :

$$u_1(z, t) = u(z_k, t) \cdot \exp \left(\int_0^z iN^2 |u_1(z, t)|^2 dz \right)$$

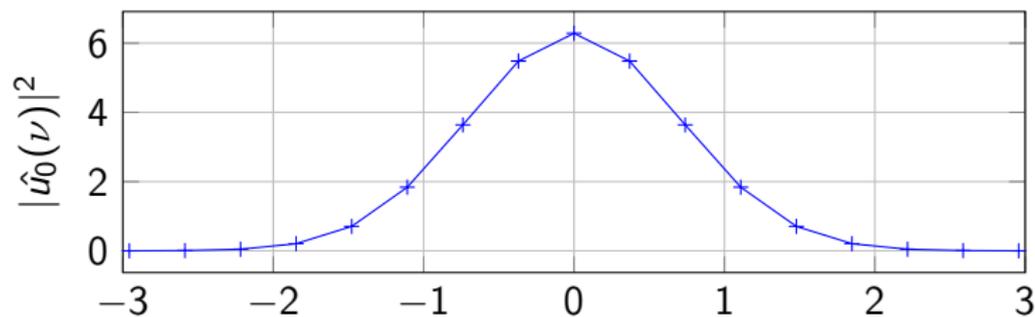
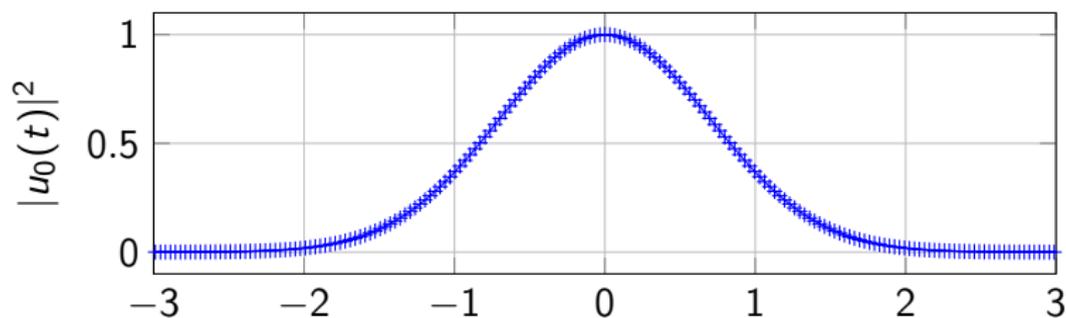
Tandis que par une transformée de Fourier de u_2 par rapport à t , l'équation linéaire devient :

$$\frac{\partial \hat{u}_2}{\partial z}(z, \nu) = -i \frac{\text{sign}(\beta_2)}{2} (i\nu)^2 \hat{u}_2(z, \nu)$$

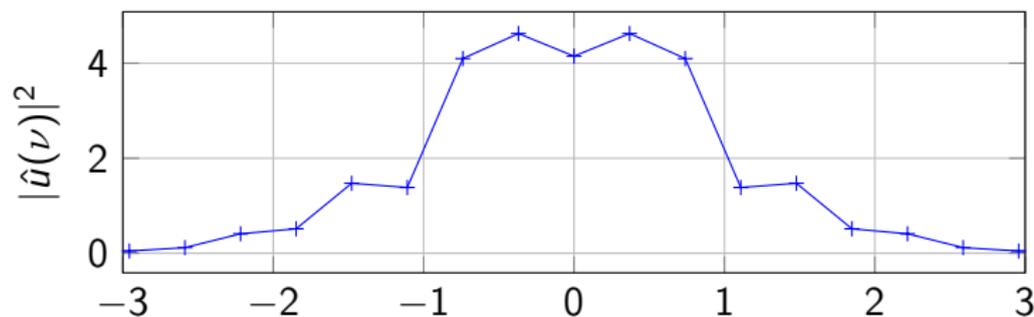
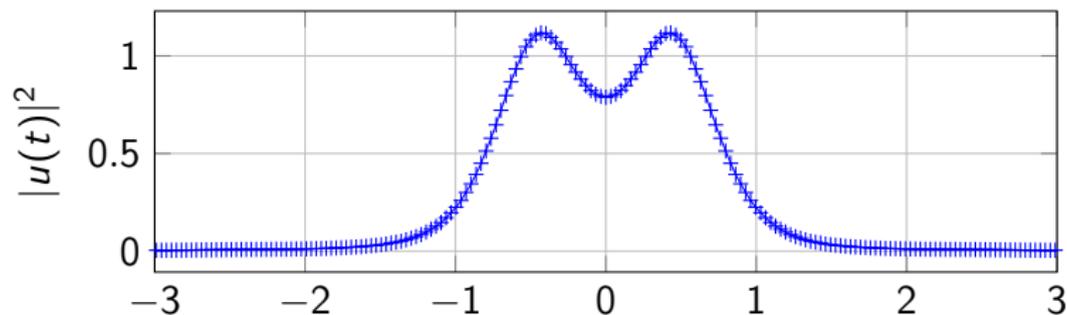
Le calcul explicite d'une solution est alors possible :

$$\hat{u}_2(h, \nu) = \hat{u}_2(z_k, \nu) \cdot e^{i \frac{\text{sign}(\beta_2)}{2} \nu^2 h}$$

Pour un signal d'entrée u_0 de la forme

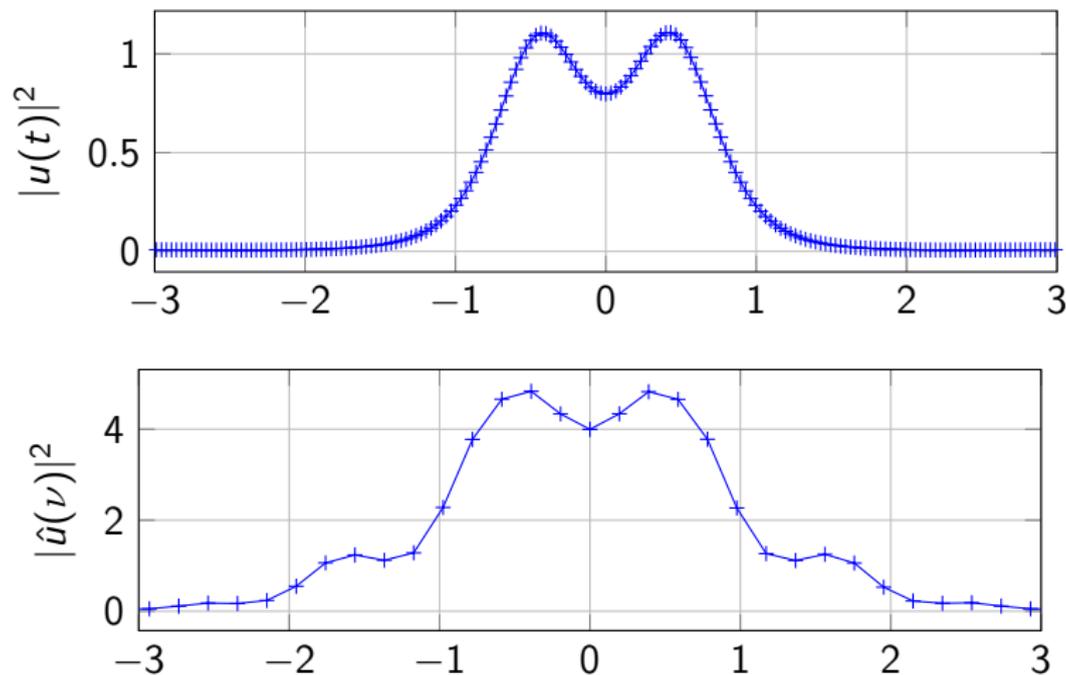


On obtient :



Résultats 3/3

La transformée de Fourier fractionnaire permet d'améliorer la précision. On prendra ici un facteur 2





Merci pour votre attention !



David H. Bailey et Paul N. Swarztrauber :
The fractional Fourier transform and applications.
SIAM Rev., 33(3):389–404, 1991.
ISSN 0036-1445.
URL <https://doi.org/10.1137/1033097>.



David H. Bailey et Paul N. Swarztrauber :
A fast method for the numerical evaluation of continuous Fourier and
Laplace transforms.
SIAM J. Sci. Comput., 15(5):1105–1110, 1994.
ISSN 1064-8275.
URL <https://doi.org/10.1137/0915067>.