Licence 3 de Mathématiques — ENS Rennes
EVNCD — 2022-2023

TD 10 : Extrema

Exercice 1. *Extrema libres 1*
Déterminer les extrema locaux, s'ils existent, de la fonction :

$$f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto x^3 + xy^2 - x^2y - y^3.$$

Exercice 2. *Extrema libres 2*
Déterminer les points critiques et leur nature de : $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto 2x^3 - 6xy + 2y^3$.

Exercice 3. *Extrema libres en fonction d'un paramètre*
Discuter, en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbf{R}$, la nature des extrema de la fonction :

$$f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto y(x^2 + y^2 - 2\lambda y).$$

Exercice 4. *Extrema liés 1*
Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$. On considère la fonction

$$f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto e^{axy}.$$

Etudier les extrema relatifs de la fonction f sur l'ensemble

$$\mathcal{S} = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^3 + y^3 + x + y = 4\big\}.$$

Exercice 5. *Extrema liés 2*
On définit l'ensemble $\mathcal{K}$ par :

$$\mathcal{K} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ 2x + 4y = 5 \quad \text{et} \quad x^2 + z^2 = 2y\}.$$

Après avoir justifié leur existence, donner les points de $\mathcal{K}$ à distance respectivement minimale et maximale de l'origine.

Exercice 6. *Plus grande valeur propre*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique. Montrer que :

$$\lambda := \max_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle,$$

est bien définie et est valeur propre de A.

Remarque : On en déduit facilement le théorème spectral.

Exercice 7. *Distance d'un hyperplan à la sphère*
Soient $\mathbf{S}^{n-1}$ la sphère unité de $\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$ et $H = \{x \in \mathbf{R}^n,\ \langle x, v\rangle = a\}$, où $v \in \mathbf{R}^n$ et $a \geq 0$ sont fixés. Déterminer la distance D de l'hyperplan affine H à $\mathbf{S}^{n-1}$ définie par :

$$D := \inf_{(x,y)\in\mathbf{S}^{n-1}\times H} |x - y|.$$

Exercice 8. *Inégalité arithmético géométrique*

1. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nombres réels strictement positifs tels que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$. On considère
$$K = \Big\{x \in (\mathbf{R}_+^*)^n, \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = 1\Big\},$$
et pour tout $x \in K$, on pose $f(x) = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$. Calculer le maximum de f sur K et en déduire l'inégalité suivante :
$$\forall x \in (\mathbf{R}_+)^n, \quad \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j} \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j.$$
Caractériser le cas d'égalité.
2. Parmi tous les parallélépipèdes rectangles de volume V donné, montrer qu'il en existe un unique dont la surface est minimale : lequel est-ce ?

Exercice 9. *Problème isopérimétrique pour les triangles*

Déterminer le triangle ayant une aire maximale parmi les triangles dont le périmètre est fixé.

Indication : On pourra utiliser librement la formule de Héron qui affirme que l'aire d'un triangle dont les côtés ont pour longueurs a, b, et c est égale à :
$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$
où p est le demi-périmètre du triangle.

Exercice 10. *Inégalité de Hadamard*

Démontrer l'inégalité suivante :
$$\forall v_1, \ldots, v_n \in \mathbf{R}^n, \quad |\det(v_1, \ldots, v_n)| \leq \prod_{j=1}^n \|v_j\|,$$
où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne, et caractériser les cas d'égalité.

Exercice 11. *Extrema libres et liés*

Soit
$$f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

1. Etudier les extrema locaux de f.
2. Etudier les extrema globaux de f sur l'ensemble :
$$\mathcal{K} := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\, x^4 + y^4 = 1\}.$$