TD 9 : Théorème de Baire et conséquences

Exercice 1. *Un peu de topologie*

Soit (E, d) un espace métrique complet et $(F_n)_n$ une suite de fermés de E telle que :

$$\bigcup_{n\geq 0} F_n = E.$$

Montrer que $\bigcup_{n\geq 0} \overset{\circ}{F_n}$ est un ouvert dense dans E.

Exercice 2. *Base algébrique et complétude*

Montrer qu'un espace vectoriel admettant une base algébrique dénombrable infinie, par exemple $\mathbf{R}[X]$, ne peut pas être muni d'une norme qui le rend complet.

Exercice 3. *Lemme de Croft*

Soit $f : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$ une fonction continue vérifiant :

$$\forall x \geq 1, \quad f(nx) \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Montrer que f converge vers 0 en $+\infty$ et donner un contre-exemple sans l'hypothèse de continuité sur f.

Exercice 4. *Nilpotence en dimension infinie*

Soit E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur continu. On suppose que pour tout $x \in E$, il existe $n_x \in \mathbf{N}$ tel que $T^{n_x}x = 0$. Montrer que T est nilpotent, i.e. qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $T^n = 0$. Montrer que ce résultat peut être faux si E n'est pas complet.

Exercice 5. *Limite simple et continuité*

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On suppose que E est complet. On considère une suite $(f_n)_n$ d'applications continues de E dans F qui converge simplement vers une application f de E dans F.

1. Pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \geq 0$, on pose

$$F_{n,\varepsilon} = \big\{x \in E : \forall p \geq n, \|f_n(x) - f_p(x)\|_F \leq \varepsilon\big\}.$$

   Montrer que $\Omega_\varepsilon = \bigcup_{n\geq 0} \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$ est un ouvert dense de E et que pour tout x_0 de Ω_ε, il existe V un voisinage de x_0 tel que

$$\forall x \in V, \quad \|f(x_0) - f(x)\|_F \leq 3\varepsilon.$$

2. En déduire que f est continue sur un sous-ensemble dense de E.
3. Que dire si on suppose de plus que les fonctions f_n sont linéaires ?
4. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une application dérivable. Que dire de l'ensemble des points de continuité de la fonction dérivée f' ?

Exercice 6. *Convergence d'opérateurs linéaires*

Soient E un espace de Banach, F un espace métrique et $(T_n)_n$ une suite de $\mathcal{L}_c(E,F)$. On suppose que la suite $(T_n)_n$ converge simplement vers une fonction $T : E \to F$.

1. Justifier que $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et que
$$\|T\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \leq \liminf_n \|T_n\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \leq \sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} < +\infty.$$
2. A-t-on nécessairement
$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \to 0\,?$$

Exercice 7. *Continuité des applications bilinéaires*

Soit E un espace de Banach et F, G deux espaces vectoriels normés. On considère une application bilinéaire $b : E \times F \to G$ telle que :

- pour tout $x \in E$, $b(x,\cdot) : y \in F \mapsto b(x,y) \in G$ est continue,
- pour tout $y \in F$, $b(\cdot,y) : x \in E \mapsto b(x,y) \in G$ est continue.

Montrer que b est une application bilinéaire continue sur $E \times F$.

Remarque : Le résultat est bien entendu faux sans l'hypothèse de bilinéarité.

Exercice 8. *Caractérisation par dualité des espaces l^p*

Soit $1 < p, q < +\infty$ deux réels conjugués i.e. tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres complexes telle que pour toute suite $(b_n)_n$ de $l^p(\mathbf{N};\mathbf{C})$, la série $\sum a_n b_n$ converge. Montrer que $(a_n)_n$ est un élément de $l^q(\mathbf{N};\mathbf{C})$.

Exercice 9. *Conséquences du théorème de Baire sur les séries de Fourier*

On note $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions complexes continues 2π-périodiques définies sur $\mathbf{R}$ que l'on munit de la norme uniforme. Pour tout $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$, on pose :
$$T_n(f) = \sum_{p=-n}^{n} c_p(f), \quad \text{où} \quad c_p(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ipt}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $T_n : \mathcal{C}^0_{2\pi} \to \mathbf{C}$ est une forme linéaire continue.
2. Exprimer T_n en fonction du noyau de Dirichlet.
3. Calculer la norme de T_n.
4. Pour $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$, a-t-on toujours convergence simple de la série de Fourier de f ?
5. La transformée de Fourier
$$\mathcal{F} : \begin{cases} (L^1(0,2\pi), \|\cdot\|_{L^1}) & \to (c_0(\mathbf{Z};\mathbf{C}), \|\cdot\|_\infty) \\ f & \mapsto (c_n(f))_n, \end{cases}$$
est-elle surjective ?

Exercice 10. *Contre-exemple au theorème d'isomorphisme de Banach*

Trouver un endomorphisme linéaire continu sur l'espace des suites à support fini $c_c(\mathbf{N})$ muni de la norme uniforme qui soit bijectif mais tel que son inverse ne soit pas continu.

Exercice 11. *Caractérisation des opérateurs injectifs et d'image fermée*

Soient E et F deux espaces de Banach, et soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ continue. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.

1. Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout x de E, $\|Tx\| \geq \alpha \|x\|$.
2. T est injective et d'image fermée.

Exercice 12. *Théorème du graphe fermé*

Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire. Montrer que T est continue si et seulement si son graphe défini par :

$$G(T) = \{(x, Tx),\, x \in E\} \subset E \times F,$$

est fermé dans $E \times F$ (pour la topologie produit).

Indication : On pourra introduire la norme du graphe sur E définie par $\|x\|_G := \|x\|_E + \|Tx\|_F$.

Exercice 13. *Continuité des opérateurs symétriques*

Soit H un espace de Hilbert et $A : H \to H$ un opérateur linéaire symétrique i.e.

$$\forall x, y \in H,\, \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle.$$

Montrer que A est continu.

Exercice 14. *Sous-espaces vectoriels fermés et réguliers de $\mathcal{C}^0([0,1])$*

On considère, dans l'espace $E = \mathcal{C}^0([0,1])$ muni de la norme uniforme, un sous-espace vectoriel fermé F qu'on suppose inclus dans $\mathcal{C}^1([0,1])$.

1. Montrer que la dérivation sur F :

   $$T : \left\{ \begin{array}{ll} F & \to E \\ f & \mapsto f', \end{array} \right.$$

   est continue.
2. Montrer que la boule unité fermée de $(F, \|\cdot\|_\infty)$ est équicontinue.
3. En déduire que F est de dimension finie.

Remarque : Le résultat reste vrai en supposant seulement que F ne contient que des fonctions dérivables (cf poly du cours).