Lemme de Morse

Référence : F. Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel* – `http://www.unige.ch/~alaurent/Agregation/Liste_DVP/Lemme_Morse.pdf`

Leçons : 158, 170, 171, 214, 215.

Théorème 1 (*Lemme de Morse*)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$. On suppose également que $df_0 = 0$ et que la Hessienne $d^2 f_0$ est non dégénérée (ie. inversible) et de signature $(p, n-p)$. Alors il existe ϕ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux voisinages V_0 et $W_0 = \phi(V_0)$ de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\phi(0) = 0$ et :

$$\forall x \in V_0,\ f(x) - f(0) = \phi_1(x)^2 + \cdots + \phi_p(x)^2 - \phi_{p+1}(x)^2 - \cdots - \phi_n(x)^2.$$

Pour démontrer ce résultat, nous allons avoir besoin d'un lemme.

Lemme 2

On se donne $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et inversible. Alors il existe V un voisinage de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $\rho \in \mathcal{C}^1(V, GL_n(\mathbb{R}))$ telle que :

$$\forall A \in V, \quad A = {}^t(\rho(A)) A_0 \rho(A).$$

Démonstration : On considère l'application :

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto {}^t M A_0 M \end{cases}.$$

Il s'agit d'une application de classe $\mathcal{C}^1$ car les coordonnées à l'arrivée sont polynômiales en celles de M. Calculons la différentielle de f en I_n. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$f(I_n + H) \underset{H \to 0}{=} A_0 + {}^t H A_0 + A_0 H + o(\|H\|),$$

puisque A_0 est symétrique. Ainsi :

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad df_{I_n}.H = {}^t H A_0 + A_0 H.$$

On en déduit que $\ker df_{I_n} = A_0^{-1}\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, qui est de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. On considère un supplémentaire F de $\ker df_{I_n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et ψ la restriction de f à F. Puisque $I_n \in F$, la différentielle de ψ en I_n est la restriction à F de la différentielle de f en I_n.

Par choix de F, $d\psi_{I_n}$ est injective et donc inversible par le théorème du rang (puisque la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est égale à la dimension de F). Le théorème d'inversion locale assure qu'il existe U un voisinage de I_n dans F, qu'on peut supposer inclus dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ puisque I_n est inversible et que

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert, et V un voisinage de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tels que ψ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V. L'application $\rho := \psi^{-1}$ convient puisqu'on a alors :

$$\forall A \in V, \quad A = \psi(\rho(A)) = {}^t(\rho(A))A_0\rho(A).$$

□

On peut maintenant passer à la preuve du lemme de Morse.

Démonstration : Quitte à restreindre U, on peut supposer que U est une boule ouverte centrée en 0. On peut ainsi utiliser la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 (ce qui est possible puisque les boules sont convexes). Ainsi pour tout $x \in U$:

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 (1-t)\, {}^t x \, \mathrm{Hess} f(tx)\, x \, dt,$$

puisque 0 est un point critique de f. En posant $Q(x) := \displaystyle\int_0^1 (1-t)\, \mathrm{Hess} f(tx)\, dt \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\forall x \in U, \quad f(x) - f(0) = {}^t x \, Q(x)\, x.$$

De plus Q est de classe $\mathcal{C}^1$ d'après le théorème de régularité sous l'intégrale, qui s'applique puisque f est supposée $\mathcal{C}^3$. Or un calcul direct donne $Q(0) = \frac{1}{2}\mathrm{Hess} f(0)$ qui est inversible et de signature $(p, n-p)$ par hypothèse. Le lemme précédent assure alors qu'il existe V un voisinage de $Q(0)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $\rho \in \mathcal{C}^1(V, \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$ tels que :

$$\forall A \in V, \quad A = {}^t(\rho(A))\, Q(0)\, \rho(A).$$

La continuité de Q et le fait qu'elle soit à valeurs $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ assure qu'il existe un voisinage W de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $Q(W) \subset V$. Il s'ensuit que :

$$\forall x \in W, \quad f(x) - f(0) = {}^t(\rho(Q(x))x)\, Q(0)\, \rho(Q(x))x.$$

Le théorème d'inertie de Sylvester assure qu'il existe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $Q(0) = {}^t A\, \Delta_{p,n-p}\, A$, où :

$$\Delta_{p,n-p} := \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}.$$

Si on pose $\phi : x \in W \mapsto A\rho(Q(x))x \in \mathbb{R}^n$, on définit une application de classe $\mathcal{C}^1$ par composition de telles applications. De plus on a :

$$\forall x \in W, \quad f(x) - f(0) = {}^t(\phi(x))\, \Delta_{p,n-p}\, \phi(x) \quad (*).$$

Calculons la différentielle de ϕ en 0. Si $h \in W$:

$$\phi(h) \underset{h \to 0}{=} A\rho(Q(h))h = A\rho(Q(0))h + o(\|h\|).$$

Ainsi la jacobienne de ϕ en 0 est la matrice $A\rho(Q(0)) = A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Le théorème d'inversion locale assure que ϕ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux ouverts V_0 et $\phi(V_0)$ voisinages de 0. De plus l'égalité $(*)$ assure que :

$$\forall x \in V_0, \; f(x) - f(0) = \phi_1(x)^2 + \cdots + \phi_p(x)^2 - \phi_{p+1}(x)^2 - \cdots - \phi_n(x)^2.$$

□

Remarque 3. *On trouvera une belle application sur la stabilité des systèmes Hamiltoniens dans le livre de J. Bernis et L. Bernis : Analyse pour l'agrégation de mathématiques.*