Équations Différentielles

CC numéro 1, le 28/01/2025. Durée 0h30

Questions de cours

Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$, $g : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ continues et $\lambda \geq 0$ et telles que

$$f(t) \leq \lambda + \int_0^t g(s)f(s)\mathrm{d}s,$$

pour tout $t \in [0,+\infty[$.

1 Quelle majoration de f nous donne le Lemme de Grönwall sur $[0,+\infty[$?

2 Donner la démonstration de ce résultat.

Exercice 1 :

Soient $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a(x) \geq 1$.

1 On suppose ici que la limite en $+\infty$ de b est égale à 0. Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}$ de $y' + ay = b$ admet la limite 0 en $+\infty$.

2 On suppose ici que la limite en $-\infty$ de b est égale à 0. Montrer qu'il existe une solution et une seule sur $\mathbb{R}$ de $y' + ay = b$ qui admette la limite 0 en $-\infty$.

Exercice 2 : Retour sur le Lemme de Grönwall.

Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$, $g : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$, continues, $\lambda \geq 0$ et $\alpha \in]0,1[$ telles que

$$f(t) \leq \lambda + \int_0^t (t-s)^{-\alpha} g(s)f(s))\mathrm{d}s,$$

pour tout $t \in [0,+\infty[$.

Soit $q > 1$ tel que $\alpha q < 1$ et p tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On admet que pour $a, b \in [0,+\infty[$, $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$.

1 Soit $T > 0$. Montrer que pour tout $t \in [0,T]$,

$$f^p(t) \leq 2^{p-1}\lambda^p + K \int_0^t g^p(s)f^p(s)\mathrm{d}s,$$

où $K = 2^{p-1}\left((1-\alpha q)^{-1}T^{1-\alpha q}\right)^{\frac{p}{q}}$.

2 Quelle majoration de f^p donne le Lemme de Grönwall sur $[0,T]$?