Solution des questions de cours

1. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on définit $\exp(A)$ par : $\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$. On rappelle que cette série est absolument convergente : pour une norme sous-multiplicative $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left\| \frac{A^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^n}{n!} = e^{\|A\|} < \infty.$$

   L'espace étant complet (car de dimension finie), la série est convergente.

2. Le théorème de Cauchy-Lipschitz est le suivant : si $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est globalement lipschitzienne, $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$, alors le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X'(t) & = & F(X(t)) \\ X(t_0) & = & x_0 \end{cases}$$

   admet une unique solution globale. Pour la preuve, on applique le théorème de point fixe de Banach à la formulation intégrale de l'équation différentielle. Plus précisement, on considère I un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et on montre que :

$$\theta : \begin{bmatrix} (\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty) & \to & (\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty) \\ x & \mapsto & \left(t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} F(x(s))\mathrm{d}s \right) \end{bmatrix}$$

   est bien définie, d'une espace complet dans lui-même, et admet un itéré contractant. Pour cela, on démontre l'inégalité suivante :

$$\forall x, y \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}),\ \forall t \in I,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \ \left\| \theta^k(x)(t) - \theta^k(y)(t) \right\| \leq \frac{L^k |t - t_0|^k}{k!} \|x - y\|_\infty,$$

   où L est la constante de lipschitziannité de F. On conclut en recollant les solutions. On peut aussi raisonner en effectuant un changement de norme.

Solution de l'exercice 1

1. L'application

$$f : \begin{bmatrix} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (t, (x, y)) & \mapsto & (x^3 - 4y^3, 4x^3 - 3x^2 y) \end{bmatrix}$$

   est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi, elle est continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Le théorème de Cauchy-Lipschitz conclut donc à l'existence d'une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert I, contenant 0.

2. Remarquons que, $\forall t \in I$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(x(t), y(t)) = 4x'(t)x^3(t) - 3x^2(t)x'(t)y(t) - x^3(t)y'(t) + 4y^3(t)y'(t).$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(x(t), y(t)) = \underbrace{\left(4x^3(t) - 3x^2(t)y(t)\right)}_{=y'(t)} x'(t) + \underbrace{\left(4y^3(t) - x^3(t)\right)}_{=-x'(t)} y'(t) = 0.$$

3. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$H(x, y) \geq \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{4}y^4 \Leftrightarrow 3x^4 + y^4 \geq 4x^3 y.$$

   Soit $x \in \mathbb{R}$, on définit : $f_x : y \in \mathbb{R} \mapsto 3x^4 + y^4 - 4x^3 y \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f_x'(y) = 4(y^3 - x^3).$$

   Ainsi, f_x admet un minimum global en x, qui vaut 0. Par suite, l'inégalité est vraie.

4. On remarque que la solution (x, y) évolue dans les lignes de niveaux de H. Puisque H est continue et coercive (voir question précédente), ces dernières sont compactes (**à redémontrer**). Les solutions sont donc bornées, elles ne peuvent donc pas exploser en temps fini. Par le théorème de sortie de tout compact, on obtient la globalité des solutions.

   Remarque : on peut ici démontrer ce résultat à la main de la façon suivante : pour tout $t \in I$,

$$\|(x,y)(t)\|_2^4 = (x^2(t)+y^2(t))^2 \leq 2\left(x^4(t)+y^4(t)\right) \leq 8\left(\frac{1}{4}x^4(t)+\frac{3}{4}y^4(t)\right) \leq 8H(x(t),y(t)).$$

   Or, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in I$, $H(x(t), y(t)) = \dfrac{K^4}{8}$. Ainsi, pour tout $t \in I$,

$$\|(x,y)(t)\|_2 \leq K,$$

   en on conclut de la même manière.

Solution de l'exercice 2

1. On résout chacune des équations du système linéaire. On a directement : $x(t) = x_0e^t$ et $z(t) = z_0e^{2t}$. Enfin, y est solution de l'équation différentielle $y' - 2y = z_0e^{2t}$. Ainsi, $y(t) = y_0e^{2t} + s_p(t)$, où s_p est une solution particulière s'annulant en 0. Par méthode de variation de la constante, on obtient directement : $s_p(t) = z_0te^{2t}$ convient. Alors,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}}_{=e^{tA}} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

2. La formule de Duhamel fournit :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{(t-s)A}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}s.$$

   i.e.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ (t-s)e^{2(t-s)} \\ e^{2(t-s)} \end{pmatrix} \mathrm{d}s.$$

   Après calculs (IPP), on obtient, en ajustant les constantes :

$$\mathcal{S} = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto e^te_1, t \mapsto e^{2t}e_2, t \mapsto (te_2+e_3)e^{2t}\right) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/4 \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 3

On remarque que pour $I =]-\infty, -1[$, $I =]-1, 1[$, où $I =]1, +\infty[$, on peut mettre l'équation sous forme résolue de la façon suivante :

$$(1-x^2)y' - 2xy = x^2 \Leftrightarrow y' - \frac{2x}{1-x^2}y = \frac{x^2}{1-x^2} : (E)$$

Ainsi, il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients continus, donc la solution est un espace affine de dimension 1 (théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire). Une base de solution de l'équation homogène est donnée par : $\mathrm{Vect}\left(x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}\right)$. On utilise la méthode de variation de la constante afin de déterminer une solution particulière, on cherche une solution sous la forme $y_p(x) = \dfrac{C(x)}{1-x^2}$. Alors,

$$y_p \text{ vérifie } (E) \text{ sur } I \Leftrightarrow C'(x) = x^2.$$

Ainsi,

$$\mathcal{S}_I = \left\{ x \mapsto \frac{C}{1-x^2} + \frac{x^3}{3(1-x^2)},\ C \in \mathbb{R} \right\}.$$

On raisonne par analyse synthèse. Analyse: on suppose donnée une solution y de (E) sur $]-1,+\infty[$. Alors, $y_{|]-1,1[} \in \mathcal{S}_{]-1,1[}$ et $y_{|]1,+\infty[} \in \mathcal{S}_{]1,+\infty[}$. Alors, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{aligned} \forall x \in]1,+\infty[, \quad y(x) &= \frac{\alpha + x^3/3}{1-x^2} \\ \forall x \in]-1,1[, \quad y(x) &= \frac{\beta + x^3/3}{1-x^2} \end{aligned}.$$

On remarque que si $\alpha \neq -\frac{1}{3}$, alors $\lim\limits_{x\to 1^+} |y(x)| = +\infty$. De même, si $\beta \neq -\frac{1}{3}$, alors $\lim\limits_{x\to 1^-} |y(x)| = +\infty$. Nécessairement $\alpha = \beta = -\frac{1}{3}$. Dans ce cas,

$$\forall x \in]-1,+\infty[\setminus \{1\},\ y(x) = \frac{x^3-1}{3(1-x^2)} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{3(1-x)(x+1)} = -\frac{x^2+x+1}{3(x+1)},$$

qui est $\mathcal{C}^\infty$ en 1.

Synthèse : l'application $x \mapsto -\dfrac{x^2+x+1}{3(x+1)} \in \mathcal{C}^1(]-1,+\infty[,\mathbb{R})$ et est clairement solution de (E) sur $]-1,1[$ et sur $]1,+\infty[$ par construction. Enfin, (E) donne en $x=1$, $y(1) = -\frac{1}{2}$, ce qui est le cas. Ainsi,

$$\mathcal{S}_{]-1,+\infty[} = \left\{ x \mapsto -\frac{x^2+x+1}{3(x+1)} \right\}.$$

Si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors, $y_{|]-1,+\infty[} \in \mathcal{S}_{]-1,+\infty[}$, donc, $\forall x \in]-1,+\infty[$, $y(x) = -\dfrac{x^2+x+1}{3(x+1)}$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to -1^+} |y(x)| = +\infty$. Ceci est impossible. L'équation n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 4

1. Une telle solution existe et est globale puisque c'est un système linéaire à coefficients continus. On note $u : t \in \mathbb{R} \mapsto \|X(t)\|^2$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

   $$u'(t) = 2(X(t), X'(t)) = 2(X(t), A(t)X(t)) \leq -2\kappa u(t).$$

   Ainsi, pour tout t réel,

   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(u(t)e^{2\kappa t}\right) \leq 0.$$

   Par suite, pour tout $t \geq t_0$,

   $$u(t)e^{2\kappa t} \leq u(t_0)e^{2\kappa t_0}.$$

   Ceci donne le résultat attendu.

2. On sait que, pour tout $t \geq s$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

   $$X(t;x,s) = U(t,s)x,$$

   Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on obtient par la question 1,

   $$\|U(t,s)x\| = \|X(t;x,s)\| \leq e^{-\kappa(t-s)}\|x\|.$$

   Alors,

   $$\|U(t,s)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)} \leq e^{-\kappa(t-s)}.$$

3. Il s'agit d'un système linéaire à coefficients continus, donc les théorèmes de cours assurent que l'équation admet une unique solution globale (on peut montrer que la fonction est localement lipschitzienne donc, on obtient l'existence d'une unique solution maximale. Enfin, elle est globale car la fonction qui définit l'équation différentielle est au plus linéaire (corollaire du lemme de Grönwall)).

4. La formule de variation de la constante (ou de Duhamel) est la suivante :

$$X(t;x,t_0) = U(t,t_0)x + \int_{t_0}^{t} U(t,s)b(s)\mathrm{d}s.$$

5. Pour tout t positif, on a :

$$\|X(t)\| = \left\| U(t,0)x + \int_0^t U(t,s)b(s)\mathrm{d}s \right\|.$$

   Ainsi,

$$\|X(t)\| \leq e^{-\kappa t}\|x\| + M\int_0^t e^{-\kappa(t-s)}\mathrm{d}s.$$

   D'où,

$$\|X(t)\| \leq e^{-\kappa t}\|x\| + \frac{M}{\kappa}e^{-\kappa t}\left[e^{\kappa s}\right]_0^t \leq e^{-\kappa t}\|x\| + \frac{M}{\kappa}.$$

6. On remarque que pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $s \in]-\infty, t]$, on a :

$$\|U(t,s)b(s)\| \leq \|b\|_{\infty}^{\mathbb{R}} e^{-\kappa(t-s)} = o_{-\infty}\left(\frac{1}{s^2}\right).$$

   La norme infinie de b est bien finie puisque b est continue et périodique. L'intégrande est donc intégrable en $-\infty$ et est continue, donc X est bien définie. Montrons que X est périodique.

   Soit $s \in \mathbb{R}$, on définit, pour $t \in \mathbb{R}$, $Y_s(t) = U(t+T, s+T)$. Alors,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ Y_s'(t) = A(t)U(t+T,s+T) = A(t)Y_s(t).$$

   De plus,

$$Y_s(s) = U(s+T,s+T) = I_d.$$

   Par unicité, on obtient $Y_s = U(\cdot, s)$. Alors,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X(t+T) = \int_{-\infty}^{t+T} U(t+T,s)b(s)\mathrm{d}s \underset{u=s-T}{=} \int_{-\infty}^{t} U(t+T,u+T)b(u+T)\mathrm{d}u.$$

   Par la propriété démontrée précédemment, et par T-périodicité de b, on conclut ; $X(t+T) = X(t)$. Enfin, vérifions que c'est bien une solution. Afin de dérivier, on introduit le point 0 grâce à l'identité de la résolvante. Plus précisement,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = U(t,0)\int_{-\infty}^{t} U(0,s)b(s)\mathrm{d}s.$$

   Alors,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = A(t)U(t,0)\int_{-\infty}^{t} U(0,s)b(s)\mathrm{d}s + U(t,0)U(0,t)b(t) = A(t)X(t) + b(t).$$

7. Soit $x \in \ker(A)$. Alors, $Ax = 0$, donc $0 \leq -\kappa\|x\|^2$, donc $x = 0$ et A est inversible. Remarquons que : $\displaystyle\int_0^t e^{A(t-s)} = e^{tA}\int_0^t e^{-As}\mathrm{d}s = e^{tA}(-A^{-1})\left[e^{-As}\right]_0^t$. Puisque $e^A \in \mathbb{R}[A]$, et $A^{-1} \in \mathbb{R}[A]$ (théorème de Cayley-Hamilton), les deux quantités commutent, et :

$$\int_0^t e^{A(t-s)}\mathrm{d}s = -A^{-1}\left(I_d - e^{tA}\right).$$

Ainsi,

$$\left\| \int_0^t e^{A(t-s)} \mathrm{d}s + A^{-1} \right\| \leq \left\| A^{-1} \right\| \left\| e^{tA} \right\|.$$

Remarquons enfin que puisque A ne dépend pas du temps, on obtient par (2) : $\left\| e^{tA} \right\| = \|U(t,0)\| \leq e^{-\kappa t}$. Ceci conclut.

Toute solution s'écrit : $X(t) = e^{tA} x_0 + \displaystyle\int_0^t e^{(t-s)A} b(s) \mathrm{d}s$. Le premier terme temps vers 0, par l'inégalité précédente. Pour le second, on remarque :

$$\left\| \int_0^t e^{(t-s)A} b(s) \mathrm{d}s + A^{-1} b_\infty \right\| \leq \underbrace{\left\| \int_0^t e^{(t-s)A} (b(s) - b_\infty) \mathrm{d}s \right\|}_{=:\alpha} + \underbrace{\left\| \int_0^t e^{(t-s)A} b_\infty \mathrm{d}s + A^{-1} b_\infty \right\|}_{=:\beta}.$$

On a, par ce qui a été fait avant, $\beta = \left\| \left(\displaystyle\int_0^t e^{(t-s)A} \mathrm{d}s + A^{-1} \right) b_\infty \right\| \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Enfin, à l'aide du changement de variables $u = t - s$, $\alpha = \left\| \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,t]}(u) e^{uA} (b(t-u) - b_\infty) \mathrm{d}u \right\|$.

On applique le théorème de convergence dominée : l'intégrande converge vers 0 par définition de la limite. Enfin, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\forall u \in [0,t]$,

$$\left| \mathbb{1}_{[0,t]}(u) e^{uA} (b(t-u) - b_\infty) \right| \leq 2 e^{-\kappa u} \|b\|_\infty^{\mathbb{R}^+} \in L^1(\mathbb{R}^+).$$

La norme infinie de b est bien finie sur $\mathbb{R}^+$ car b est continue et admet une limite finie. Ceci conclut.