L3 Mathématiques
ENS Rennes

Équations Différentielles
2022 – 2023

Contrôle continu 2
Durée : 2h

L'usage des documents, calculatrices et téléphones portables n'est pas autorisé.

Questions de cours

1. Donner la définition de l'exponentielle d'une matrice à partir d'une série en rappelant pourquoi cette dernière converge.
2. Énoncer le théorème de Cauchy Lipschitz dans le cas d'une équation différentielle:

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = F(X(t)), \\ \\ X(0) = x, \end{cases}$$

où $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est globalement lipschitzienne. Donner les grandes lignes de la preuve.

Exercice 1

On considère l'équation différentielle dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x' = x^3 - 4y^3, \\ y' = 4x^3 - 3x^2y, \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

1. Montrer que, pour toute donnée initiale (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$, il existe une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert I contenant 0.
2. Soit la fonction $H : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^4 - x^3y + y^4 \in \mathbb{R}$ et $(x(t), y(t))$ une solution. Calculer $\dfrac{d}{dt}H(x(t), y(t))$.
3. Montrer que pour tout (x, y) dans $\mathbb{R}^2$, $H(x, y) \geq \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{4}y^4$.
   (*On pourra utiliser en le justifiant que pour tout* $a \in \mathbb{R}$, $4a^3 \leq 1 + 3a^4$).
4. Montrer que toutes les solutions sont globales.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Déterminer une base de solutions du système $X' = AX$ et en déduire e^{At} pour $t \in \mathbb{R}$.

2. Déterminer l'ensemble des solutions au système $X' = AX + v$ où $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Déterminer les solutions de $(1-x^2)y' - 2xy = x^2$ sur $]-1, +\infty[$.
Existe-t-il une solution sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4

Soit $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ une application continue, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ continu. On suppose qu'il existe $\kappa > 0$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^d$:

$$(A(t)x, x) \leq -\kappa \|x\|^2, \tag{1}$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne et $(\cdot, \cdot)$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^d$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^d$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Soit X une solution de

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t), \\ \\ X(t_0) = x. \end{cases} \tag{2}$$

   Montrer que pour tout $t \geq t_0$: $\|X(t)\| \leq e^{-\kappa(t-t_0)}\|x\|$.

2. On note $(U(t,s))_{t,s\in\mathbb{R}}$ la résolvante associée à (2). Déduire de la question précédente que pour $t \geq s$:

$$\|U(t,s)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)} \leq e^{-\kappa(t-s)}.$$

   On a noté $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)}$ la norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|$.

3. Expliquer pourquoi les solutions maximales de l'équation différentielle :

$$X'(t) = A(t)X(t) + b(t), t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

   existent et sont globales.

4. Écrire la formule de la variation de la constante pour l'équation ci-dessus.

5. On suppose que $t_0 = 0$ et b bornée sur $\mathbb{R}^+$: $\|b(t)\| \leq M$ pour tout $t \geq 0$. Montrer que toutes les solutions de (3) sont bornées sur $\mathbb{R}^+$. Plus précisément, montrer que pour tout $t \geq 0$,

$$\|X(t)\| \leq e^{-\kappa t}\|x\| + \frac{M}{\kappa}.$$

6. Montrer que si A et b sont périodiques de période T, $X(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} U(t,s)b(s)ds$ est une solution de (3) et que celle-ci est périodique, de période T.

7. On suppose maintenant que $A(t) = A$ ne dépend pas de t, et vérifie toujours (1). Montrer que A est inversible.

   Montrer que si $b(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} b_\infty$, alors toutes les solutions convergent vers $-A^{-1}b_\infty$.

   (*On pourra utiliser, en le justifiant, que* $\displaystyle\int_0^t e^{A(t-s)}ds \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -A^{-1}$).