Solution des questions de cours

1. Une fonction $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est dite localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable si pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^d$, il existe un voisinage V_{t_0,x_0} de (t_0, x_0) dans $I \times \mathbb{R}^d$ et $L(t_0, x_0) > 0$ tels que, pour tous $(t, x), (t, y) \in V_{t_0,x_0}$, on a
$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L(t_0,x_0)\,\|x-y\|,$$
où $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^d$. Puisque l'on travaille en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et le choix de la norme n'influence en rien le caractère localement lipschitzien de f.

2. Pour $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, on définit l'exponentielle de A par
$$e^A := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$
Montrons que cette série est bien définie : puisque $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et la convergence ne dépend pas de la norme. On travaille alors avec une norme $\|\cdot\|$ sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Alors,
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \left\|A^k\right\| \leq \|A\|^k.$$
Ainsi,
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left\|\frac{A^k}{k!}\right\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|} < +\infty.$$
Par suite, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$ est absolument convergente. Puisque $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel de dimension finie, il est complet. Alors, toute série absolument convergente est convergente. Ceci justifie la convergence de la série exponentielle.

3. On rappelle que l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de l'équation différentielle linéaire homogène à coefficients continus $x' = A(t)x$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ de dimension d. On appelle alors système fondamental une base de $\mathcal{S}$. On appelle matrice fondamentale toute application $M : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ dont les colonnes forment un système fondamental, *i.e.* une base de l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de l'équation homogène. Enfin, la résolvante associée à l'équation $x' = A(t)x$ est l'unique application $U : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ vérifiant : pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, $U(\cdot, t_0)$ est l'unique solution de l'équation différentielle suivante
$$\begin{cases} X'(t) &= A(t)X(t) \\ X(t_0) &= I_d \end{cases}.$$

Solution de l'exercice 1

1. Remarquons que $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^2 = -9I_2$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$B^{2n} = \left(B^2\right)^n = (-9I_2)^n = (-9)^n I_2, \qquad B^{2n+1} = B^{2n}B = (-9)^n B.$$
Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par sommation par paquets, on obtient
$$\begin{aligned} e^{tB} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tB)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tB)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(3t)^{2n}}{(2n)!} I_2 + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(3t)^{2n+1}}{(2n+1)!} B \\ &= \cos(3t)I_2 + \frac{1}{3}\sin(3t)B \\ &= \begin{pmatrix} \cos(3t) & -\sin(3t) \\ \sin(3t) & \cos(3t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. On remarque que $A = -4I_2 + B$. De plus, les matrices $-4I_2$ et B commutent. Ainsi, par propriété de l'exponentielle matricielle, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{tA} = e^{-4tI_2 + Bt} = e^{-4tI_2} e^{Bt} = e^{-4t} e^{tB} = e^{-4t} \begin{pmatrix} \cos(3t) & -\sin(3t) \\ \sin(3t) & \cos(3t) \end{pmatrix},$$

en utilisant le résultat obtenu à la question précédente.

3. Par la formule de Duhamel, toute solution x de $x' = Ax$ vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = e^{tA} x(0).$$

Cette formule est valable puisque l'équation linéaire est à coefficients constants. Alors on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\|x(t)\|_2 \leq |||e^{tA}|||_2 \, \|x(0)\|_2 \leq e^{-4t} |||e^{tB}|||_2 \, \|x(0)\|_2 \, .$$

On travaille ici avec la norme $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^2$. En effet, comme toutes les normes sont équivalentes (on travaille en dimension finie), la convergence ne dépend pas de la norme et on peut choisir la norme avec laquelle on montre le résultat. Il suffit de remarquer que $e^{tB} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ est une matrice de rotation pour obtenir, pour tout t réel,

$$\|x(t)\|_2 \leq e^{-4t} \|x(0)\|_2 \, .$$

En faisant tendre t vers $+\infty$, on obtient le résultat attendu.

Solution de l'exercice 2

1. Soit Y une solution de (1) sur $\mathbb{R}$. On définit $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \|Y(t)\|^2$. Cette application est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de telles fonctions et pour tout réel t,

$$f'(t) = \langle Y'(t), Y(t) \rangle + \langle Y(t), Y'(t) \rangle.$$

Puisque Y est solution de (1), on obtient pour tout réel t,

$$f'(t) = \langle A(t)Y(t), Y(t) \rangle + \langle Y(t), A(t)Y(t) \rangle.$$

Par définition du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^d$, on obtient pour tout réel t,

$$f'(t) = Y(t)^T A(t)^T Y(t) + Y(t)^T A(t) Y(t) = Y(t)^T \left(A(t) + A(t)^T \right) Y(t).$$

Or pour tout réel t, $-\left(A(t) + A(t)^T\right) \in \mathcal{S}_d^+(\mathbb{R})$, donc, pour tout $X \in \mathbb{R}^d$,

$$X^T \left(- \left(A(t) + A(t)^T \right) \right) X \geq 0.$$

Alors, on obtient, pour tout réel t,

$$f'(t) = -Y(t)^T \left(- \left(A(t) + A(t)^T \right) \right) Y(t) \leq 0.$$

Par suite f est décroissante sur $\mathbb{R}$. Puisque f est une fonction à valeurs positives, le théorème de convergence monotone assure que f converge en $+\infty$. En utilisant la positivité de f et la continuité de $\sqrt{}$ sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit que $t \mapsto \|Y(t)\|$ converge en $+\infty$.

2. Soient Y_1 et Y_2 deux solutions de (1) sur $\mathbb{R}$. On utilise les identités de polarisation pour obtenir

$$\langle Y_1(t), Y_2(t) \rangle = \frac{1}{4} \left(\|(Y_1 + Y_2)(t)\|^2 - \|(Y_1 - Y_2)(t)\|^2 \right).$$

Puisque l'équation (1) est linéaire et homogène, $Y_1 \pm Y_2$ est solution de (1) sur $\mathbb{R}$. On applique alors la question 1 pour en déduire que $\langle Y_1, Y_2 \rangle$ converge en $+\infty$, comme combinaison linéaire de telles fonctions.

3. On note $R(t) = (r_{i,j}(t))_{1 \leq i,j \leq d}$. On rappelle que R est une matrice fondamentale. Par définition, les colonnes de R, $\left(Y_j := (r_{i,j})_{1 \leq i \leq d}\right)_{1 \leq j \leq d}$, forment une base de l'ensemble des solutions de (1) (l'équation est homogène). D'une part, par définition du produit matriciel, on a, pour tout réel t, pour tous $i, j \in \{1, \cdots, d\}$,
$$(M(t))_{i,j} = \sum_{k=1}^{d} r_{k,i}(t) r_{k,j}(t).$$
D'autre part, remarquons que pour tout réel t, pour tous $i, j \in \{1, \cdots, d\}$,
$$\langle Y_i(t), Y_j(t) \rangle = \sum_{k=1}^{d} r_{k,i}(t) r_{k,j}(t) = (M(t))_{i,j}\,.$$
Par la question 2, ces quantités convergent en $+\infty$. Ainsi, $t \mapsto M(t)$ converge en $+\infty$ puisque c'est le cas pour chacun de ces coefficients.

4. Soient $X \in \mathbb{R}^d$ et $t \in \mathbb{R}$. Alors,
$$\|R(t)X\|^2 = \langle R(t)X, R(t)X \rangle = X^T R(t)^T R(t) X = X^T M(t) X = \langle X, M(t)X \rangle.$$

5. Remarquons que, pour tout réel t,
$$M(t)^T = \left(R(t)^T R(t)\right)^T = R(t)^T \left(R(t)^T\right)^R = R(t)^T R(t) = M(t).$$
De plus, pour tous $X \in \mathbb{R}^d$ et $t \in \mathbb{R}$, en utilisant la question 4,
$$\langle X, M(t)X \rangle = \|R(t)X\|^2 \geq 0.$$
Ceci montre que pour tout réel t, $M(t) \in \mathcal{S}_d^+(\mathbb{R})$. Montrons que cela est préservé à la limite. Premièrement $\mathcal{S}_d(\mathbb{R}) = \ker\left(A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \mapsto A - A^T\right)$. C'est donc un espace vectoriel (car c'est le noyau d'une forme linéaire) fermé (car de dimension finie). Ainsi $M \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$. De plus, pour tous $X \in \mathbb{R}^d$ et $t \in \mathbb{R}$, la question 4 donne
$$\langle X, M(t)X \rangle = \|R(t)X\|^2 \geq 0.$$
Par continuité du produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ et passage à la limite dans les inégalités larges, on obtient
$$\langle X, MX \rangle \geq 0.$$
Ceci valant pour tout $X \in \mathbb{R}^d$, on obtient finalement que $M \in \mathcal{S}_d^+(\mathbb{R})$. On suppose maintenant que (1) admet une solution x non identiquement nulle qui tend vers 0 en $+\infty$. Par la formule de Duhamel, on a, pour tout réel t,
$$x(t) = R(t)R(0)^{-1}x(0) = R(t)X,$$
avec $X := R(0)^{-1}x(0)$. Puisque la solution x est non identiquement nulle, X n'est pas le vecteur nul. De plus, par la question 4,
$$\|x(t)\|^2 = \langle X, M(t)X \rangle.$$
Par continuité du produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ et par unicité de la limite dans un espace séparé, on obtient, en faisant tendre t vers $+\infty$,
$$\langle X, MX \rangle = 0.$$
Ceci conclut. Réciproquement, on considère $X \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ un tel élément. On définit $x : t \in \mathbb{R} \mapsto R(t)X$. C'est par définition une solution de (1) sur $\mathbb{R}$. De plus, elle n'est pas nulle car X est non nul et $R(t)$ est une matrice inversible, quel que soit $t \in \mathbb{R}$. Finalement, toujours par la question 4,
$$\|x(t)\|^2 = \langle X, M(t)X \rangle \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \langle X, MX \rangle = 0.$$
On a à nouveau utilisé la continuité du produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$. Ceci conclut.

6. Par la question 5, on a

$$
\begin{array}{cl}
 & \text{(1) admet une solution non nulle qui tend vers 0 quand } t \text{ tend vers } +\infty \\
\Leftrightarrow & \exists X \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},\ \langle X, MX \rangle = 0 \\
\Leftrightarrow & M \notin \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R}) \\
\underset{M \in \mathcal{S}_d^{+}(\mathbb{R})}{\Leftrightarrow} & M \notin \mathrm{GL}_d(\mathbb{R}) \\
\Leftrightarrow & \det(M) = 0 \\
\Leftrightarrow & \lim\limits_{t \to +\infty} \det(M(t)) = 0,
\end{array}
$$

la dernière équivalente étant valable par continuité du déterminant sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

7. On remarque que, pour tout réel t, $\det(M(t)) = \det(R(t))^2$. Or on rappelle que $w : t \in \mathbb{R} \mapsto \det(R(t))$ est le wronskien. Il est solution de l'équation différentielle

$$w'(t) = \mathrm{tr}(A(t))w(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Alors, on obtient la formule de Liouville : pour tout réel t,

$$w(t) = w(0) \exp\left(\int_0^t \mathrm{tr}(A(s))\mathrm{d}s \right).$$

De plus $w(0) \neq 0$, puisqu'il s'agit du déterminant d'une matrice fondamentale *i.e.* d'une matrice dont les colonnes forment une base, qui est donc inversible.

Alors, en utilisant la question 6,

$$
\begin{array}{cl}
 & \text{(1) admet une solution non nulle qui tend vers 0 quand } t \text{ tend vers } +\infty \\
\Leftrightarrow & \lim\limits_{t \to +\infty} \det(M(t)) = 0 \\
\Leftrightarrow & \lim\limits_{t \to +\infty} \det(R(t)) = 0 \\
\Leftrightarrow & \lim\limits_{t \to +\infty} \displaystyle\int_0^t \mathrm{tr}(A(s))\mathrm{d}s = -\infty.
\end{array}
$$

Solution de l'exercice 3

1. On note $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice associée au système. On a alors

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculons le polynôme caractéristique de A.

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & -1 & 0 \\ 0 & X-2 & -4 \\ -1 & 0 & X+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-3 & X-3 & X-3 \\ 0 & X-2 & -4 \\ -1 & 0 & X+1 \end{vmatrix}_{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3},$$

$$\chi_A(X) = (X-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & X-2 & -4 \\ -1 & 0 & X+1 \end{vmatrix} = (X-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & X-2 & -4 \\ 0 & 1 & X+2 \end{vmatrix}_{L_3 \leftarrow L_1 + L_3}.$$

En développant par rapport à la première colonne, on obtient

$$\chi_A(X) = (X-3) \begin{vmatrix} X-2 & -4 \\ 1 & X+2 \end{vmatrix} = (X-3)((X-2)(X+2)+4) = X^2(X-3).$$

On remarque immédiatement que le rang de A est supérieur ou égal à 2 (les deux premières colonnes sont libres). Par le théorème du rang, le noyau est de dimension inférieure ou égal à 1. Puisque 0 est racine double du polynôme caractéristique, la valeur propre 0 est défective et la matrice A n'est pas diagonalisable. On va la mettre sous forme de Jordan (c'est possible, puisque son polynôme caractéristique est scindé). Après quelques calculs, on montre que

$$E_0(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \quad E_3(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix}.$$

De plus, $A^2 = \begin{pmatrix}4&4&4\\4&4&4\\1&1&1\end{pmatrix}$. Alors,

$$\ker(A^2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right).$$

On choisit alors $e_1 := \begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix}$, $e_3 := \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $e_2 := Ae_3 = \begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}$. Alors, dans cette base, la matrice est sous forme de Jordan. En notant $\mathcal{B} := (e_1, e_2, e_3)$, on a

$$A \underset{\mathcal{B}}{\sim} \begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Alors, pour tout réel t,

$$e^{tA} \underset{\mathcal{B}}{\sim} \begin{pmatrix}e^{3t}&0&0\\0&1&t\\0&0&1\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Ainsi, une base de solutions de l'équation différentielle est donnée par

$$\left(t \in \mathbb{R} \mapsto e^{3t}\begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \mapsto t\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right).$$

2. On sait que, pour tout $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, il existe une unique solution X de $x' = Ax$ vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$. De plus, par la question 1, il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout réel t,

$$X(t) = \alpha e^{3t}\begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix} + \gamma\left(t\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right).$$

En évaluant en $t = 0$, on obtient le système $\begin{cases}4\alpha + 2\beta + \gamma &= x_0\\ 4\alpha - 4\beta &= y_0\\ \alpha + 2\beta - \gamma &= z_0\end{cases}$. Après résolution, on obtient $\alpha = \frac{x_0+y_0+z_0}{0}$, $\beta = \frac{x_0+z_0}{9} - \frac{5y_0}{36}$ et $\gamma = \frac{x_0-2z_0}{3} - \frac{y_0}{6}$. Alors, il vient finalement, pour tout réel t, par identification

$$X(t) = \underbrace{\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4e^{3t}+6t+5 & 4e^{3t}-3t-4 & 4e^{3t}-12t-4\\ 4e^{3t}-12t-4 & 4e^{3t}+6t+5 & 4e^{3t}+24t-4\\ e^{3t}+6t-1 & e^{3t}-3t-1 & e^{3t}-12t+8\end{pmatrix}}_{=e^{tA}}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}.$$

Remarquons que l'on pourrait déterminer l'exponentielle de A autrement :

(a) en question 1, on obtient une matrice fondamentale du système $X(t)$ et pour tout réel t, $e^{tA} = X(t)X(0)^{-1}$

(b) en question 1, on a déterminé l'exponentielle de A à matrice de passage P près – voir (2). La matrice P est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs e_1, e_2 et e_3. En calculant P^{-1}, on obtient aussi l'expression de e^{tA}.

3. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire non homogène à coefficients continus. Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire assure que cette équation admet une unique solution. Son expression est donnée par la formule de Duhamel : pour tout t réel

$$X(t) = e^{tA}X(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} \begin{pmatrix} e^s \\ e^s \\ e^s \end{pmatrix} \mathrm{d}s = \int_0^t e^{(t-s)A} \begin{pmatrix} e^s \\ e^s \\ e^s \end{pmatrix} \mathrm{d}s.$$

Cette formule est valable puisque A est à coefficients constants, la résolvante est donc donnée par l'exponentielle de matrice. En remarquant que pour tout réel t,

$$\int_0^t e^{3(t-s)}e^s \mathrm{d}s = \frac{1}{2}\left(e^{3t} - e^t\right), \quad \int_0^t (t-s)e^s \mathrm{d}s = e^t - t - 1, \quad \int_0^t e^s \mathrm{d}s = e^t - 1,$$

on obtient après quelques calculs, pour tout réel t,

$$X(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^{3t} - 6e^t + 3t + 4 \\ 2e^{3t} + 3e^t - 6t - 5 \\ \frac{1}{2}\left(e^{3t} - 3e^t\right) + 3t + 1 \end{pmatrix}.$$

On aurait pu également raisonner par méthode de variation de la constante en multi-d.