Équations Différentielles

CC n°2, le 10/02/2025. Durée : 1h30.

Questions de cours

1 Donner la définition d'une fonction localement lipschitzienne par rapport à la $2^{\text{ème}}$ variable sur $I \times \mathbb{R}^d$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

2 Donner la définition de l'exponentielle d'une matrice à partir d'une série en rappelant pourquoi cette dernière converge.

3 On considère l'équation différentielle linéaire

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

où $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ sont continues. Donner la définition d'un système fondamental, d'une matrice fondamentale et de la résolvante.

Exercice 1

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1 Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire e^{tB} pour $t \in \mathbb{R}$.

2 Donner l'expression de e^{tA} pour $t \in \mathbb{R}$.

3 Montrer que toutes les solutions de l'équation différentielle $x' = Ax$ tendent vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

Exercice 2

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire associé. On note $S_d^+(\mathbb{R})$ l'espace des matrices symétriques positives de taille d (pas nécessairement définie positives). Pour $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, A^T désigne la transposée de la matrice A. On considère l'équation différentielle

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

où $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ est continue. On suppose que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$-\left(A(t)^T + A(t)\right) \in S_d^+(\mathbb{R}).$$

1 Montrer que, pour toute solution Y de (1), $t \in \mathbb{R} \mapsto \|Y(t)\|^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. En déduire que $\|Y(t)\|$ converge lorsque t tend vers $+\infty$.

2 Soient Y_1 et Y_2 deux solutions de (1). Montrer que $(Y_1(t), Y_2(t))$ admet une limite lorsque t tend vers $+\infty$.

Hint : On pourra écrire (Y_1, Y_2) *en terme des normes de* $Y_1 + Y_2$ *et* $Y_1 - Y_2$.

On veut étudier la possibilité que (1) ait une solution non identiquement nulle qui converge vers 0 quand t tend vers $+\infty$. On note $R(t)$ une matrice fondamentale et $M(t) := R(t)^T R(t)$.

3 En utilisant la question 2, montrer que $M(t)$ a une limite, notée M, quand t tend vers $+\infty$.

4 Soit $X \in \mathbb{R}^d$. Exprimer $\|R(t)X\|^2$ en fonction de $M(t)$ et de X.

5 Montrer que $M \in S_d^+(\mathbb{R})$. Montrer que (1) admet une solution non identiquement nulle qui tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ si et seulement s'il existe $X \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tel que $(X, MX) = 0$.

6 En déduire que (1) admet une solution non identiquement nulle qui tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ si et seulement si $\lim_{t\to+\infty} \det M(t) = 0$.

7 En déduire que (1) admet une solution non identiquement nulle qui tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ si et seulement si $\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \mathrm{Tr}\,(A(s))\,\mathrm{d}s = -\infty$.

Exercice 3

1 Donner un système fondamental associé au système

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 2x+y \\ y' & = & 2y+4z \\ z' & = & x-z \end{array}\right. .$$

2 En déduire e^{tA} pour $t \in \mathbb{R}$, où A est la matrice $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3 Donner la solution de

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 2x+y+e^t \\ y' & = & 2y+4z+e^t \\ z' & = & x-z+e^t \end{array}\right. .$$

vérifiant $x(0) = y(0) = z(0) = 0$.