## Solution de l'exercice 1

A1. Le polynôme caractéristique de $A$ est $\chi_A(X) = (X+1)^2 + 1 = (X+1-i)(X+1+i)$. Ainsi, $\sigma(A) = \{-1 \pm i\}$ . On cherche les vecteurs propes associés :

$$E_{-1+i}(A) = \ker(A - (-1+i)I_2) = \ker \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \mathbb{R}.$$

Ainsi, en conjuguant, on obtient : $E_{-1-i}(A) = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$. Une base de solution réelle de l'équation homogène est donnée par :

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto \mathrm{Re}\left( \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-it} \right) e^{-t}, t \mapsto \mathrm{Im}\left( \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-it} \right) e^{-t} \right\},$$

soit

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} e^{-t}, t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} e^{-t} \right\}.$$

A2. On remarque que :

$$\begin{cases} -x+y & = & 0 \\ -x-y & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0).$$

Ainsi, $(0,0)$ est l'unique point d'équilibre du système différentiel.

A3. Soit $r > 0$, soit $X_0 \in B(0,r)$, alors, $A$ étant à coefficients constants, pour tout $t$ réel positif, on a :

$$X(t, X_0) = e^{tA} X_0.$$

Puisque $A$ a son polynôme caractéristique simplement scindé sur $\mathbb{C}$, elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ tel que $A = P\mathrm{Diag}(-1+i, -1-i)P^{-1}$. Alors,

$$\|X(t,X_0)\| \leq \|P\| \left\| \begin{pmatrix} e^{(-1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(-1-i)t} \end{pmatrix} \right\| \left\|P^{-1}\right\| \|X_0\|.$$

On a noté de la même manière la norme 2 de $\mathbb{C}^2$ et la norme subordonnée à la norme 2 sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. La matrice diagonale étant symétrique, sa norme 2 et son rayon spectral, *i.e.* $e^{-t}$. Ceci conclut, en posant $C = \|P\| \left\|P^{-1}\right\| r$.

A4. Montrons que $0_{\mathbb{R}^2}$ est asymptotiquement stable. Soit $\varepsilon > 0$, on remarque que pour tout $X_0 \in B(0,\delta)$ avec $\delta = \frac{\varepsilon}{\|P\|\|P^{-1}\|}$, on a : la solution du système issue de $X_0$ est définie en tout temps positif (car c'est un système linéaire à coefficients continus (car constants)), et vérifiant pour tout $t \geq 0$,

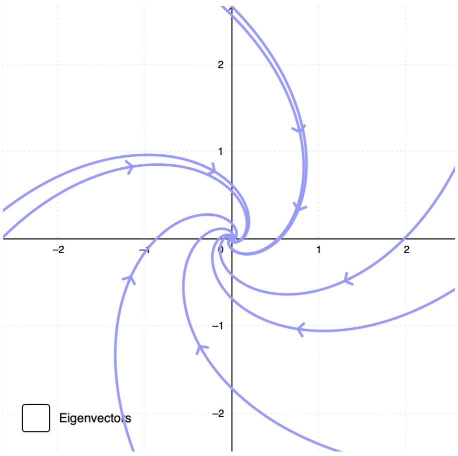
$$\|X(t,X_0)\| \leq \|P\| \left\|P^{-1}\right\| e^{-t}\delta \leq \varepsilon.$$

De plus, $X(t,X_0) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Ceci conclut.

A5. On remarque que, pour $X_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ par la question 1 : $X(t) = \begin{pmatrix} \alpha \cos(t)e^{-t} + \beta \sin(t)e^{-t} \\ \beta \cos(t)e^{-t} - \alpha \sin(t)e^{-t} \end{pmatrix}$. Alors, pour tout $t$ positif,

$$x_1(t)^2 + x_2(t)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)e^{-2t}.$$

On obtient donc une spirale rentrante. Afin de déterminer le sens de rotation de la spirale, on remarque que, pour $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient pour tout $t$ réel, $X(t) = \begin{pmatrix} \sin(t)e^{-t} \\ \cos(t)e^{-t} \end{pmatrix}$, qui est positif en temps court. La rotation se fait donc dans le sens anti-trigonométrique. Voici le tracé :




B1. On remarque que le système est équivalent à $X' = G(X)$, avec $G : X \in \mathbb{R}^2 \mapsto AX + \epsilon F(X)$. De plus $G$ est globalement lipschitzienne, en effet : pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^2$,

$$\|G(X) - G(Y)\| \leq |||A||| \, \|X - Y\| + \epsilon k \, \|X - Y\| = (|||A||| + \epsilon k) \, \|X - Y\| \, .$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure donc que le système admet une unique solution globale.

B2. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|X^\epsilon(t, X_0)\|^2 = 2(X^\epsilon(t, X_0), X^{\epsilon\prime}(t, X_0)) = 2(X^\epsilon(t, X_0), AX^\epsilon(t, X_0) + \epsilon F(X^\epsilon(t, X_0))).$$

En notant $X^\epsilon(t, X_0) = \begin{pmatrix} X_1^\epsilon(t, X_0) \\ X_2^\epsilon(t, X_0) \end{pmatrix}$, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|X^\epsilon(t, X_0)\|^2 = 2(X^\epsilon(t, X_0), \begin{pmatrix} -X_1^\epsilon(t, X_0) + X_2^\epsilon(t, X_0) \\ -X_1^\epsilon(t, X_0) - X_2^\epsilon(t, X_0) \end{pmatrix})) + 2\epsilon(X^\epsilon(t, X_0), F(X^\epsilon(t, X_0))).$$

Ainsi, par calcul du produit scalaire usuel, et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|X^\epsilon(t, X_0)\|^2 \leq -2 \|X^\epsilon(t, X_0)\|^2 + 2\epsilon \|X^\epsilon(t, X_0)\| \, \|F(X^\epsilon(t, X_0))\| \, .$$

Puisque $F$ est globalement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$ et puisque $F(0) = 0$, on obtient pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, $\|F(X)\| \leq k \|X\|$ . Alors,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|X^\epsilon(t, X_0)\|^2 \leq 2 \|X^\epsilon(t, X_0)\|^2 (\epsilon k - 1) < 0,$$

sous la condition $\epsilon \leq \epsilon_0 = \frac{1}{k}$. En effet, remarquons que si $X_0 = (0, 0)$, l'unique solution est la solution nulle. Ainsi, puisque les courbes intégrales ne se coupent pas (unicité de Cauchy-Lipschitz), pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X^\epsilon(t, X_0) \neq 0$.

B3. Puisque $F(0) = 0$, 0 est un bien un point d'équilibre du système différentiel perturbé. En notant pour $t$ positif, $u(t) = \|X^\epsilon(t, X_0)\|^2$, la question précédente montre que

$$\forall t \geq 0, \; u'(t) \leq 2(\epsilon k - 1) u(t).$$

Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t) e^{-2(\epsilon k - 1)t}) \leq 0.$$

Ainsi, pour tout $t$ positif,

$$\|X(t, X_0)\| \leq e^{(\epsilon k - 1)t} \|X_0\| \, .$$

Puisque $\epsilon < \epsilon_0$, $\epsilon k - 1 < 0$, et on conclut comme à la question $A4$ que 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable (on a le même type d'inégalité).

B4. Comme rappelé à la question B2, pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, on a : $\|F(X)\| \leq k\,\|X\|$. Ainsi, à l'aide de l'inégalité précédente, on obtient pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$, et $\epsilon < \epsilon_0$,

$$\|F(X^\epsilon(t,X_0))\| \leq k\,\|X^\epsilon(t,X_0)\| \leq k e^{-(1-\epsilon k)t}\,\|X_0\|.$$

Ainsi, $\kappa_\epsilon = 1 - k\epsilon > 0$ convient.

B5. On note $\delta X^\epsilon(\cdot, X_0) = X(\cdot, X_0) - X^\epsilon(\cdot, X_0)$. Remarquons que : pour tout $t \geq 0$, $\epsilon < \epsilon_0$, $X_0 \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\delta X^\epsilon(t,X_0)\|^2 = 2\,\|\delta X^\epsilon(t,X_0)\|\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\delta X^\epsilon(t,X_0)\|\right) = 2(\delta X^\epsilon(t,X_0), \delta X^{\epsilon\prime}(t,X_0)).$$

D'où,

$$\|\delta X^\epsilon(t,X_0)\|\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\delta X^\epsilon(t,X_0)\|\right) = (\delta X^\epsilon(t,X_0), A\delta X^\epsilon(t,X_0) - \epsilon F(X^\epsilon(t,X_0))).$$

Comme remarqué précédemment, pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, $(X, AX) = -\|X\|^2 \leq 0$, ainsi l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\|\delta X^\epsilon(t,X_0)\|\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\delta X^\epsilon(t,X_0)\|\right) \leq \epsilon\,\|\delta X^\epsilon(t,X_0)\|\,\|F(X^\epsilon(t,X_0))\|.$$

Alors, pour tout $t \geq 0$, $\epsilon < \epsilon_0$, $X_0 \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\delta X^\epsilon(t,X_0)\|\right) \leq \epsilon\,\|F(X^\epsilon(t,X_0))\| \underset{B4}{\leq} \epsilon k e^{-\kappa_\epsilon t}\,\|X_0\|.$$

Donc,

$$\|\delta X^\epsilon(t,X_0)\| \leq \epsilon k\,\|X_0\|\int_0^t e^{-\kappa_\epsilon s}\mathrm{d}s = \frac{\epsilon k}{\kappa_\epsilon}\,\|X_0\|\left(1 - e^{-\kappa_\epsilon t}\right) \leq \epsilon\frac{k}{\kappa_\epsilon}\,\|X_0\|.$$

## Solution de l'exercice 2

1. On vérifie immédiatement que $y_0 : t \in ]0,+\infty[ \mapsto \frac{1}{t}$ est solution de l'équation différentielle avec par condition initiale $y_0(1) = 1$.

2. On reconnait une équation de Ricatti. On cherche alors $y$ sous la forme $y_0 + u$. En injectant dans l'équation, il vient :

$$u' + y_0' + u^2 + y_0^2 + 2y_0 u = \frac{u + y_0}{t} - \frac{1}{t^2}.$$

Puisque $y_0$ est solution, les simpliciations donnent :

$$u' + u^2 + \frac{u}{t} = 0,$$

avec pour condition initiale $u(1) = y(1) - y_0(1) = 1$.

3. On reconnaît une équation de Bernoulli, on introduit alors $v := \dfrac{1}{u}$, en on remarque que :

$$v' = -\frac{u'}{u^2} = 1 + \frac{1}{tu} = 1 + \frac{v}{t}.$$

On résout alors l'équation homogène $v' - \frac{v}{t} = 0$. On obtient alors $v(t) = \lambda t$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière par méthode de variation de la constante. On a : $\lambda'(t)t = 1$, on obtient alors $v(t) = \lambda t + \ln(|t|)t$. On identifie $\lambda$ grâce à la condition initiale $v(1) = u(1) = 1$. Donc, $v(t) = t(1 + \ln(|t|))$.
Ainsi $u(t) = \frac{1}{t(1+\ln(|t|))}$. On obtient donc :

$$y(t) = \frac{1}{t(1+\ln(|t|))} + \frac{1}{t}.$$

Puisque $f : (t, y) \in ]0+\infty[\times\mathbb{R} \mapsto \frac{y}{t} - \frac{1}{t^2} - y^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$, le problème de Cauchy admet une unique solution maximale. La fonction définie est solution, par construction. Elle est définie sur $]e^{-1}, +\infty[$. C'est bien l'unique solution maximale puisque $\lim_{t\to e^{-1+}} |y(t)| = +\infty$.

## Solution de l'exercice 3

1. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^2 = 0$. Ainsi l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation homogène est :

$$\mathcal{S} = \left\{t \mapsto \alpha e^t + \beta t e^t,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. On effectue la méthode de variation de la constante en dimension 2. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(t) = \alpha(t)e^t + \beta(t)te^t$, où $\alpha$ et $\beta$ sont deux fonctions $\mathcal{C}^1(]0, +\infty[)$. On a alors :

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix}e^t & te^t\\ e^t & (t+1)e^t\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ \sqrt{t}\end{pmatrix} = e^{-2t}\begin{pmatrix}(t+1)e^t & -te^t\\ -e^t & e^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{t}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sqrt{t}e^{-t}\\ \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\alpha(t) = -\int_0^t \sqrt{s}e^{-s}\mathrm{d}s \underset{u=\sqrt{s}}{=} -2\int_0^{\sqrt{t}} u^2 e^{-u^2}\mathrm{d}u \underset{IPP}{=} \left(\left[ue^{-u^2}\right]_0^{\sqrt{t}} - \int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2}\mathrm{d}u\right) = \sqrt{t}e^{-t} - h(t).$$

$$\beta(t) = \int_0^t \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}}\mathrm{d}s \underset{u=\sqrt{s}}{=} 2\int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2}\mathrm{d}u = 2h(t).$$

Ainsi, on obtient

$$\mathcal{S} = \left\{t \in ]0+\infty[ \mapsto \alpha e^t + \beta te^t + \sqrt{t} - h(t)e^t + 2th(t)e^t,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

3. On remarque que, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $y_{\alpha,\beta} : t \in ]0+\infty[ \mapsto \alpha e^t + \beta te^t + \sqrt{t} - h(t)e^t + 2th(t)e^t$ vérifie $\lim_{t\to 0^+} y_{\alpha,\beta}(t) = \alpha$ et peut se prolonger par continuité en 0.

On a de plus, pour tout $t > 0$,

$$y'_{\alpha,\beta}(t) = \alpha e^t + \beta(t+1)e^t + \frac{1}{2\sqrt{t}} - (h(t) + h'(t))e^t + 2\left(th(t)e^t + h(t)e^t + te^t h'(t)\right).$$

Puisque pour tout $t > 0$, $h'(t) = \frac{e^{-t}}{2\sqrt{t}}$, il vient :

$$y'_{\alpha,\beta}(t) = \alpha e^t + \beta(t+1)e^t - h(t)e^t + 2(t+1)h(t)e^t + \sqrt{t}.$$

Ainsi, $\lim_{t\to 0^+} y'_{\alpha,\beta}(t) = \alpha+\beta$ et peut se prolonger par continuité en 0. On a donc prolongé toute solution de manière $\mathcal{C}^1$ en 0. On remarque enfin que $(y_{\alpha,\beta}(0), y'_{\alpha,\beta}(0)) = (0,0) \Leftrightarrow \alpha=\beta=0$. Alors,

$$\mathcal{S} = \left\{ y_{0,0} : t \in [0,+\infty[ \mapsto \sqrt{t} + (2t-1)h(t)e^t \right\}.$$

## Solution de l'exercice 4

1. On remarque que $f : (t,(x,y)) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \mapsto (-x-2y^2, xy-y) \in \mathbb{R}^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Ainsi, le problème de Cauchy admet une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert I contenant 0. Montrons que cette dernière est globale. On introduit :

$$H : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + 2y^2 \in \mathbb{R}.$$

Alors, pour tout $t \in I$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(x(t),y(t)) = 2x(t)x'(t) + 4y(t)y'(t) = 2x(t)\left(-x(t) - 2y^2(t)\right) + 4y(t)\left(x(t)y(t) - y(t)\right).$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(x(t),y(t)) = -2H(x(t),y(t)).$$

Alors, $\forall t \in I$,

$$H(x(t),y(t)) = e^{-2t} H(x_0,y_0).$$

Donc,

$$\forall t \in I, \quad \|(x,y)(t)\|_2 \leq \sqrt{2}e^{-t}\|(x_0,y_0)\|_2.$$

Par le théorème de sortie de tout compact, on en déduit que l'unique solution maximale est globale.

2. Remarquons que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} -x-2y^2 &= 0 \\ xy - y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 & = & -x \\ y=0 & \text{ou} & x=1 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0).$$

Le système admet donc un unique point d'équilibre. Étudions sa nature. On a :

$$Jac(f)(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & -4y \\ y & x-1 \end{pmatrix}\Big|_{(x,y)=(0,0)} = -I_2.$$

Ainsi, le point d'équilibre $(0,0)$ est asymptotiquement stable pour le problème linéarisé en vertu du critère de Routh. Par le théorème de linéarisation en première approche, le point $(0,0)$ est donc asymptotiquement stable pour le système non linéaire.

## Solution de l'exercice 5

1. Puisque $f : (t,x) \mapsto e^{-tx} \in \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$, le problème de Cauchy $x'(t) = f(t,x(t))$, $x(0) = 0$ admet une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert $I = ]T^-, T^+[$ de $\mathbb{R}$ contenant 0. Montrons que $I$ est un intervalle centré en 0. On suppose que ce n'est pas le cas. Alors, $T^- \neq -T^+$, par exemple $-T^+ < T^-$. On définit alors :

$$z : t \in ]-T^+, T^+[ \mapsto \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in [0,T^+[ \\ -x(-t) & \text{si } t \in ]-T^+, 0[ \end{cases}.$$

On a bien $z(0) = 0$. De plus, $z$ est bien $\mathcal{C}^1$ (calcul direct) et est solution sur $[0,T^+[$. Enfin, pour tout $t \in ]-T^+, 0]$,

$$z'(t) = +x'(-t) = e^{-(-t)x(-t)} = e^{-t(-x(-t))} = e^{-tz(t)}.$$

Cette fonction est solution du problème de Cauchy, et prolonge la solution maximale. Impossible. On en déduit que $I$ est un intervalle centré en 0. Par le même argument que précédemment (et par l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz), on conclut à l'égalité sur $I$.

2. $\forall t \in I,\ x'(t) = e^{-tx(t)} > 0$. Ainsi, $x$ est strictement croissante sur $I$. De fait, pour tout $t \in I \cap \mathbb{R}^+$, $x(t) \geq x(0) = 0$. Par suite,

$$\forall t \in I \cap \mathbb{R}^+,\ x'(t) = e^{-tx(t)} \leq e^0 = 1.$$

En intégrant, il vient :

$$\forall t \in I \cap \mathbb{R}^+,\ |x(t)| = x(t) \leq x(0) + t = t.$$

Ainsi, par le théorème de sortie de tout compact, on en déduit que $\mathbb{R}^+ \subseteq I$. Par la remarque de la question 1, on a $I = \mathbb{R}$.

3. Puisque $x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle admet nécessairement une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$ quand $t$ tend vers $+\infty$. Supposons cette limite infinie. On sait donc qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $t \geq t_0$, $x(t) \geq 1$. Ainsi, pour tout $t \geq t_0$,

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} x'(s)\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} e^{-sx(s)}\mathrm{d}s \leq \int_{t_0}^{t} e^{-s} \leq 1.$$

Impossible. La limite est donc finie.

4. Soit $\epsilon > 0$. On introduit $C_\epsilon = x(\epsilon) > x(0) = 0$ (car $x$ est strictement croissante). On a alors :

$$\forall t \geq \epsilon,\ x'(t) = e^{-tx(t)} \leq e^{-C_\epsilon t}.$$

5. Au vu de l'inégalité précédente, on obtient directement que $x' \in L^1(0, +\infty)$. On pose pour $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = a - \displaystyle\int_t^{+\infty} x'(s)\mathrm{d}s$. Alors, puisque $x'$ est intégrable,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = a - \int_0^{+\infty} x'(s)\mathrm{d}s + \int_0^t x'(s)\mathrm{d}s.$$

Donc, $\forall t \in \mathbb{R}$, $y'(t) = x'(t)$. Par suite, il existe $C \in \mathbb{R}$,tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = y(t) + C$. Afin de déterminer $C$, on fait tendre $t$ vers $+\infty$.

D'une part : pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\mathbb{1}_{[t,+\infty[}(s)x'(s) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
D'autre part, $\forall t \geq 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$, $|\mathbb{1}_{[t,+\infty[}(s)x'(s)| \leq \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(s)e^{-C_t s} \in L^1(\mathbb{R})$.
On obtient donc par théorème de convergence dominée que

$$\int_t^{+\infty} x'(s)\mathrm{d}s \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = a = \lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = a - C$, donc $C = 0$. Ceci conclut.

## Solution de l'exercice 6

1. Remarquons que ce système est bien posé :

$$X' = AX + f(t) \Leftrightarrow X' = F(t, X),$$

où $F : (t,X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \mapsto AX + f(t) \in \mathbb{R}^3$. Elle est continue, par continuité de $f$. Elle est de plus globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable : pour tout $t$ réel, pour tout $(X,Y) \in (\mathbb{R}^3)^2$,

$$\|F(t,X) - F(t,Y)\| \leq |||A|||\,\|X-Y\|\,.$$

Ainsi, le théorème de Cauchy-Lipschitz global assure que le système admet, à condition initiale donnée, une unique solution globale. L'expression de la solution est donnée par la formule de Duhamel, et puisque $A$ est a coefficients constants, il vient : $\forall t, t_0 \in \mathbb{R}$,

$$X(t) = e^{(t-t_0)A}\begin{pmatrix} X_1(t_0) \\ X_2(t_0) \\ X_3(t_0) \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} f(s)\mathrm{d}s.$$

Ainsi,

$$X(t) = e^{(t-t_0)A}\begin{pmatrix} X_1(t_0) \\ X_2(t_0) \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}\begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{d}s + G(t),$$

où $G$ est donnée par :

$$G(t) = e^{(t-t_0)A}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X_3(t_0) \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3(s) \end{pmatrix}\mathrm{d}s.$$

On fait intervenir $t_1$, un réel. On a :

$$G(t) = e^{(t-t_0)A}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X_3(t_0) \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t_1} e^{(t-s)A}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3(s) \end{pmatrix}\mathrm{d}s + \int_{t_1}^{t} e^{(t-s)A}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3(s) \end{pmatrix}\mathrm{d}s.$$

$$G(t) = e^{(t-t_1)A}\left(e^{(t_1-t_0)A}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X_3(t_0) \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t_1} e^{(t_1-s)A}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3(s) \end{pmatrix}\mathrm{d}s\right) + \int_{t_1}^{t} e^{(t-s)A}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3(s) \end{pmatrix}\mathrm{d}s.$$

La matrice $A$ étant diagonale, les deux premières composantes du terme entre parenthèses sont nulles. On reconnaît la troisième composante à l'aide de la formule de Duhamel scalaire ; il s'agit de $X_3(t_1)$. Ceci fournit l'expression demandée.

2. On raisonne par **analyse-synthèse**. Analyse : on suppose donnée une solution $X$, bornée sur $\mathbb{R}$ du système. Ainsi, par la question précédente, on a : pour tout $t, t_0, t_1$ réels :

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{t-t_0}X_1(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{t-s}f_1(s)\mathrm{d}s \\ e^{2(t-t_0)}X_2(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{2(t-s)}f_2(s)\mathrm{d}s \\ e^{t_1-t}X_3(t_1) + \displaystyle\int_{t_1}^{t} e^{s-t}f_3(s)\mathrm{d}s \end{pmatrix}.$$

Première composante : $X_1(t) = e^{t-t_0}\left(X_1(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{t_0-s}f_1(s)\mathrm{d}s\right)$. Comme $e^{t-t_0} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on doit **nécessairement** avoir $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(X_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{t_0-s}f_1(s)\mathrm{d}s\right) = 0$, *i.e.*

$$X_1(t_0) = -\int_{t_0}^{+\infty} e^{t_0-s}f_1(s)\mathrm{d}s.$$

Deuxième composante : on obtient de la même manière que, **nécessairement** :

$$X_2(t_0) = -\int_{t_0}^{+\infty} e^{2(t_0-s)} f_2(s)\mathrm{d}s.$$

Troisième composante : puisque la dernière valeur propre est de signe opposé, il faut cette fois s'intéresser à la limite en $-\infty$. Plus précisement : $X_3(t) = e^{t_1-t}\left(X_3(t_1) + \int_{t_1}^{t} e^{s-t_1} f_3(s)\mathrm{d}s\right)$.

Puisque $e^{t_1-t} \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on doit **nécessairement** avoir $\lim\limits_{t\to-\infty}\left(X_3(t_1) + \int_{t_1}^{t} e^{s-t_1} f_3(s)\mathrm{d}s\right) = 0$, *i.e.*

$$X_3(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} e^{s-t_1} f_3(s)\mathrm{d}s.$$

Ceci montre l'unicité. Montrons que ces conditons sont suffisantes.

Synthèse : montrons que ces constantes existent bien. On a, par hypothèse sur $f$,

$$|e^{t_0-s} f_1(s)| \leq e^{t_0-s} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{s^2}\right).$$

Cette quantité est donc intégrable et $X_1(t_0)$ est bien définie. On raisonne de même pour $X_2(t_0)$ et $X_3(t_0)$. Montrons qu'elle conviennent. Par la question 1, c'est clairement une solution. Montrons qu'elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X_1(t) = e^{t-t_0}\left(-\int_{t_0}^{+\infty} e^{t_0-s} f_1(s)\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} e^{t_0-s} f_1(s)\mathrm{d}s\right) = -\int_{t}^{+\infty} e^{t-s} f_1(s)\mathrm{d}s.$$

Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |X_1(t)| \underset{u=s-t}{=} \left|\int_0^{+\infty} e^{-u} f_1(u+t)\mathrm{d}u\right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-u}\mathrm{d}u = 1.$$

De même,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |X_2(t)| = \left|-\int_t^{+\infty} e^{2(t-s)} f_2(s)\mathrm{d}s\right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-2u}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}.$$

Enfin, on a

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |X_3(t)| = \left|\int_{-\infty}^{t} e^{s-t} f_3(s)\mathrm{d}s\right| \underset{u=t-s}{=} \left|\int_0^{+\infty} e^{-u} f_3(t-u)\mathrm{d}u\right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-u}\mathrm{d}u = 1.$$

Ceci montre bien que la solution est bornée sur $\mathbb{R}$. Enfin, au vu des expressions exibhées sur chacunes des composantes, on retrouve bien la formule donnée dans l'énoncé.

3. On remarque que, si $X$ est une telle solution, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue, et périodique, donc bornée sur $\mathbb{R}$. Ceci invite à montrer que la solution précédente est périodique, sous l'hypothèse de périodicité sur $f$. Supposons $T > 0$ la période de $f$. Alors,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \tilde{X}(t+T) = -\int_{t+T}^{+\infty} e^{A(t+T-s)} \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}s + \int_{-\infty}^{t+T} e^{A(s-t-T)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3(s) \end{pmatrix} \mathrm{d}s.$$

Par changement de variables $\mathcal{C}^1$ bijectif, en par périodicité de $f$,

$$\tilde{X}(t+T) \underset{u=s-T}{=} -\int_{t}^{+\infty} e^{A(t-u)} \begin{pmatrix} f_1(u+T) \\ f_2(u+T) \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}u + \int_{-\infty}^{t} e^{A(u-t)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3(u+T) \end{pmatrix} \mathrm{d}u = \tilde{X}(t).$$

Ceci conclut.

Remarque : on a aussi démontré l'unicité d'une solution périodique.