L3 Mathématiques
ENS Rennes

Équations Différentielles
2023 – 2024

DM

Un soin particulier sera apporté à la qualité de la rédaction.

Exercice 1

A) Dans cette exercice, on désigne par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne. On considère l'équation différentielle dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x' = -x + y, \\ y' = -x - y, \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Autrement dit:

$$X' = AX, \quad X(0) = X_0,$$

où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, et $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. On note $X(t, X_0)$, la solution.

A1. Calculer les valeurs propres de la matrice A, ses vecteurs propres et en déduire une base de solutions (réelles) du système.

A2. Montrer que $0_{\mathbb{R}^2}$ est l'unique point d'équilibre du système.

A3. Soit $r > 0$, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de r telle que:

$$\forall X_0 \in B(0, r),\ \forall t \in [0, +\infty[,\ \|X(t, X_0)\| \leqslant Ce^{-t}.$$

A4. En déduire que $0_{\mathbb{R}^2}$ est asymptotiquement stable.

A5. Dessiner grossièrement le portrait de phase de ce système.

B) Soit maintenant l'équation:

$$X' = AX + \epsilon F(X), \quad X(0) = X_0,$$

où $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est (globalement) lipschitzienne, de constante k et telle que $F(0) = 0$.

B1. Que peut-on dire de l'existence et de l'unicité des solutions de cette équation ? On note la solution $X^\epsilon(t, X_0)$.

B2. Montrer qu'il existe ϵ_0 tel que, pour $\epsilon < \epsilon_0$ et $X_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\|X^\epsilon(t, X_0)\|$ est strictement décroissante.

B3. Montrer que pour $\epsilon < \epsilon_0$, $0_{\mathbb{R}^2}$ est asymptotiquement stable.

B4. Montrer que pour tout $\epsilon < \epsilon_0$, il existe $\kappa_\epsilon > 0$ qu'il faudra expliciter tel que pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$, on a

$$\|F(X^\epsilon(t, X_0))\| \leqslant ke^{-\kappa_\epsilon t}\|X_0\|.$$

B5. Montrer que pour $\epsilon < \epsilon_0$, $X_0 \in \mathbb{R}^2$, $t \geqslant 0$, on a

$$\|X^\epsilon(t, X_0) - X(t, X_0)\| \leqslant C\epsilon\frac{k}{\kappa_\epsilon}\|X_0\|,$$

où C est une contante.

Exercice 2

On considère le problème de Cauchy:

$$y' + y^2 = \frac{y}{t} - \frac{1}{t^2},\ y(1) = 2.$$

1. Vérifier que $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est solution de l'équation avec une autre condition initiale.
2. Montrer qu'on peut se ramener à l'équation
$$u' + u^2 + \frac{u}{t} = 0, \qquad u(1) = 1.$$
3. Déterminer explicitement la solution maximale du problème initial ainsi que son intervalle d'existence.

Exercice 3

On considère le système différentiel :

$$X' = AX + f(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X + f(t)$$

où $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ est une fonction continue et bornée par 1 sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que toute solution vérifie pout tout t, t_0, $t_1 \in \mathbb{R}$:
$$X(t) = \ e^{A(t-t_0)} \begin{pmatrix} X_1(t_0) \\ X_2(t_0) \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \\ 0 \end{pmatrix} \,\mathrm{d}s$$
$$+ e^{A(t-t_1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X_3(t_1) \end{pmatrix} + \int_{t_1}^{t} e^{A(t-s)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3(s) \end{pmatrix} \,\mathrm{d}s$$
2. En déduire qu'il existe une unique solution $\tilde{X}$ qui est bornée sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est donnée par :
$$\tilde{X}(t) = -\int_{t}^{+\infty} e^{A(t-s)} \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \\ 0 \end{pmatrix} \,\mathrm{d}s + \int_{-\infty}^{t} e^{A(s-t)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3(s) \end{pmatrix} \,\mathrm{d}s$$
3. Montrer que si f est périodique, il existe une unique solution périodique.

Exercice 4

On considère une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{C}^n$ et on note $|||\cdot|||$ la norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Soit $\delta > 0$. On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C},\ \Re(z) < -\delta\}$. Le but de cette question est de montrer l'existence de $K > 0$ tel que :
$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad |||e^{tA}||| \leqslant K e^{-\delta t}.$$

1.a. On note le polynôme caractéristique de A, $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_i}$. Justifier que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$, où F_i est l'espace caractéristique associé à la valeur propre λ_i.

1.b. Soit $i \in [\![1, r]\!]$, $v \in F_i$, montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\|e^{tA}v\|e^{\delta t} \leqslant e^{(\Re(\lambda_i)+\delta)t} \sum_{j=0}^{m_i-1} \frac{t^j}{j!} |||(A-\lambda_i I_n)^j|||\, \|v\|\,.$$

1.c. Conclure.

2. On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on suppose que A a ses valeurs propres de partie réelle strictement négative. Montrer que toute solution de

$$x'(t) = Ax(t)$$

tend vers 0 quand $t \to +\infty$.

3. Réciproquement, on considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on suppose que toute solution de

$$x'(t) = Ax(t)$$

tend vers 0 quand $t \to +\infty$. Montrer que A a ses valeurs propres de partie réelle strictement négative.

4. On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application continue. On suppose que A a ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, et que B est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que toute solution de

$$x'(t) = (A + B(t))x$$

est globale. Montrer que si, de plus, $\|B\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)}$ est assez petit, la solution tend vers 0 quand $t \to +\infty$.
Hint : on pourra utiliser la question 1 en remarquant que x est solution de $x' = Ax + b(t)$ où $b(t) = B(t)x(t)$.

Exercice 5

Les trois questions de cette exercice sont indépendantes.

1. On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   - La matrice A est antisymétrique
   - Toute solution de $x' = Ax$ est de norme euclidienne constante.

2. On considère $A : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application continue et $T-$périodique, avec $T > 0$.

2.a. On note R_A la résolvante associée au système $x' = A(t)x$. Montrer que, pour tout $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, $R_A(t_0 + T, t_1 + T) = R_A(t_0, t_1)$.

2.b. En déduire que, pour tout réel t, $R_A(t + T, t) = R_A(t, 0)R_A(T, 0)R_A(t, 0)^{-1}$.

2.c. Montrer que l'équation $x' = A(t)x$ admet une solution $T-$périodique non triviale si et seulement si 1 est valeur propre de $R_A(T, 0)$.

3. Soit $A :]0, +\infty[\to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application continue. On considère l'équation différentielle linéaire

$$x' = A(t)x, \quad t > 0,$$

On note $R_A(t, t_0)$ sa résolvante.

3.a. Montrer que $S(t, t_0) := {}^T R_A(t_0, t)$ est la résolvante associée à l'équation différentielle

$$z' = -{}^T A(t) z.$$

3.b. On considère la matrice

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2t + \dfrac{1}{t} & 0 & \dfrac{1}{t} - t \\ t - \dfrac{1}{t} & 3t & t - \dfrac{1}{t} \\ \dfrac{2}{t} - 2t & 0 & \dfrac{2}{t} + t \end{pmatrix}.$$

Montrer que $A(t)$ est diagonalisable via une matrice de changement de base indépendante de t.

3.c. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' & = & -(2t + \frac{1}{t})x + (\frac{1}{t} - t)y + 2(t - \frac{1}{t})z \\ y' & = & -3ty \\ z' & = & (t - \frac{1}{t})x + (\frac{1}{t} - t)y - (\frac{2}{t} + t)z \end{cases}$$

On pourra se contenter de donner l'expression de la solution modulo des matrices de passage.