Devoir Maison
À rendre pour le 17/03/2025

Ce devoir est individuel. La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront en compte pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les exercices 1 et 2 seront traités ***obligatoirement*** *par tous les étudiants. Vous rendrez* ***au choix*** *l'exercice 3 ou l'exercice 4. Vous pouvez évidemment faire les deux.*

Exercice 1

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On intéresse à l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y'(t) & = & \lambda t^2 + y(t)^2, \quad t \in \mathbb{R} \\ y(0) & = & 0 \end{array} \right. . \tag{1}$$

1. Montrer que (1) admet une unique solution maximale y définie sur un intervalle ouvert $I_\lambda := (\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$, où $\alpha_\lambda < 0 < \beta_\lambda$.
2. Montrer que $\alpha_\lambda = -\beta_\lambda$ et que y est impaire sur I_λ.
3. Résoudre cette équation dans le cas où $\lambda = 0$.
4. Dans cette question, $\lambda > 0$.
   - 4.(a) Étudier la monotonie et la convexité de y sur I_λ.
   - 4.(b) On suppose que $\beta_\lambda = +\infty$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \geq 1$,
   $$\arctan(y(t)) \geq \min(1, \lambda)(t-1) + c.$$
   - 4.(c) En déduire que la solution n'est pas globale.
5. Dans cette question, $\lambda < 0$.
   - 5.(a) Donner un équivalent simple de y' en 0. En déduire l'existence de $\delta \in]0, \beta_\lambda[$ tel que, pour tout $t \in [0, \delta[, \quad y(t)^2 \leq -\lambda t^2$.
   - 5.(b) On souhaite montrer que, pour tout $t \in [0, \beta_\lambda[, \quad y(t)^2 \leq -\lambda t^2$. On raisonne par l'absurde : on suppose que ce n'est pas le cas. Soit $\kappa := \sup\{t \in]0, \beta_\lambda[, \ \forall s \in [0, t[, \ y(s)^2 \leq -\lambda s^2\}$. Justifier que κ est bien défini, $\kappa > 0$, puis que $y(\kappa)^2 = -\lambda \kappa^2$.
   - 5.(c) Montrer que
   $$y(\kappa + h)^2 + \lambda(\kappa + h)^2 = 2\lambda\kappa h + o(h).$$
   - 5.(d) En déduire une contradiction, puis que la solution est globale.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une application localement lipschitzienne.

1. On fixe $\alpha \in \mathbb{R}^d$. Montrer que le problème de Cauchy autonome $\left\{ \begin{array}{lcl} y'(t) & = & f(y(t)), \quad t \in \mathbb{R} \\ y(0) & = & \alpha \end{array} \right.$ admet une unique solution maximale y_α définie sur un intervalle ouvert contenant 0. On note $T(\alpha) \in]0, +\infty]$ le temps positif d'existence de la solution maximale.

2. On souhaite démontrer la propriété suivante : pour tout $\alpha_0 \in \mathbb{R}^d$, pour tout $0 < T < T(\alpha_0)$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $\|\alpha - \alpha_0\| \leq \eta$, on a $T(\alpha) \geq T$.

   Soient $\alpha_0 \in \mathbb{R}^d$ et $0 < T < T(\alpha_0)$.

   2.(a) Montrer que f est globalement lipschitzienne sur l'ensemble $K := y_{\alpha_0}([0,T]) + \overline{B(0,1)}$. On note L sa constante de Lipschitz.

   2.(b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $\|\alpha - \alpha_0\| \leq \frac{e^{-LT}}{2}$. On note

   $$S = \{t \in [0, T(\alpha)[\cap[0,T[\text{ tel que } \|y_\alpha(s) - y_{\alpha_0}(s)\| \leq 1,\ \forall s \in [0,t]\}.$$

   Justifier que $\tau := \sup S$ est bien défini et vérifie $\tau > 0$.

   2.(c) Montrer que pour tout $t \in [0,\tau]$, $\|y_\alpha(t) - y_{\alpha_0}(t)\| \leq e^{Lt}\|\alpha - \alpha_0\|$.

   2.(d) En déduire que $\tau = T$. On pourra raisonner par l'absurde.

   2.(e) Conclure.

3. On veut montrer que la fonction T n'est pas nécessaire continue. On considère le système différentiel suivant $\begin{cases} x' &= x^2 - y^2x^4 \\ y' &= 0 \end{cases}$. Montrer qu'il entre dans le cadre d'étude de cet exercice. En s'intéressant aux différentes conditions initiale $\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$ pour $\varepsilon \in [0,1)$, conclure.

   Hint : on pourra s'intéresser aux trajectoires constantes.

Exercice 3

Dans cet exercice, on considère

$$a : (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \mapsto (a_i(t,x))_{i \in [\![1,d]\!]} \in \mathbb{R}^d$$

une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable sur $\mathbb{R}^d$ et $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Le but de cet exercice est d'établir l'existence d'une unique solution $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ à l'équation de transport suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \displaystyle\sum_{i=1}^{d} a_i(t,x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(t,x) = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{2}$$

1. On fixe $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$. Justifier que l'équation différentielle suivante admet une unique solution globale $\begin{cases} X'(s) &= a(s, X(s)), \quad s \in \mathbb{R}^+ \\ X(t) &= x \end{cases}$. On la note $X(\cdot; x, t)$ dans la suite de l'exercice.

2. On suppose donnée $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ une solution de (2). Montrer que, pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, l'application $s \in \mathbb{R}^+ \mapsto u(s, X(s;x,t)) \in \mathbb{R}$ est constante.

3. En déduire que, pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, $u(t,x) = u_0(X(0;x,t))$.

4. Conclure.

5. Soit $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation de transport suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + (t-x)\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

6. Soit $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Résoudre l'équation de transport suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,(x,y)) - y\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,(x,y)) + x\dfrac{\partial u}{\partial y}(t,(x,y)) = 0, & (t,(x,y)) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2, \\ u(0,(x,y)) = u_0(x,y), & (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Exercice 4

Soit $\alpha > 0$, un paramètre et $y_0 \in]0,1[$. On considère l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y' &= & \alpha y(1-y) \\ y(0) &= & y_0 \end{cases} . \tag{3}$$

Partie 1 : étude théorique.

1.(a) Montrer que cette équation différentielle admet une unique solution globale. Donner un encadrement de y sur $\mathbb{R}$.

1.(b) Déterminer l'expression de l'unique solution de (3) pour $\alpha = 1$ et $y_0 = \frac{1}{2}$.

On s'intéresse à la résolution numérique de cette équation différentielle. On fixe $T > 0$ et on considère $(t_n)_{n\in[\![0,N]\!]}$ la subdivision régulière de l'intervalle $[0,T]$ à $N+1$ points de pas $h := \frac{T}{N}$. On définit $y^0 = y_0$. Le but est de produire une suite $(y^n)_{n\in[\![0,N]\!]}$ approximant $(y(t_n))_{n\in[\![0,N]\!]}$.

Partie 2 : schéma d'Euler explicite. On considère le schéma d'Euler explicite associé à cette équation : pour $n \in [\![0, N-1]\!]$,

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{h} = \alpha y^n(1 - y^n).$$

2.(a) Dans cette question, on suppose que $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{h} < \mathbf{1}$. Montrer que, pour tout $n \in [\![0,N]\!]$, $y^n \in]0,1[$.
Hint : on pourra étudier la stabilité de l'intervalle $]0,1[$ *par la fonction* $f : y \mapsto y + \alpha h y(1-y)$.

2.(b) On suppose dans cette question que $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{h} > \mathbf{1}$. Montrer qu'il existe un $y^0 \in]0,1[$ tel que $y^1 > 1$. Commenter.

Partie 3 : une inégalité. Soient $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(M^n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de nombres réels positifs et $K > 0$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z^{n+1} \leq (1+K)z^n + M^n$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z^n \leq (1+K)^n z^0 + \sum_{k=0}^{n-1} M^k (1+K)^{n-1-k}.$$

Partie 4 : un schéma semi-implicite. On souhaite utiliser une méthode numérique qui permette de vérifier $y^n \in]0,1[$, indépendamment des valeurs de αh. Pour ce faire on propose d'étudier le schéma semi-implicite suivant : pour $n \in [\![0, N-1]\!]$,

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{h} = \alpha y^n(1 - y^{n+1}).$$

4.(a) Montrer que ce schéma est bien défini.

4.(b) Montrer que $y_n \in]0,1[$ pour $n \in [\![0,N]\!]$, indépendamment des valeurs de αh.

4.(c) On s'intéresse à la mesure dans laquelle la solution y de (3) vérifie le schéma numérique proposé. Pour $n \in [\![0, N-1]\!]$, on définit

$$R^n := \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - \alpha y(t_n)(1 - y(t_{n+1})).$$

En utilisant un développement de Taylor, montrer l'existence de $C > 0$ telle que, pour $n \in [\![0, N-1]\!]$,

$$|R^n| \leq Ch.$$

4.(d) On définit l'erreur d'approximation du schéma par $e^n := y(t_n) - y^n$ pour $n \in [\![0, N]\!]$. Démontrer que, pour $n \in [\![0, N-1]\!]$,

$$\frac{e^{n+1} - e^n}{h} = \alpha e^n (1 - y(t_{n+1})) - \alpha y^n e^{n+1} + R^n.$$

4.(e) En déduire que, pour $n \in [\![0, N-1]\!]$,

$$\left|e^{n+1}\right| \leq (1 + \alpha h) \left|e^n\right| + h \left|R^n\right|.$$

4.(f) En déduire que le schéma converge à l'ordre 1, *i.e.* qu'il existe $C_T > 0$, tel que, pour tout $h > 0$,

$$\max_{n \in [\![0,N]\!]} |e^n| \leq C_T h.$$

Bonus : m'adresser par e-mail[1] un fichier `Python` avec :

- une fonction `schema(T, y_0, N)` qui renvoie le vecteur $Y \in \mathbb{R}^{N+1}$ contenant la suite des valeurs $(y^n)_{n \in [\![0,N]\!]}$ produite par ce schéma numérique,
- un tracé en échelle log-log de $\max_{n \in [\![0,N]\!]} |e^n|$ en fonction de N pour N parcourant `range(10,2010,10)` dans le cas $\alpha = 1$ et $y_0 = \frac{1}{2}$ – on connaît la solution exacte par 1.(b). En particulier, on mettra en avant le coefficient directeur de la droite obtenue : c'est l'opposé de l'ordre de la méthode.

[1] `theo.gherdaoui@ens-rennes.fr`

Solution de l'exercice 1

1. On définit $f : \begin{bmatrix} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (t,y) & \mapsto & \lambda t^2 + y^2 \end{bmatrix}$. Alors

$$(1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} y'(t) & = & f(t,y(t)) & t\in\mathbb{R} \\ y(0) & = & 0 & \end{array} \right. .$$

De plus, f est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable (car $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$). Ainsi, le théorème de Cauchy-Lipschitz local s'applique et (1) admet une unique solution maximale, définie sur un intervalle ouvert I_λ contenant 0.

2. On note
$$\tilde{y} : t \in \tilde{I_\lambda} :=]-\beta_\lambda, -\alpha_\lambda[\mapsto -y(-t) \in \mathbb{R}.$$
Alors, $\tilde{y}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\tilde{I_\lambda}$ comme composée de fonctions régulières et, puisque y vérifie (1), on a pour tout $t\in\tilde{I_\lambda}$,
$$\tilde{y}'(t) = +y'(-t) = \lambda(-t)^2 + y(-t)^2 = \lambda t^2 + (-y(-t))^2 = \lambda t^2 + \tilde{y}(t)^2 = f(t,\tilde{y}(t)).$$
De plus, $\tilde{y}(0)=0$. Ainsi, $\tilde{y}$ est solution de (1). Par l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, $\tilde{I_\lambda} \subset I_\lambda$ (puisque y est la solution maximale, $\tilde{y}$ en est un restriction). Alors, $\alpha_\lambda \le -\beta_\lambda$ et $-\alpha_\lambda \le \beta_\lambda$. Par suite, $-\alpha_\lambda = \beta_\lambda$ et pour tout $t\in I_\lambda$
$$y = \tilde{y} \quad i.e. \quad \forall t\in I_\lambda,\ y(t) = -y(-t).$$
Ceci montre le résultat.

3. On remarque que 0 est solution sur $\mathbb{R}$ de (1). Par unicité – voir 1. – c'est l'unique solution globale du problème de Cauchy.

4.(a) Par définition, y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I_λ. De plus, $y' : t\in I_\lambda \mapsto \lambda t^2 + y(t)^2$. Ainsi, y' est $\mathcal{C}^1$ sur I_λ donc y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I_λ. On peut montrer par récurrence que y est $\mathcal{C}^\infty$ sur I_λ. Pour tout $t\in I_\lambda$, on a
$$y'(t) = \lambda t^2 + y(t)^2 \ge 0,$$
Par suite, y est croissante sur I_λ. Comme $y(0)=0$, y est positive sur $I_\lambda\cap\mathbb{R}^+$ et négative sur $I_\lambda\cap\mathbb{R}^-$. Étudions maintenant la convexité de y : pour tout $t\in I_\lambda$,
$$y''(t) = 2t\lambda + 2y(t)y'(t).$$
On rappelle que y' est une fonction positive sur I_λ.
- Si $t\in I_\lambda\cap\mathbb{R}^+$, alors $y''(t) = 2\underbrace{t\lambda}_{\ge 0} + 2\underbrace{y(t)}_{\ge 0}\underbrace{y'(t)}_{\ge 0} \ge 0$.
- Si $t\in I_\lambda\cap\mathbb{R}^-$, alors $y''(t) = 2\underbrace{t\lambda}_{\le 0} + 2\underbrace{y(t)}_{\le 0}\underbrace{y'(t)}_{\ge 0} \le 0$.

Par conséquent, y est convexe sur $I_\lambda\cap\mathbb{R}^+$ et concave sur $I_\lambda\cap\mathbb{R}^-$.

4.(b) En supposant que $\beta_\lambda = +\infty$, la solution est définie en tout temps positif. Pour tout $t\ge 1$,
$$y'(t) = \lambda t^2 + y(t)^2 \ge \min(1,\lambda)\left(t^2 + y(t)^2\right) \ge \min(1,\lambda)\left(1 + y(t)^2\right).$$
On en déduit que, pour tout $t\ge 1$,
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\arctan(y(t))\right) \ge \min(1,\lambda).$$
Par suite, on obtient en intégrant, pour tout $t\ge 1$
$$\arctan(y(t)) \ge \min(1,\lambda)(t-1) + \underbrace{\arctan(y(1))}_{=:c}.$$

4.(c) Comme $\lambda > 0$, la question précédente mène à $\arctan(y(t)) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. C'est une contradiction car arctan est à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi, $\beta_\lambda < +\infty$ et la solution n'est pas globale.

5.(a) Comme mentionné précédemment, y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I_λ. Cette fonction admet donc un développement limité à tout ordre. On vérifie que $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ et $y'''(0) = 2\lambda$. En particulier,

$$y'(t) = y'(0) + y''(0)t + \frac{y'''(0)}{2}t^2 + o(t^2) = \lambda t^2 + o(t^2) \underset{t\to 0}{\sim} \lambda t^2 < 0,$$

puisque $\lambda < 0$. Alors, il existe $\delta \in]0, \beta_\lambda[$, tel que, pour tout $t \in [0, \delta[$, $y'(t) \leq 0$. En reprenant la définition de y', on obtient,

$$\forall t \in [0, \delta[,\ y(t)^2 \leq -\lambda t^2.$$

5.(b) On suppose que ce n'est pas le cas : il existe $t^* \in [0, \beta_\lambda[$ tel que $y(t^*)^2 > -\lambda\,(t^*)^2$. Alors, κ est bien défini puisque c'est le supremum d'un ensemble non vide (il contient δ par la question précédente) et est majoré (par t^*). De plus, $0 < \delta \leq \kappa$, où δ est défini à la question 5.(a). Par définition,

$$\forall t \in [0, \kappa[, \quad y(t)^2 \leq -\lambda t^2.$$

En passant à la limite et par continuité de y, on obtient $y(\kappa)^2 \leq -\lambda\kappa^2$. Supposons que l'inégalité soit stricte *i.e.* $y(\kappa)^2 < -\lambda\kappa^2$. Alors, par continuité, il existe $\varepsilon > 0$, tel que, pour tout $t \in]\kappa-\varepsilon, \kappa+\varepsilon[$, $y(t)^2 < -\lambda t^2$. Par suite, cette inégalité est vérifiée sur $[0, \kappa+\varepsilon[$. Alors $\kappa + \varepsilon < \kappa$. C'est une contradiction. Ainsi, $y(\kappa)^2 = -\lambda\kappa^2$.

5.(c) En effectuant une développement de Taylor à l'ordre 1 et en utilisant l'égalité de la question précédente, on a

$$y(\kappa+h)^2 = y(\kappa)^2 + \left(y^2\right)'(\kappa)h + o(h) = -\lambda\kappa^2 + 2y(\kappa)\underbrace{y'(\kappa)}_{=\lambda\kappa^2+y(\kappa)^2=0}h + o(h) = -\lambda\kappa^2 + o(h).$$

Ainsi,

$$y(\kappa+h)^2 + \lambda(\kappa+h)^2 = -\lambda\kappa^2 + \lambda(\kappa^2 + 2\kappa h) + o(h) = 2\lambda\kappa h + o(h).$$

5.(d) Par l'estimation montrée à la question précédente, on a, pour $h > 0$ suffisamment petit,

$$y(\kappa+h)^2 + \lambda(\kappa+h)^2 \underset{h\to 0^+}{\sim} 2\lambda\kappa h < 0,$$

puisque $\kappa > 0$ par la question précédente. Alors, par continuité, il existe $\eta > 0$, tel que pour tout $t \in]\kappa-\eta, \kappa+\eta[$, $y(t)^2 \leq -\lambda t^2$. Par suite,

$$\forall t \in [0, \kappa+\eta[, \quad y(t)^2 \leq -\lambda t^2.$$

Ceci contredit la maximalité de κ. Ainsi, l'hypothèse formulée au départ est fausse, *i.e.*

$$\forall t \in [0, \beta_\lambda[,\ y(t)^2 \leq -\lambda t^2. \tag{4}$$

Si $\beta_\lambda < +\infty$, le théorème d'exposition en temps fini assure que $\lim\limits_{t\to\beta_\lambda^-} |y(t)| = +\infty$. Ceci contredit l'estimation (4). Alors, $\beta_\lambda = +\infty$. Puisque, par la question 2., la solution est impaire sur un intervalle centré en 0, on a $\alpha_\lambda = -\infty$ et $I_\lambda = \mathbb{R}$. La solution est globale.

Solution de l'exercice 2

1. On s'intéresse à une équation différentielle autonome dont le champs de vecteurs est localement lipschitzien. Par suite, le théorème de Cauchy-Lipschitz local assure que l'équation différentielle considérée admet une unique solution maximale y_α définie sur un intervalle ouvert contenant 0.

2.(a) On remarque que K est compact. En effet, y_{α_0} est une application continue (car solution d'une EDO). De plus, l'intervalle $[0, T]$ est compact. L'image d'un compact par une application continue étant compacte, on en déduit que $y_{\alpha_0}([0, T])$ est un compact. De plus, la boule unité $\overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^d$ est compacte (en dimension finie). Puisqu'une somme algébrique de compacts est compacte, l'ensemble K est compact. La fonction f étant localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^d$, elle est globalement lipschitzienne sur K.

2.(b) L'ensemble S est bien défini puisque $T < T(\alpha_0)$, donc les fonctions y_α et y_{α_0} peuvent être évaluées sur $[0, T(\alpha)[\cap[0, T[$. C'est un ensemble non vide. En effet,

$$\|\alpha - \alpha_0\| \leq \frac{e^{-LT}}{2} < 1.$$

Ainsi, S contient 0. Finalement, S est majoré – par $T \leq T(\alpha_0) < +\infty$. On peut donc considérer son supremum, $\tau = \sup S$. Montrons que $\tau > 0$: on sait que $T(\alpha) > 0$ et $T > 0$. Comme déjà constaté, $\|y_\alpha(0) - y_{\alpha_0}(0)\| = \|\alpha - \alpha_0\| < 1$, donc, par continuité, il existe $\delta > 0$ tel que $\delta < T(\alpha)$, $\delta < T$ et

$$\forall t \in [0, \delta[, \quad \|y_\alpha(t) - y_{\alpha_0}(t)\| \leq 1.$$

Ainsi, $\tau \geq \delta > 0$.

2.(c) Par définition, $\tau \leq T < T(\alpha_0)$ et $\tau \leq T(\alpha)$. On peut donc considérer les solutions sur l'intervalle $[0, \tau[$. En soustrayant les formulations intégrales des deux équations différentielles considérées, on a pour tout $t \in [0, \tau[$,

$$y_\alpha(t) - y_{\alpha_0}(t) = \alpha - \alpha_0 + \int_0^t (f(y_\alpha(s)) - f(y_{\alpha_0}(s)))\, \mathrm{d}s.$$

Par inégalité triangulaire, on obtient, pour tout $t \in [0, \tau[$,

$$\|y_\alpha(t) - y_{\alpha_0}(t)\| \leq \|\alpha - \alpha_0\| + \int_0^t \|f(y_\alpha(s)) - f(y_{\alpha_0}(s))\|\, \mathrm{d}s.$$

Par définition de τ, on a : pour tout $t \in [0, \tau[$, on a $\|y_\alpha(t) - y_{\alpha_0}(t)\| \leq 1$. Ainsi, pour tout $t \in [0, \tau[$,

$$\|y_\alpha(t)\| \leq \|y_{\alpha_0}(t)\| + \|y_\alpha(t) - y_{\alpha_0}(t)\| \leq \|y_{\alpha_0}(t)\| + 1.$$

Puisque $\tau \leq T$, $y_\alpha(t) \in K$ pour $t \in [0, \tau[$. Par la question 2.(a), f est globalement L-lipschitzienne sur cet ensemble, on obtient alors pour tout $t \in [0, \tau[$,

$$\|y_\alpha(t) - y_{\alpha_0}(t)\| \leq \|\alpha - \alpha_0\| + L \int_0^t \|y_\alpha(s) - y_{\alpha_0}(s)\|\, \mathrm{d}s.$$

En appliquant le lemme de Grönwall à des fonctions continues et positives, on obtient pour tout $t \in [0, \tau[$,

$$\|y_\alpha(t) - y_{\alpha_0}(t)\| \leq e^{Lt} \|\alpha - \alpha_0\|. \tag{5}$$

Montrons que cette inégalité est vérifiée en τ. Rappelons que $\tau \leq T < T(\alpha_0)$. Ainsi y_{α_0} est bien définie en τ. L'estimation (5) mène à, pour tout $t \in [0, \tau[$,

$$\|y_\alpha(t)\| \leq e^{Lt} \|\alpha - \alpha_0\| + \|y_{\alpha_0}(t)\|.$$

Alors, y_α n'explose pas en τ. Par le théorème des bouts, $\tau < T(\alpha)$. Le passage à la limite $t \to \tau^-$ dans (5) donne le résultat.

2.(d) Rappelons que, par 2.(c), on a $\tau < T(\alpha)$. En utilisant l'hypothèse de petitesse sur $\|\alpha - \alpha_0\|$ et l'inégalité obtenue à la question précédente, on a, pour tout $t \in [0, \tau]$,

$$\|y_\alpha(t) - y_{\alpha_0}(t)\| \leq \frac{e^{L(t-T)}}{2} \leq \frac{1}{2}. \tag{6}$$

On suppose que $\boldsymbol{\tau} < \mathbf{T}$. Alors, par continuité dans (6), il existe $\delta > 0$ tel que,

$$\tau + \delta < T(\alpha), \quad \tau + \delta < T$$

$$\text{pour tout } t \in [\tau - \delta, \tau + \delta], \quad \|y_\alpha(t) - y_{\alpha_0}(t)\| < 1.$$

Alors, $\tau + \delta \in S$ et $\tau + \delta \leq \tau$. C'est une absurdité. Ainsi, $\tau = T$.

2.(e) Comme $\tau \leq T(\alpha)$, on obtient par la question précédente $T \leq T(\alpha)$. Ceci conclut.

3. Soit $\varepsilon \in [0,1[$. On remarque ce système équivalent à

$$\left\{\begin{array}{ccc} (x,y)'(t) & = & f((x,y)(t)) \\ (x,y)(0) & = & (1,\varepsilon) \end{array}\right. \quad \text{avec} \quad f : \left[\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x^2 - y^2x^4, 0) \end{array}\right].$$

Puisque f est polynomiale, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc elle est localement lipschitzienne et rentre dans le cas d'étude. Cette équation admet donc une unique solution. On remarque que $y' = 0$ donc $y \equiv \varepsilon$ est constante. On est alors ramené à l'étude de $x' = x^2 - \varepsilon^2 x^4$ avec $x(0) = 1$. Soit $0 < \varepsilon < 1$. On a, pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$a^2 - \varepsilon^2 a^4 = 0 \Leftrightarrow a \in \left\{0, \pm\frac{1}{\varepsilon}\right\}.$$

En particulier, $x \equiv 0$ et $x \equiv \frac{1}{\varepsilon}$ sont des trajectoires constantes, solutions globales de l'équation $x' = x^2 - \varepsilon^2 x^4$. Alors, comme $0 < \varepsilon < 1$, on a $1 < \frac{1}{\varepsilon}$. Ainsi, l'unique solution maximale de $x' = x^2 - \varepsilon^2 x^4$, $x(0) = 1$ est globale : puisque $x(0) = 1 \in]0, \frac{1}{\varepsilon}[$, cette propriété est propagée en temps (la solution est coincée entre deux solutions constantes). Ainsi, la solution est bornée. Par principe de majoration a priori, elle est globale. Alors, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, $T((1,\varepsilon)) = +\infty$.

On s'intéresse au cas où $\varepsilon = 0$. Ainsi, $y \equiv 0$ et on doit résoudre $x' = x^2$, $x(0) = 1$. L'unique solution maximale de cette équation est $t \in]-\infty, 1[\mapsto \frac{1}{1-t}$. En effet, cette fonction est solution, et explose en 1^- donc elle n'admet pas de prolongement continu. Alors $T(1,0) = 1$. Ceci montre la non-continuité de T en $(1,0)$.

Remarque. *On a en fait montré la semi-continuité inférieure du temps d'existence positif de la solution d'une EDO. On peut aussi montrer*

- *la semi-continuité supérieure du temps d'existence négatif de la solution d'une EDO (de la même manière),*
- *la continuité du temps d'existence positif/négatif de la solution d'une EDO dans le cas où $d = 1$.*

Solution de l'exercice 3

1. Par hypothèse, l'application a est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ et globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable donc le système admet une unique solution globale $X(\cdot; x, t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$.

2. Soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ une solution de (2). Soient $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$. En appliquant la règle de le chaîne, on obtient pour tout $s \in \mathbb{R}^+$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(u(s, X(s;x,t))\right) = \left(\partial_t u + a \cdot \nabla_x u\right)(s, X(s;x,t)) = 0.$$

Cette quantité est nulle puisque u est solution de (2).

3. En utilisant le résultat de la question 2., on obtient, pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$,

$$u(t, X(t;x,t)) = u(t,x) = u(0, X(0;x,t)) = u_0(X(0;x,t)).$$

4. La question 3. prouve l'unicité puisqu'on a une formule pour u. Si u est une solution sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ de (2), alors nécessairement $u(t,x) = u_0(X(0;x,t))$ pour $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$. Montrons maintenant l'existence. On définit

$$u : (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \mapsto u_0(X(0;x,t)),$$

où X est définie à la question 1. Premièrement, u à la régularité attendue. En effet, comme $a \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, le théorème de dépendance continue par rapport aux données initiales affirme que $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$. Puisque $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on obtient $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ comme composée de fonctions régulières. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$u(0, x) = u_0(X(0; x, 0)) = u_0(x).$$

La condition initiale est donc vérifiée. Montrons enfin que l'équation est satisfaite. Pour tout $(t, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$,

$$u(t, X(t; y, 0)) = u_0(X(0; X(t; y, 0), t)) = u_0(y).$$

Cette quantité est donc indépendante de t. Ainsi, pour tout $(t, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(u(t, X(t; y, 0))\right) = 0.$$

En utilisant la règle de la chaîne, on a

$$\partial_t u(t, X(t; y, 0)) + \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} u(t, X(t; y, 0)) X_i'(t; y, 0) = 0,$$

en ayant noté $X = (X_i)_{i \in [\![1,d]\!]}$. Puisque X est solution d'une équation différentielle, on a

$$\partial_t u(t, X(t; y, 0)) + \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} u(t, X(t; y, 0)) a_i(t, X(t; y, 0)) = 0.$$

Comme l'application $y \in \mathbb{R}^d \mapsto X(t; y, 0) \in \mathbb{R}^d$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$, on conclut. L'équation est bien vérifiée pour $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$.

5. L'application $a : (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mapsto t - x \in \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Cette équation rentre donc dans le cadre d'étude avec $d = 1$. Soit $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. On résout l'équation des caractéristiques associée :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} X'(s) & = & s - X(s), & s \in \mathbb{R}^+ \\ X(t) & = & x & \end{array} \right. .$$

L'équation homogène admet pour solution $s \in \mathbb{R}^+ \mapsto \lambda e^{-s}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Une solution particulière est donnée par $s \in \mathbb{R}^+ \mapsto s - 1$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $s \in \mathbb{R}^+$,

$$X(s; x, t) = \lambda e^{-s} + s - 1.$$

On obtient finalement $\lambda = (x + 1 - t)e^t$. Finalement pour tout $(s, x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$,

$$X(s; x, t) = (x + 1 - t)e^{t-s} + s - 1.$$

Finalement, par la question 4., l'unique solution de l'équation de transport est donnée par

$$u : (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mapsto u_0((x + 1 - t)e^t - 1) \in \mathbb{R}.$$

6. L'application $a : (t, (x, y)) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \mapsto (-y, x) \in \mathbb{R}^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$ et globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Soit $(t, (x, y)) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$. L'équation des caractéristiques est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} (X_1, X_2)'(s) & = & (-X_2, X_1)(s), & s \in \mathbb{R}^+ \\ (X_1, X_2)(t) & = & (x, y) & \end{array} \right. .$$

On est alors amené à résoudre le système linéaire $X'(s) = AX(s)$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Puisque c'est un système à coefficients constants, la solution est donnée par, pour tout $s \in \mathbb{R}^+$,

$$X(s; (x, y), t) = e^{(s-t)A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Comme $A^2 = -I_2$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^{2n} = \left(A^2\right)^n = (-1)^n I_2 \quad \text{et} \quad A^{2n+1} = A^{2n}A = (-1)^n A.$$

Alors,

$$e^{(s-t)A} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (s-t)^{2n}}{(2n)!} I_2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (s-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} A = \cos(s-t) I_2 + \sin(s-t) A.$$

Finalement, pour tout $(s, (x, y), t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$,

$$X(s; (x, y), t) = (\cos(s-t)x - \sin(s-t)y, \sin(s-t)x + \cos(s-t)y).$$

Finalement, par la question 4., l'unique solution de l'équation de transport est donnée par

$$u : (t, (x, y)) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \mapsto u_0(\cos(t)x + \sin(t)y, -\sin(t)x + \cos(t)y) \in \mathbb{R}^2.$$

Solution de l'exercice 4

1.(a) L'équation différentielle que l'on considère est équivalente au problème de Cauchy autonome

$$\begin{cases} y'(t) & = & f(y(t)) \\ y(0) & = & y_0 \end{cases}, \quad \text{avec} \quad f : \left[\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \alpha y(1-y) \end{array} \right].$$

Cette application est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale), elle est donc localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de de Cauchy-Lipschitz local, cette équation admet une unique solution maximale (I, y). Remarquons que les trajectoires constantes 0 et 1 sont solutions de l'équation différentielle $y' = \alpha y(1-y)$. Puisque $y_0 \in]0, 1[$, on a de même, pour tout $t \in I$, $y(t) \in]0, 1[$. Ainsi, la solution maximale est bornée. Par théorème de majoration a priori, l'unique solution maximale est globale, *i.e.* $I = \mathbb{R}$. On a de plus l'encadrement suivant : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $0 < y(t) < 1$.

1.(b) On remarque que l'unique solution globale de cette équation différentielle est

$$y : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^t}{1+e^t}.$$

En effet, cette fonction est solution sur $\mathbb{R}$. Par l'unicité donnée par la question 1.(a), c'est l'unique solution globale.

2.(a) Comme suggéré, on s'intéresse à la fonction $f : y \in [0, 1] \mapsto y + \alpha h y(1-y) \in \mathbb{R}$. C'est une fonction polynomiale, elle est donc dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout $y \in [0, 1]$,

$$f'(y) = 1 + \alpha h(1 - 2y) = 1 + \alpha h - 2\alpha h y.$$

On rappelle que $h > 0$ et $\alpha > 0$. Ainsi, pour tout $y \in [0, 1]$,

$$f'(y) > 0 \Leftrightarrow y < \frac{1 + \alpha h}{2\alpha h}.$$

De plus,

$$\frac{1 + \alpha h}{2\alpha h} > 1 \Leftrightarrow \alpha h < 1,$$

ce qui est le cas. Ainsi $f'(y) > 0$ pour $y \in [0, 1]$. La fonction f est strictement croissante sur $[0, 1]$. On en déduit alors le tableau de variations suivant :

y	0		1
$f'(y)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	1

Ainsi l'intervalle $]0,1[$ est stable par la fonction f sous l'hypothèse $\alpha h < 1$. Montrons maintenant le résultat par récurrence sur $n \in [\![0,N]\!]$ en remarquant que pour $n \in [\![0,N-1]\!]$,

$$y^{n+1} = y^n + \alpha h y^n(1-y^n) = f(y^n).$$

Initialisation : par hypothèse $y^0 = y_0 \in]0,1[$ donc la propriété est vraie au rang initial $n = 0$.
Hérédité : on suppose le résultat acquis pour un certain $n \in [\![0,N-1]\!]$. Montrons-le au rang $n+1$. Par hypothèse de récurrence, $y^n \in]0,1[$. Or $y^{n+1} = f(y^n)$. De plus l'intervalle $]0,1[$ est stable par f. Ainsi, $y^{n+1} \in]0,1[$. Ceci conclut.

2.(b) On reprend l'étude de la fonction f introduite à la question précédente. Dans le cas où $\alpha h > 1$, $f'(y)$ change de signe sur l'intervalle $[0,1]$. On a le tableau de variations suivant :

y	0		$\frac{1+\alpha h}{2\alpha h}$		1
$f'(y)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$		$\searrow$	1

On pose alors $y^0 := \dfrac{1+\alpha h}{2\alpha h} \in]0,1[$. Ainsi,

$$y^1 = f(y^0) = \frac{(1+\alpha h)^2}{4\alpha h}.$$

De plus,

$$y^1 > 1 \Leftrightarrow (\alpha h - 1)^2 > 0.$$

Puisque cette inégalité est vraie, le y^0 considéré convient. Ce schéma ne respecte donc pas la propriété : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) \in]0,1[$ exhibée à la question 1.(a) dès l'instant $t_1 = \frac{1}{h}$.

3. Montrons le lemme de Grönwall discret annoncé. Remarquons que, par l'hypothèse, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{z^k}{(1+K)^k} \leq \frac{z^{k-1}}{(1+K)^{k-1}} + \frac{M^{k-1}}{(1+K)^k}.$$

Alors, par l'inégalité précédente, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z^n = (1+K)^n \frac{z^n}{(1+K)^n} = (1+K)^n \left[\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\frac{z^k}{(1+K)^k} - \frac{z^{k-1}}{(1+K)^{k-1}} \right)}_{\leq \frac{M^{k-1}}{(1+K)^k}} + \frac{z^0}{(1+K)^0} \right].$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z^n \leq (1+K)^n z^0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{M^{k-1}}{(1+K)^k}(1+K)^n = (1+K)^n z^0 + \sum_{k=1}^{n} M^{k-1}(1+K)^{n-k}.$$

Avec un décalage d'indice dans la somme, on obtient le résultat annoncé.

4.(a) On montre par récurrence sur $n \in [\![0,N]\!]$ que y^n est bien défini et est strictement positif. Le résultat est acquis au rang $n = 0$ car $y^0 = y_0 \in]0,1[$. Supposons que la propriété est vraie au rang $n \in [\![0,N-1]\!]$. Alors, la définition du schéma donne

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{h} = \alpha y^n(1 - y^{n+1}) \Leftrightarrow y^{n+1}(1 + \alpha h y^n) = y^n(1 + \alpha h)$$

Puisque $y^n > 0$ (par hypothèse de récurrence), on a $1 + \alpha h y^n > 1$, et on peut diviser. Ainsi y^{n+1} est bien uniquement définie et on a

$$y^{n+1} = \frac{y^n(1+\alpha h)}{1+\alpha h y^n} > 0.$$

Ceci montre le résultat par récurrence.

4.(b) On étudie la fonction $f : y \in [0,1] \mapsto \dfrac{y(1+\alpha h)}{1+\alpha h y}$. Elle est bien définie, car le dénominateur est une somme de deux quantités positives (dont l'une l'est strictement), dérivable sur $[0,1]$ comme quotient de telles fonctions, et pour tout $y \in [0,1]$,

$$f'(y) = \frac{(1+\alpha h)(1+\alpha h y) - y(1+\alpha h)\alpha h}{(1+\alpha h y)^2} = \frac{1+\alpha h}{(1+\alpha h y)^2} > 0.$$

On obtient alors le tableau de variations suivant :

y	0		1
$f'(y)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	1

On en déduit que l'intervalle $]0,1[$ est stable par f, indépendamment de la valeur de αh. Puisque pour tout $n \in [\![0, N-1]\!]$, $y^{n+1} = f(y^n)$ et que $y^0 \in]0,1[$, on obtient le résultat par récurrence (comme dans la question 2.(a)).

4.(c) On effectue un développement de Taylor de y à l'ordre 2 (c'est possible puisque $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ comme solution d'une EDO, et $y' = \alpha y(1-y) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ donc $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$). Pour tout $n \in [\![0, N-1]\!]$,

$$y(t_{n+1}) = y(t_n + h) = y(t_n) + h y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n),$$

pour un certain $\xi_n \in]t_n, t_n + h[$. Alors, pour tout $n \in [\![0, N-1]\!]$,

$$R^n = \frac{1}{h}\left(h y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)\right) - \alpha y(t_n)(1 - y(t_n)) + \alpha y(t_n)\left(h y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)\right).$$

Ainsi, pour tout $n \in [\![0, N-1]\!]$,

$$R^n = \underbrace{y'(t_n) - \alpha y(t_n)(1 - y(t_n))}_{=0} + \frac{h}{2} y''(\xi_n) + \alpha y(t_n)\left(h y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)\right).$$

En utilisant l'encadrement de y donné à la question 1.(a), on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|y(t)| \leq 1, \quad |y'(t)| = \alpha\,|y(t)(1 - y(t))| \leq \frac{\alpha}{4}, \quad h \leq T.$$

Ainsi, ces inégalités donnent, pour tout $n \in [\![0, N-1]\!]$,

$$|R^n| \leq \left(\frac{\|y''\|_{L^\infty(0,T)}}{2}(1 + \alpha T) + \frac{\alpha}{4}\right) h.$$

4.(d) Pour tout $n \in [\![0, N-1]\!]$, on a par définition,

$$\frac{e^{n+1} - e^n}{h} - \alpha e^n (1 - y(t_{n+1})) + \alpha y^n e^{n+1} = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - \frac{y^{n+1} - y^n}{h}$$
$$- \alpha y(t_n)(1 - y(t_{n+1})) + \alpha y^n (1 - y(t_{n+1})) + \alpha y^n (y(t_{n+1}) - y^{n+1})$$

Ainsi, on a pour tout $n \in [\![0, N-1]\!]$,

$$\frac{e^{n+1} - e^n}{h} - \alpha e^n (1 - y(t_{n+1})) + \alpha y^n e^{n+1} = R^n \underbrace{- \frac{y^{n+1} - y^n}{h} + \alpha y^n (1 - y^{n+1})}_{=0}.$$

On obtient donc le résultat.

4.(e) On en déduit que, pour tout $n \in [\![0, N-1]\!]$,

$$e^{n+1} = e^n + \alpha h e^n (1 - y(t_{n+1})) - \alpha h y^n e^{n+1} + hR^n.$$

Ainsi, pour tout $n \in [\![0, N-1]\!]$,

$$e^{n+1}(1 + \alpha h y^n) = e^n \left[1 + \alpha h (1 - y(t_{n+1}))\right] + hR^n.$$

Par la question 4.(b), $y^n \in]0, 1[$. Alors $1 + \alpha h y^n > 1$. Par suite, pour tout $n \in [\![0, N-1]\!]$,

$$\left|e^{n+1}\right| \leq \left|e^{n+1}\right| (1 + \alpha h y^n) = \left|e^n \left[1 + \alpha h (1 - y(t_{n+1}))\right] + hR^n\right|.$$

Par l'inégalité triangulaire, on a pour tout $n \in [\![0, N-1]\!]$,

$$\left|e^{n+1}\right| \leq |e^n| \left[1 + \alpha h \underbrace{|1 - y(t_{n+1})|}_{\leq 1}\right] + h |R^n|.$$

En utilisant à nouveau l'encadrement obtenu sur la solution en question 1.(a), on obtient finalement pour tout $n \in [\![0, N-1]\!]$,

$$\left|e^{n+1}\right| \leq |e^n| (1 + \alpha h) + h |R^n|.$$

Ceci conclut.

4.(f) La suite $(e^n)_{n \in [\![0, N]\!]}$ satisfait une inégalité de type Grönwall avec $K = \alpha h$ et $M^k = h|R^k|$. En appliquant le lemme démontré en Partie 3, on a, pour tout $n \in [\![0, N]\!]$,

$$|e^n| \leq (1 + K)^n \underbrace{e^0}_{=0} + h \sum_{k=0}^{n-1} \left|R^k\right| (1 + \alpha h)^{n-1-k}.$$

Pour tout $n \in [\![0, N]\!]$, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$(1 + \alpha h)^{n-1-k} \leq (1 + \alpha h)^{n-1} \leq (1 + \alpha h)^N = e^{N \ln\left(1 + \alpha \frac{T}{N}\right)} \leq e^{\alpha T},$$

en utilisant l'inégalité de convexité $\ln(1 + x) \leq x$ pour $x \in \mathbb{R}^+$. On en déduit donc en utilisant le résultat de la question 4.(c) que, pour tout $n \in [\![0, N]\!]$,

$$\max_{n \in [\![0, N]\!]} |e^n| \leq h e^{\alpha T} \sum_{k=0}^{N-1} Ch = e^{\alpha T} C h^2 N = \left(C T e^{\alpha T}\right) h.$$

Ceci conclut.

Bonus :

```
T=5
y_0=1/2

def solution(t):
        return exp(t)/(1+exp(t))

def schema(T,y_0,N):
        h=T/N
```

```
        Y=[y_0]
        t=0
        y=y_0
        for k in range(1,N+1):
                y=y*(1+h)/(1+h*y)
                t+=h
                Y.append(y)
        return Y

liste_N=range(10,2010,10)
Err=[]
for N in liste_N:
        liste_T=linspace(0,T,N+1)
        Erreur=array(schema(T,y_0,N))-(solution(liste_T))
        Err.append(max(abs(Erreur)))
plot(log(liste_N),log(Err))
xlabel('Nombre de points N, en echelle logarithmique')
ylabel('Erreur en norme infinie, en echelle logarithmique')
title("Illustration de l'ordre de convergence de la methode")
show()
(a,b)=polyfit(log(liste_N),log(Err),1)
print(a)
```

Python renvoie la valeur suivante : `-0.9874904696094321`. On retrouve l'ordre 1 démontré en question 4.(f). Le graphique obtenu est le suivant :