L3 Mathématiques
ENS Rennes

Équations Différentielles
2024 – 2025

Devoir Maison
À rendre pour le 17/03/2025

Ce devoir est individuel. La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront en compte pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les exercices 1 et 2 seront traités ***obligatoirement*** *par tous les étudiants. Vous rendrez* ***au choix*** *l'exercice 3 ou l'exercice 4. Vous pouvez évidemment faire les deux.*

Exercice 1

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On intéresse à l'équation différentielle

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'(t) & = & \lambda t^2 + y(t)^2, \quad t \in \mathbb{R} \\ y(0) & = & 0 \end{array}\right. . \tag{1}$$

1. Montrer que (1) admet une unique solution maximale y définie sur un intervalle ouvert $I_\lambda := (\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$, où $\alpha_\lambda < 0 < \beta_\lambda$.
2. Montrer que $\alpha_\lambda = -\beta_\lambda$ et que y est impaire sur I_λ.
3. Résoudre cette équation dans le cas où $\lambda = 0$.
4. Dans cette question, $\lambda > 0$.
   4.(a) Étudier la monotonie et la convexité de y sur I_λ.
   4.(b) On suppose que $\beta_\lambda = +\infty$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \geq 1$,
   $$\arctan(y(t)) \geq \min(1, \lambda)(t-1) + c.$$
   4.(c) En déduire que la solution n'est pas globale.
5. Dans cette question, $\lambda < 0$.
   5.(a) Donner un équivalent simple de y' en 0. En déduire l'existence de $\delta \in]0, \beta_\lambda[$ tel que, pour tout $t \in [0, \delta[, \quad y(t)^2 \leq -\lambda t^2$.
   5.(b) On souhaite montrer que, pour tout $t \in [0, \beta_\lambda[, \quad y(t)^2 \leq -\lambda t^2$. On raisonne par l'absurde : on suppose que ce n'est pas le cas. Soit $\kappa := \sup\{t \in]0, \beta_\lambda[, \ \forall s \in [0, t[, \ y(s)^2 \leq -\lambda s^2\}$. Justifier que κ est bien défini, $\kappa > 0$, puis que $y(\kappa)^2 = -\lambda \kappa^2$.
   5.(c) Montrer que
   $$y(\kappa + h)^2 + \lambda(\kappa + h)^2 = 2\lambda\kappa h + o(h).$$
   5.(d) En déduire une contradiction, puis que la solution est globale.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une application localement lipschitzienne.

1. On fixe $\alpha \in \mathbb{R}^d$. Montrer que le problème de Cauchy autonome $\left\{\begin{array}{rcl} y'(t) & = & f(y(t)), \quad t \in \mathbb{R} \\ y(0) & = & \alpha \end{array}\right.$ admet une unique solution maximale y_α définie sur un intervalle ouvert contenant 0. On note $T(\alpha) \in]0, +\infty]$ le temps positif d'existence de la solution maximale.

2. On souhaite démontrer la propriété suivante : pour tout $\alpha_0 \in \mathbb{R}^d$, pour tout $0 < T < T(\alpha_0)$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $\|\alpha - \alpha_0\| \leq \eta$, on a $T(\alpha) \geq T$.

   Soient $\alpha_0 \in \mathbb{R}^d$ et $0 < T < T(\alpha_0)$.

   2.(a) Montrer que f est globalement lipschitzienne sur l'ensemble $K := y_{\alpha_0}([0,T]) + \overline{B(0,1)}$. On note L sa constante de Lipschitz.

   2.(b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $\|\alpha - \alpha_0\| \leq \frac{e^{-LT}}{2}$. On note

   $$S = \{t \in [0, T(\alpha)[\cap [0, T[\text{ tel que } \|y_\alpha(s) - y_{\alpha_0}(s)\| \leq 1, \ \forall s \in [0,t]\}.$$

   Justifier que $\tau := \sup S$ est bien défini et vérifie $\tau > 0$.

   2.(c) Montrer que pour tout $t \in [0, \tau]$, $\|y_\alpha(t) - y_{\alpha_0}(t)\| \leq e^{Lt} \|\alpha - \alpha_0\|$.

   2.(d) En déduire que $\tau = T$. On pourra raisonner par l'absurde.

   2.(e) Conclure.

3. On veut montrer que la fonction T n'est pas nécessaire continue. On considère le système différentiel suivant $\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x^2 - y^2 x^4 \\ y' & = & 0 \end{array} \right.$. Montrer qu'il entre dans le cadre d'étude de cet exercice. En s'intéressant aux différentes conditions initiale $\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$ pour $\varepsilon \in [0,1)$, conclure.

   Hint : on pourra s'intéresser aux trajectoires constantes.

Exercice 3

Dans cet exercice, on considère

$$a : (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \mapsto (a_i(t,x))_{i \in [\![1,d]\!]} \in \mathbb{R}^d$$

une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable sur $\mathbb{R}^d$ et $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Le but de cet exercice est d'établir l'existence d'une unique solution $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ à l'équation de transport suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \displaystyle\sum_{i=1}^d a_i(t,x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x) = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d, \\ & \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{array} \right. \tag{2}$$

1. On fixe $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$. Justifier que l'équation différentielle suivante admet une unique solution globale $\left\{ \begin{array}{lcl} X'(s) & = & a(s, X(s)), \quad s \in \mathbb{R}^+ \\ X(t) & = & x \end{array} \right.$. On la note $X(\cdot; x, t)$ dans la suite de l'exercice.

2. On suppose donnée $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ une solution de (2). Montrer que, pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, l'application $s \in \mathbb{R}^+ \mapsto u(s, X(s;x,t)) \in \mathbb{R}$ est constante.

3. En déduire que, pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, $u(t,x) = u_0(X(0;x,t))$.

4. Conclure.

5. Soit $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation de transport suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + (t-x)\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ & \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

6. Soit $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Résoudre l'équation de transport suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,(x,y)) - y\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,(x,y)) + x\dfrac{\partial u}{\partial y}(t,(x,y)) = 0, & (t,(x,y)) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2, \\ \\ u(0,(x,y)) = u_0(x,y), & (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Exercice 4

Soit $\alpha > 0$, un paramètre et $y_0 \in]0,1[$. On considère l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y' &= & \alpha y(1-y) \\ y(0) &= & y_0 \end{cases} . \tag{3}$$

Partie 1 : étude théorique.

1.(a) Montrer que cette équation différentielle admet une unique solution globale. Donner un encadrement de y sur $\mathbb{R}$.

1.(b) Déterminer l'expression de l'unique solution de (3) pour $\alpha = 1$ et $y_0 = \frac{1}{2}$.

On s'intéresse à la résolution numérique de cette équation différentielle. On fixe $T > 0$ et on considère $(t_n)_{n\in[\![0,N]\!]}$ la subdivision régulière de l'intervalle $[0,T]$ à $N+1$ points de pas $h := \frac{T}{N}$. On définit $y^0 = y_0$. Le but est de produire une suite $(y^n)_{n\in[\![0,N]\!]}$ approximant $(y(t_n))_{n\in[\![0,N]\!]}$.

Partie 2 : schéma d'Euler explicite. On considère le schéma d'Euler explicite associé à cette équation : pour $n \in [\![0, N-1]\!]$,

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{h} = \alpha y^n(1 - y^n).$$

2.(a) Dans cette question, on suppose que $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{h} < \mathbf{1}$. Montrer que, pour tout $n \in [\![0,N]\!]$, $y^n \in]0,1[$.
Hint : on pourra étudier la stabilité de l'intervalle $]0,1[$ *par la fonction* $f : y \mapsto y + \alpha h y(1-y)$.

2.(b) On suppose dans cette question que $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{h} > \mathbf{1}$. Montrer qu'il existe un $y^0 \in]0,1[$ tel que $y^1 > 1$. Commenter.

Partie 3 : une inégalité. Soient $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(M^n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de nombres réels positifs et $K > 0$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z^{n+1} \leq (1+K)z^n + M^k$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z^n \leq (1+K)^n z^0 + \sum_{k=0}^{n-1} M^k (1+K)^{n-1-k}.$$

Partie 4 : un schéma semi-implicite. On souhaite utiliser une méthode numérique qui permette de vérifier $y^n \in]0,1$, indépendamment des valeurs de αh. Pour ce faire on propose d'étudier le schéma semi-implicite suivant : pour $n \in [\![0, N-1]\!]$,

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{h} = \alpha y^n(1 - y^{n+1}).$$

4.(a) Montrer que ce schéma est bien défini.

4.(b) Montrer que $y_n \in]0,1[$ pour $n \in [\![0,N]\!]$, indépendamment des valeurs de αh.

4.(c) On s'intéresse à la mesure dans laquelle la solution y de (3) vérifie le schéma numérique proposé. Pour $n \in [\![0, N-1]\!]$, on définit

$$R^n := \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} - \alpha y(t_n)(1 - y(t_{n+1})).$$

En utilisant un développement de Taylor, montrer l'existence de $C > 0$ telle que, pour $n \in [\![0,N]\!]$,

$$|R^n| \leq Ch.$$

4.(d) On définit l'erreur d'approximation du schéma par $e^n := y(t_n) - y^n$ pour $n \in [\![0, N]\!]$. Démontrer que, pour $n \in [\![0, N-1]\!]$,

$$\frac{e^{n+1} - e^n}{h} = \alpha e^n (1 - y(t_{n+1})) - \alpha y^n e^{n+1} + R^n.$$

4.(e) En déduire que, pour $n \in [\![0, N-1]\!]$,

$$\left| e^{n+1} \right| \leq (1 + \alpha h) \left| e^n \right| + h \left| R^n \right|.$$

4.(f) En déduire que le schéma converge à l'ordre 1, *i.e.* qu'il existe $C_T > 0$, tel que, pour tout $h > 0$,

$$\max_{n \in [\![0,N]\!]} |e^n| \leq C_T h.$$

Bonus : m'adresser par e-mail[1] un fichier `Python` avec :

- une fonction `schema(T, y_0, N)` qui renvoie le vecteur $Y \in \mathbb{R}^{N+1}$ contenant la suite des valeurs $(y^n)_{n \in [\![0,N]\!]}$ produite par ce schéma numérique,
- un tracé en échelle log-log de $\max_{n \in [\![0,N]\!]} |e^n|$ en fonction de N pour N parcourant `range(10,2010,10)` dans le cas $\alpha = 1$ et $y_0 = \frac{1}{2}$ – on connaît la solution exacte par 1.(b). En particulier, on mettra en avant le coefficient directeur de la droite obtenue : c'est l'opposé de l'ordre de la méthode.

[1] `theo.gherdaoui@ens-rennes.fr`