Présentation de la thèse

Étude non linéaire de la contrôlabilité en temps petit de systèmes multi-commandés

Théo Gherdaoui

encadré par Karine Beauchard et Frédéric Marbach

13 octobre 2022

Introduction :

Contrôlabilité : ajuster un paramètre (qui dépend du temps) d'une équation différentielle afin que la solution atteigne une cible préalablement définie.

Introduction :

Contrôlabilité : ajuster un paramètre (qui dépend du temps) d'une équation différentielle afin que la solution atteigne une cible préalablement définie.

Cadre du stage : systèmes affines en dimension finie.

Introduction :

Contrôlabilité : ajuster un paramètre (qui dépend du temps) d'une équation différentielle afin que la solution atteigne une cible préalablement définie.

Cadre du stage : systèmes affines en dimension finie.

Cadre d'un premier résultat de la thèse : équation de Schrödinger bilinéaire à deux contrôles.

Définition (Système affine)

On appelle système affine tout système de la forme

$$x' = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x), \tag{1}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état, et $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$, le contrôle. On appelle **dérive** le terme f_0.

Définition (Système affine)

On appelle système affine tout système de la forme

$$x' = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x), \tag{1}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état, et $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$, le contrôle. On appelle **dérive** le terme f_0.

Remarque : si $x' = f(x, u)$ est un système différentiel, alors $y := \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$ vérifie $y' = \begin{pmatrix} f(y) \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(y) \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{m} v_i \begin{pmatrix} 0_n \\ (\delta_{i,j})_{1 \leq j \leq m} \end{pmatrix}$ avec $v := u'$.

$$x' = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x) \quad (*)$$

Dans la suite, on suppose $f_0, \cdots, f_m$ réguliers, et $f_0(0) = 0$ (équilibre). On considère $(*)$ dont on note $x(t; u, p)$ la solution à l'instant t, avec pour condition initiale $x(0; u, p) = p$.

$$x' = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x) \quad (*)$$

Dans la suite, on suppose $f_0, \cdots, f_m$ réguliers, et $f_0(0) = 0$ (équilibre). On considère $(*)$ dont on note $x(t; u, p)$ la solution à l'instant t, avec pour condition initiale $x(0; u, p) = p$.

Question : le système est-il **S**mall **T**ime **L**ocally **C**ontrollable, *i.e.*, a-t-on : $\forall T > 0$, $\forall \eta > 0$, $\exists \delta > 0$, tel que $\forall x^* \in \mathbb{R}^n$, $\|x^*\| \leq \delta$, alors, $\exists u \in L^\infty(0, T)$ tel que $\|u\|_\infty \leq \eta$ tel $x(T, u, 0) = x^*$.

$$x' = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x) \quad (*)$$

Dans la suite, on suppose $f_0, \cdots, f_m$ réguliers, et $f_0(0) = 0$ (équilibre). On considère $(*)$ dont on note $x(t; u, p)$ la solution à l'instant t, avec pour condition initiale $x(0; u, p) = p$.

Question : le système est-il **S**mall **T**ime **L**ocally **C**ontrollable, *i.e.*, a-t-on : $\forall T > 0$, $\forall \eta > 0$, $\exists \delta > 0$, tel que $\forall x^* \in \mathbb{R}^n$, $\|x^*\| \leq \delta$, alors, $\exists u \in L^\infty(0, T)$ tel que $\|u\|_\infty \leq \eta$ tel $x(T, u, 0) = x^*$.

Pas de CNS en toute généralité.
Certaines CN/CS sont connues $\longrightarrow$ se formulent avec des crochets de Lie.

Définition (Crochet de Lie)

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, et $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^n$ deux champs de vecteurs $\mathcal{C}^1$. On définit le crochet de Lie de X, Y, noté $[X, Y]$ comme valant :

$$[X, Y] : x \in \Omega \mapsto DY(x)(X(x)) - DX(x)(Y(x)) \in \mathbb{R}^n.$$

$[X, Y] \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Définition (Crochet de Lie)

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, et $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^n$ deux champs de vecteurs $\mathcal{C}^1$. On définit le crochet de Lie de X, Y, noté $[X, Y]$ comme valant :

$$[X, Y] : x \in \Omega \mapsto DY(x)(X(x)) - DX(x)(Y(x)) \in \mathbb{R}^n.$$

$[X, Y] \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Définition (Itérés des crochets)

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, et $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^n$ deux champs de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$. On définit pour $k \in \mathbb{N}$, $ad_X^k(Y)$ par récurrence par :

$$ad_X^0(Y) = Y \text{ et } ad_X^{k+1}(Y) = [X, ad_X^k(Y)].$$

Motivations :

1. **Les crochets de Lie mesurent un problème de commutativité :** si pour tout t, s, $[A(t), A(s)] = 0$, alors $\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & A(t)x(t) \\ x(0) & = & x_0 \end{array}\right.$ admet pour solution $x(t) = \exp\left(\int_0^t A(s)\mathrm{d}s\right) x_0$.

Motivations :

1. **Les crochets de Lie mesurent un problème de commutativité :** si pour tout t, s, $[A(t), A(s)] = 0$, alors $\begin{cases} x'(t) & = & A(t)x(t) \\ x(0) & = & x_0 \end{cases}$ admet pour solution $x(t) = \exp\left(\int_0^t A(s)\mathrm{d}s\right) x_0$.

2. **Les crochets de Lie sont des mouvements naturels :**

exemple : pour $\begin{cases} x_1' & = & u \\ x_2' & = & x_1^2 \end{cases}$, $f_0(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}$ et $f_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors $[f_1, [f_0, f_1]](0) = -2e_2$, direction impossible car $x_2' \geq 0$.

Mais, dans $(*)$, pour $m = 1$, le contrôle $u = -\eta \mathbb{1}_{(0,\varepsilon)} + \eta \mathbb{1}_{(\varepsilon, 2\varepsilon)}$ donne $x(2\varepsilon) = \eta\varepsilon^2 [f_0, f_1](0) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$.

3. **L'information concernant la STLC est contenue dans l'évaluation des crochets de Lie en** 0 **:** si x vérifie $x' = f_0(x) + uf_1(x)$. Soit $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme régulier, vérifiant $\Phi(0) = 0$, alors, $y = \Phi(x)$ vérifie $y' = g_0(y) + ug_1(y)$, où $g_i(y) = d\Phi(\Phi^{-1}(y))(f_i(\Phi^{-1}(y)))$. De plus,
$$[g_0, g_1](0) = d\Phi(0)([f_0, f_1](0)),$$
et de même pour tous les autres crochets.

Pour des champs de vecteurs analytiques, la réciproque est vraie (Krener).

Théorème (Hermann et Nagano, 1963-66)

Si $f_0, \cdots, f_m$ sont des champs de vecteurs analytiques, et si le système (1) est STLC, alors la LARC est vérifiée, i.e.

$$\{g(0), g \in Lie(f_0, \cdots, f_m)\} = \mathbb{R}^n.$$

Remarques :

Théorème (Hermann et Nagano, 1963-66)

Si $f_0, \cdots, f_m$ sont des champs de vecteurs analytiques, et si le système (1) est STLC, alors la LARC est vérifiée, i.e.

$$\{g(0), g \in Lie(f_0, \cdots, f_m)\} = \mathbb{R}^n.$$

Remarques :

1. $\begin{cases} x_1' = u \\ x_2' = x_1^2 \end{cases}$ n'est pas STLC, mais $f_1(0) = e_1$, et $[[f_0, f_1], f_1](0) = 2e_2$.

Théorème (Hermann et Nagano, 1963-66)

Si $f_0, \cdots, f_m$ sont des champs de vecteurs analytiques, et si le système (1) *est STLC, alors la LARC est vérifiée, i.e.*

$$\{g(0), g \in Lie(f_0, \cdots, f_m)\} = \mathbb{R}^n.$$

Remarques :

1. $\begin{cases} x_1' = u \\ x_2' = x_1^2 \end{cases}$ n'est pas STLC, mais $f_1(0) = e_1$, et $[[f_0, f_1], f_1](0) = 2e_2$.
2. pour des systèmes $x' = Ax + Bu$, LARC $\Leftrightarrow$ Kalman.

Théorème (Hermann et Nagano, 1963-66)

Si $f_0, \cdots, f_m$ sont des champs de vecteurs analytiques, et si le système (1) est STLC, alors la LARC est vérifiée, i.e.

$$\{g(0), g \in Lie(f_0, \cdots, f_m)\} = \mathbb{R}^n.$$

Remarques :

1. $\begin{cases} x_1' = u \\ x_2' = x_1^2 \end{cases}$ n'est pas STLC, mais $f_1(0) = e_1$, et $[[f_0, f_1], f_1](0) = 2e_2$.
2. pour des systèmes $x' = Ax + Bu$, LARC $\Leftrightarrow$ Kalman.
3. pour les systèmes affines sans drift ($f_0 \equiv 0$), c'est aussi une équivalence (Théorème de Chow-Rashevski, 1938-39).

Théorème (Test linéaire)

On suppose f_0 et f_1 analytiques telles que $f_0(0) = 0$. On suppose que :

$$Vect(ad_{f_0}^k(f_1)(0),\ k \in \mathbb{N}) = \mathbb{R}^n.$$

Alors le sytème affine $x' = f_0(x) + uf_1(x)$ est STLC.

Théorème (Test linéaire)

On suppose f_0 *et* f_1 *analytiques telles que* $f_0(0) = 0$. *On suppose que :*

$$Vect(ad_{f_0}^k(f_1)(0),\ k \in \mathbb{N}) = \mathbb{R}^n.$$

Alors le sytème affine $x' = f_0(x) + uf_1(x)$ *est STLC.*

Remarque : il s'agit d'une reformulation du test linéaire, qui indique que si le système linéarisé est contrôlable (au sens global) autour de 0, alors le système est STLC (inversion locale).

Définition ($\mathcal{S}_k$)

Soient f_0 et f_1 deux champs de vecteurs $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{S}_k$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les crochets de Lie itérés de f_0 et f_1, contenant au plus k fois f_1, évalués en 0.

Avec des manipulations élémentaires sur les crochets, on a :

$$\mathcal{S}_1 = \mathrm{Vect}(ad_{f_0}^k(f_1)(0),\ k \in \mathbb{N}).$$

Définition ($\mathcal{S}_k$)

Soient f_0 et f_1 deux champs de vecteurs $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{S}_k$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les crochets de Lie itérés de f_0 et f_1, contenant au plus k fois f_1, évalués en 0.

Avec des manipulations élémentaires sur les crochets, on a :

$$\mathcal{S}_1 = \mathrm{Vect}(ad_{f_0}^k(f_1)(0), \ k \in \mathbb{N}).$$

Théorème (Sussmann, 1983)

Si on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \mathcal{S}_{2k} \subseteq \mathcal{S}_{2k-1},$$

alors le système $x' = f_0 + uf_1$ est STLC.

But du stage : trouver des résultats positifs/obstructions à la contrôlabilité de systèmes affines **avec plusieurs contrôles**, formulés **en terme de crochet de Lie**.

But du stage : trouver des résultats positifs/obstructions à la contrôlabilité de systèmes affines **avec plusieurs contrôles**, formulés **en terme de crochet de Lie**.

Stratégie : approximer la solution de l'EDO par une série de crochets de Lie ; tronquer astucieusement la série et résoudre un problème de moments pour prescrire la valeur de la somme partielle, puis estimer le reste de la série.

But du stage : trouver des résultats positifs/obstructions à la contrôlabilité de systèmes affines **avec plusieurs contrôles**, formulés **en terme de crochet de Lie**.

Stratégie : approximer la solution de l'EDO par une série de crochets de Lie ; tronquer astucieusement la série et résoudre un problème de moments pour prescrire la valeur de la somme partielle, puis estimer le reste de la série.

Test linéaire

Soient f_0, f_1, f_2 des champs de vecteurs analytiques sur $\mathbb{R}^d$. On suppose que $f_0(0) = 0$ et $\operatorname{Vect}\left(\operatorname{ad}_{f_0}^k(f_1)(0), \operatorname{ad}_{f_0}^j(f_2)(0),\ k, j \in \mathbb{N}\right) = \mathbb{R}^d$. Alors, le système $x' = f_0(x) + uf_1(x) + vf_2(x)$ est STLC (avec des contrôles $\mathcal{C}_c^\infty$).

Théorème

Soient f_0, f_1, et f_2 des champs de vecteurs analytiques sur $\mathbb{R}^d$. On suppose que $f_0(0) = 0$, que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $ad_{f_1}^{2k}(f_0)(0) = ad_{f_2}^{2k}(f_0)(0) = 0$ et

$$Vect(f_b(0),\ n(b) \leq 2) = \mathbb{R}^d.$$

Alors le système $x' = f_0(x) + uf_1(x) + vf_2(x)$ est STLC autour de 0.

Premier but de la thèse : généraliser ce qui a été fait sur des systèmes affines à des EDP (passage à la dimension infinie).

Premier but de la thèse : généraliser ce qui a été fait sur des systèmes affines à des EDP (passage à la dimension infinie).

Équation de Schrödinger (en lien avec la thèse de Mégane Bournissou) :

$$i\partial_t \psi = -\partial^2_{xx}\psi - u(t)\mu(x)\psi - v(t)\tilde{\mu}(x)\psi.$$

Premier but de la thèse : généraliser ce qui a été fait sur des systèmes affines à des EDP (passage à la dimension infinie).

Équation de Schrödinger (en lien avec la thèse de Mégane Bournissou) :

$$i\partial_t \psi = -\partial^2_{xx}\psi - u(t)\mu(x)\psi - v(t)\tilde{\mu}(x)\psi.$$

Étudier le système linéarisé, supposer qu'une direction est perdue au linéaire, et essayer de la rattraper dans les termes suivants du développement (quadratique, cubique ..).