Étude du système de Lotka-Volterra.

I. Présentation du modèle - existence de solutions

Définition 1: *Système de Lotka-Volterra*

Le système de Lotka-Volterra est un modèle proie-prédateur, qui décrit l'évolution de deux populations, x, et y, selon le système suivant :

$$\begin{cases} x' &= x(a-by) \\ y' &= y(-c+dx) \\ x(0) &= x_0 \\ y(0) &= y_0 \end{cases}, \tag{1}$$

où a,b,c et d sont des constantes strictement positives, et $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^+$ des données initiales.

Propriété 1 : *Well-posedness*

Le problème de Cauchy (1) admet une unique solution maximale, définie sur un intervalle ouvert I, contenant 0.

Démonstration. L'équation est autonome. Il suffit de remarquer que

$$f : \begin{bmatrix} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x(a-by), y(-c+dx)) \end{bmatrix}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique et donne le résultat. □

Remarque :

Si $x_0 = 0$, alors, l'unique solution de (1) est globale et est donnée par : $(x,y) : t \in \mathbb{R} \mapsto (0, e^{-ct}y_0)$. Si $y_0 = 0$, alors, l'unique solution de (1) est globale et est donnée par : $(x,y) : t \in \mathbb{R} \mapsto (e^{at}x_0, 0)$.

II. Globalité des solutions

Propriété 2 : *Positivité des solutions*

Supposons $x_0 > 0$. Alors, $\forall t \in I$, $x(t) > 0$.

Démonstration. On raisonne par l'absurde, et on suppose donné $t \in I$ tel que $x(t) \leqslant 0$. Alors, par théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t^* \in I$ tel que $x(t^*) = 0$. Ainsi, par unicité des solutions dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, $x \equiv 0$. En particulier, $x(0) = x_0 = 0$. Contradiction. □

Remarque :

On a de même : supposons $y_0 > 0$. Alors, $\forall t \in I$, $y(t) > 0$.

Définition 2: *Intégrale première de l'énergie*

On définit

$$H : (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \mapsto dx - c\ln(x) + by - a\ln(y) \in \mathbb{R}.$$

Propriété 3 : *Intégrale première de l'énergie*

Supposons $x_0, y_0 > 0$. alors, H est une intégrale première du problème de Cauchy (1).

Démonstration. La proposition précédente assure que cette quantité est bien définie. De plus, pour tout $t \in I$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(x(t), y(t)) = dx'(t) - c\frac{x'(t)}{x(t)} + by'(t) - a\frac{y'(t)}{y(t)} = \cdots = 0.$$

□

Théorème 1 : *Globalité des solutions*

Les solutions de (1) sont globales.
Si $x_0, y_0 > 0$, elles sont bornées.

Démonstration. Ceci a déjà été vu si $x_0 = 0$ ou $y_0 = 0$. Supposons donc $x_0, y_0 > 0$. On a trouvé une intégrale première de l'énergie. C'est une fonction continue. Montrons qu'elle est coercive : remarquons que pour tout $x, y > 0$,

$$H(x, y) = f_{a,b}(y) + f_{c,d}(x),$$

où $f_{\alpha,\beta}(z) := \beta z - \alpha \ln(z)$. Une simple étude de fonctions donne :

z	0		$\frac{\alpha}{\beta}$		$+\infty$
$f'_{\alpha,\beta}(z)$	‖	$-$	0	$+$	
$f_{\alpha,\beta}$	‖ $+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

La fonction $f_{\alpha,\beta}$ est donc minorée. De plus, si $\|(x, y)\| \to +\infty$, $|x| \to +\infty$ ou $|y| \to +\infty$, par exemple $|x| \to +\infty$. Alors,

$$H(x, y) \geqslant f_{a,b}(x) + \min_{y>0} f_{c,d}(y) \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Ainsi, les solutions vivent dans les lignes de niveau d'une fonction continue et coercive, donc dans un ensemble compact. Par suite, les solutions sont bornées. Le principe de majoration a priori assure donc que les solutions sont globales, $I = \mathbb{R}$. □

III. Étude des points d'équilibre

Propriété 4 : *Points d'équilibre*

Les points d'équilibre du système différentiel (1) sont $(0, 0)$ et $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$.

Démonstration. Un simple calcul conclut. □

Propriété 5 : *Nature des points d'équilibre*

Le point d'équilibre $(0, 0)$ est instable.

Démonstration. On s'intéresse au problème linéarisé. On a

$$\mathrm{Jac}(f)(0,0) = \begin{pmatrix} a-by & -bx \\ dy & -c+dx \end{pmatrix}\Big|_{(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $a>0$ est valeur propre, donc le théorème de linéarisation de Lyapounov conclut à l'instabilité du point d'équilibre $(0,0)$. De plus

$$\mathrm{Jac}(f)\left(\frac{c}{d},\frac{a}{b}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{da}{b} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est X^2+ac. Ainsi, ses valeurs propres sont $\pm i\sqrt{ac}$. Le théorème de linéarisation ne permet donc pas de conclure. □

Pour aller plus loin ...

On peut néanmoins étudier la nature du point d'équilibre via le théorème (hors-programme) suivant :

Théorème 2 : *Théorème de Lyapounov*

Soit x_0 un équilibre d'un système différentiel autonome $x' = f(x)$, et $\mathscr{U}$ un voisinage de x_0. On suppose qu'il existe une fonction (de Lyapounov) $H : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$, continue, différentiable sur $\mathscr{U} \setminus \{x_0\}$ vérifiant :

1. $\forall x \in \mathscr{U} \setminus \{x_0\},\ (\nabla H(x), f(x)) \leqslant 0$.
2. x_0 est un minimum local strict de H

Alors, x_0 est un équilibre stable du système différentiel $x' = f(x)$.

On peut alors vérifier que la fonction H, intégrale première du système, est une fonction de Lyapounov pour le système. On en déduit que le point est stable. Il n'est pas asymptotiquement stable car les solutions sont périodiques (voir partie suivante).

IV. Périodicité des solutions

Lemme 1 : *Convergence vers les points d'équilibre*

Étant donnés $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^d)$, et y une solution globale du système différentiel autonome $y' = f(y)$. Supposons que $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = l \in \mathbb{R}$. Alors, l est un point d'équilibre du système, *i.e.* $f(l) = 0$.

Démonstration. On a : pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(l), y(t)) = (f(l), y'(t)) = (f(l), f(y(t))) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} (f(l), f(l)) = \|f(l)\|^2$$

par continuité de f. Si on suppose que $f(l) \neq 0$, on a : il existe $A>0$ tel que, pour tout $t \geqslant A$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(l), y(t)) \geqslant \frac{\|f(l)\|^2}{2} > 0.$$

Ainsi, on obtient en intégrant, pour tout $t \geqslant A$,

$$(f(l), y(t)) \geqslant (f(l), y(A)) + \frac{\|f(l)\|^2}{2}(t-A).$$

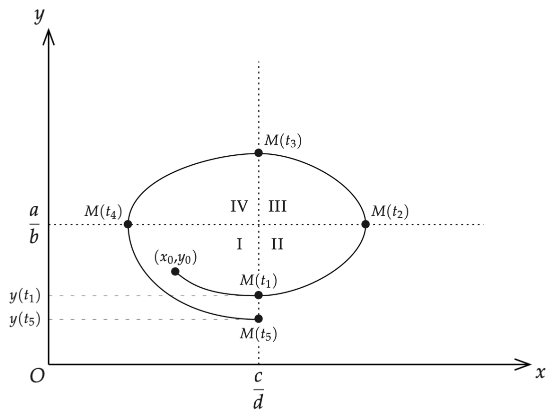
Le membre de gauche tend vers $(f(l), l) \in \mathbb{R}$, celui de droite vers $+\infty$. Ceci conclut. □

Théorème 3 : *Périodicité des solutions*

Sous l'hypothèse $x_0, y_0 > 0$, les solutions de (1) sont périodiques.

Démonstration. On a vu que les solutions vivaient dans le quart de plan supérieur, sous l'hypothèse $x_0, y_0 > 0$. On découpe alors le quart de plan en quatre zones comme suit :

$$\text{I}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0<x<\frac{c}{d},\ 0<y\leqslant\frac{a}{b}\right\}.$$
$$\text{II}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{c}{d}\leqslant x,\ 0<y<\frac{a}{b}\right\}.$$
$$\text{III}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{c}{d}<x,\ \frac{a}{b}\leqslant y\right\}.$$
$$\text{IV}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0<x\leqslant\frac{c}{d},\ \frac{a}{b}<y\right\}.$$



Supposons que $(x_0,y_0)\in$I, par exemple. Dans ce cadran, on a : $x'\geqslant 0$, et $y'\leqslant 0$. On suppose que $x(t)<\frac{c}{d}$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. Ainsi, les solutions restent dans le cadran A. Elles sont monotones et bornées (voir théorème 1), donc elles convergent. Par le lemme précédent, c'est nécessairement vers un point d'équilibre. Or, $x(t)\leqslant x_0<\frac{c}{d}$, et $y(t)\geqslant y_0>0$. Ceci fournit une absurdité. Alors, il existe $t_1\in\mathbb{R}$ tel que $x(t_1)=\frac{c}{d}$. Alors, $(x,y)(t_1)\in$II. On reproduit la même argumentation et on obtient :

- il existe $t_2>t_1$ tel que $y(t_2)=\frac{a}{b}$.
- il existe $t_3>t_2$ tel que $x(t_3)=\frac{c}{d}$.
- il existe $t_4>t_3$ tel que $y(t_4)=\frac{a}{b}$.
- il existe $t_5>t_1$ tel que $x(t_5)=\frac{c}{d}$.

Il a donc t_1,t_5 deux temps distincts tels que $x(t_1)=x(t_5)$. De plus,

$$f_{a,b}(y(t_1))+f_{c,d}(x(t_1))=H(x(t_1),y(t_1))=H(x(t_5),y(t_5))=f_{a,b}(y(t_5))+f_{c,d}(x(t_5)),$$

i.e.

$$f_{a,b}(y(t_1))=f_{a,b}(y(t_5)).$$

De plus, $0<y(t_1),y(t_5)\leqslant\dfrac{a}{b}$. À l'aide du tableau de variations, on voit que la fonction $f_{a,b}$ est strictement monotone sur cet intervalle. Par suite, elle est injective, et $y(t_1)=y(t_5)$. Donc,

$$(x,y)(t_1)=(x,y)(t_5).$$

Ainsi, l'unique solution globale (x,y) du problème de Cauchy (1) est périodique, de période t_5-t_1. □