Feuille 8 : Révisions.

Exercice 1

1. Étant donné $x_0 > 0$, résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$x'(t) = x(t)(1 - x(t)), \quad x(0) = x_0.$$

On considère un modèle écologique où deux espèces sont en compétition pour les mêmes ressources. Soient α, β deux nombres positifs (modélisant l'impact de chaque population sur l'autre). Le modèle est donné par l'équation suivante :

$$\begin{cases} x' = x(1 - x - \alpha y), \\ y' = y(1 - y - \beta x), \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

2. Justifier l'existence et l'unicité d'une solution maximale de ce problème de Cauchy, définie sur un intervalle I.

3. Donner les solutions de cette équation dans le cas où $x_0 > 0$ et $y_0 = 0$ et de même lorsque $x_0 = 0$ et $y_0 > 0$.

4. Montrer que si $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$ alors $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tout t dans I.

5. Dans le cas où $\alpha = \beta = 1$, montrer que les trajectoires sont portées par des droites.

6. On suppose dorénavant et jusqu'à la fin de l'énoncé que $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$. On note $(x(t), y(t))$ pour $t \in I$, la solution associée.

   Déterminer les points d'équilibre du système et leur nature.

7. On pose, pour $u > 0$,

$$A(u) = 2\left(1 - \frac{3u}{2}\right)\ln\left(\frac{3u}{2}\right),$$

   Que pouvez-vous dire du signe de $A(u)$?

8. On pose, pour $x, y > 0$,

$$H(x, y) = (\ln(x) - \ln(2/3))^2 + (\ln(y) - \ln(2/3))^2 + (\ln(x) - \ln(y))^2 .$$

   Déterminez une expression simple de

$$V(t) := \frac{d}{dt}\left(H(x(t), y(t))\right) - A(x(t)) - A(y(t)), \quad t \in I.$$

9. En déduire que les solutions restent bornées pour $t \geqslant 0$, puis sont définies pour tout $t \geqslant 0$.

10. Montrer que

$$\lim_{t \to +\infty} (x(t), y(t)) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et globalement lipschitzienne en la seconde variable, de constante de lipschitz L. Pour $y_0 \in \mathbb{R}^n$, on note y la solution globale du problème de Cauchy

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y_0.$$

Soit $t \mapsto v(t)$ une fonction $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \|v'(t) - f(t, v(t))\| \leqslant \varepsilon,$$

et

$$\|v(0) - y_0\| \leqslant \rho.$$

Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a la majoration suivante,

$$\|y(t) - v(t)\| \leqslant \rho e^{Lt} + \frac{\varepsilon}{L}(e^{Lt} - 1).$$

Exercice 3 Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On considère l'EDO

$$Y' = AY + B,$$

avec la condition initiale $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les coefficients de la matrice e^{tA}.
2. Déterminer explicitement la solution $Y(t)$.

Exercice 4 Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. On considère le problème de Cauchy suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & -y + x(x^2 + y^2), \\ y' & = & x + y(x^2 + y^2), \\ x(0) & = & x_0, \\ y(0) & = & y_0. \end{array} \right.$$

1. Que pouvez-vous dire de l'existence et de l'unicité des solutions maximales de ce problème de Cauchy ? On notera $I =]a, b[$ leur intervalle de définition.
2. En utilisant la fonction $f(t) = x^2(t) + y^2(t)$, montrer que nécessairement $b < +\infty$ et $a = -\infty$.
3. En utilisant une transformation en coordonnées polaires i.e en posant $x = \rho\cos(\theta)$ et $y = \rho\sin(\theta)$, donner une résolution explicite de ce système.

Exercice 5 Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction C^1, supposée croissante. On considère une solution y de l'équation différentielle

$$y'' + q(t)y = 0.$$

1. Soit $V(t) := \int_0^t q(s)y(s)y'(s)ds$ pour $t \in \mathbb{R}$. Que pouvez-vous dire de la fonction $t \mapsto \frac{1}{2}y'(t)^2 + V(t)$? En déduire que V est bornée supérieurement sur $\mathbb{R}_+$.
2. En faisant une intégration par parties dans une intégrale bien choisie, montrez qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $t > 0$,
$$\frac{1}{2}q(t)y^2(t) \leqslant C + \int_0^t \frac{1}{2}q'(s)y^2(s)ds.$$
3. En déduire que y est bornée sur $\mathbb{R}_+$.