Feuille 3

Rappels 1 (*Théorème de sortie de tout compact*)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $(E, \|\cdot\|_E)$, un espace de Banach. On suppose que $f : I \times \Omega \to E$ est une application continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Soit $(J =]T_*, T^*[, y)$ une solution maximale de l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$. Alors, si $T^* < \sup(I)$, la solution sort de tout compact de Ω au voisinage de T^*, i.e. :

$$\forall K \subset \Omega, \text{ compact}, \exists T_K \in J, \quad \forall t \in [T_K, T^*[, \quad y(t) \in \Omega \setminus K.$$

On a bien sûr un résultat analogue pour la borne inférieure de l'intervalle.

Corollaire. *Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^d$, en dimension finie, on parle d'**explosion en temps fini** car le fait que la solution maximale sorte de tout compact se reformule en $\lim\limits_{t \to T^{*-}} \|y(t)\| = +\infty$.*

Exercice 1

1. En introduisant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, on peut reformuler l'équation différentielle en :

$$\begin{cases} X'(t) &= f(t, X(t)) \\ X(0) &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{cases},$$

avec

$$f : \begin{bmatrix} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (t, (x, y)) & \mapsto & \begin{pmatrix} -x - 2y^2 \\ xy - y \end{pmatrix} \end{bmatrix}.$$

Cette application est continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable (car de classe $\mathcal{C}^1$). Ainsi, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que le problème de Cauchy admet une unique solution maximale définie sur un intervalle I, ouvert, contenant 0.

2. On sait que, pour tout $t \in I$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(H(x(t), y(t)) \right) = 2x(t)x'(t) + 4y(t)y'(t) = -2H(x(t), y(t)).$$

Ainsi, la résolution de l'équation différentielle fournit, pour tout $t \in I$,

$$H(x(t), y(t)) = e^{-2t}(x_0^2 + 2y_0^2).$$

Alors, pour tout $t \in I$,

$$\|(x, y)\|_2^2 (t) \leqslant (x_0^2 + 2y_0^2) e^{-2t}.$$

On applique le théorème d'explosion en temps fini : notons $I =]T_*; T^*[$. Si $T^* < +\infty$, alors, le principe de majoration a priori assure que $\lim\limits_{t \to T^{*-}} \|(x, y)\|_2 (t) = +\infty$. Ceci contredit l'inégalité précédente. Nécessairement, $T^* = +\infty$. De la même façon, $T_* = -\infty$, *i.e.* $I = \mathbb{R}$.

Exercice 2

1. On parle de fonction au plus linéaire. Soit (I, y) une solution maximale. On sait que, pour tout $t \in I$,

$$\|y(t)\| \leqslant \|y(0)\| + \left| \int_0^t \|f(s, y(s))\| \, \mathrm{d}s \right|.$$

En utilisant l'hypothèse, il vient :

$$\|y(t)\| \leqslant \|y(0)\| + \int_0^t C_2(s) \mathrm{d}s + \left| \int_0^t C_1(s) \|y(s)\| \, \mathrm{d}s \right|.$$

Ainsi, le lemme de Grönwall donne, pour tout $t \in I$,

$$\|y(t)\| \leqslant \|y(0)\| + \int_0^t C_2(s)\mathrm{d}s + \left| \int_0^t \left(\|y(0)\| + \int_0^s C_2(\sigma)\mathrm{d}\sigma \right) C_1(s) \exp\left(\left| \int_s^t C_1(\sigma)\mathrm{d}\sigma \right| \right) \mathrm{d}s \right|.$$

Puisque les fonctions C_1 et C_2 sont continues ($L^1_{loc}(\mathbb{R})$ suffit en réalité), le terme de droite de l'inégalité n'explose pas en temps fini. On peut donc montrer la globalité des solutions par théorème des bouts : notons $I =]T_*; T^*[$. Si $T^* < +\infty$, alors $\lim\limits_{t \to T^{*-}} \|y(t)\| = +\infty$. Ceci contredit l'inégalité précédente. Nécessairement, $T^* = +\infty$. De la même façon, $T_* = -\infty$, *i.e.* $I = \mathbb{R}$.

2. On vectorise l'équation, on introduit : $X(t) := \begin{pmatrix} \theta \\ \theta' \end{pmatrix}(t)$. Alors, l'équation différentielle se reformule en :
$$X'(t) = f(t, X(t)),$$
avec
$$f : \begin{bmatrix} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (t, (x, y)) & \mapsto & \big(y, -\sin(x) - F(y)\big) \end{bmatrix}.$$
Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ (par hypothèse sur F), elle est donc continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'espace. Ainsi, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que cette équation admet une unique solution maximale, à condition initiale fixée. Soit (I, y) une solution maximale. Montrons qu'elle est globale ; il suffit de montrer que f est à croissance au plus linéaire : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\|f(t, (x, y))\|_1 = |y| + |\sin(x) + F(y)| \leqslant \|(x, y)\|_1 + 1 + \|F\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$
Puisque $C_1(t) := 1$ et $C_2(t) := 1 + \|F\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ sont des fonctions positives et continues, la question 1 permet de conclure.
3. L'application
$$f : \begin{bmatrix} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (t, X) & \mapsto & A(t)X + B(t) \end{bmatrix}$$
est une application continue (par hypothèse sur A et B), et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. En effet, pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, pour tout $t \in]t_0 - 1; t_0 + 1[$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$,
$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leqslant \max_{t \in [t_0 - 1; t_0 + 1]} |||A(t)||| \, \|x - y\|.$$
Ainsi, le problème de Cauchy admet une unique solution maximale. Montrons qu'elle est globale ; il suffit de montrer que f est à croissance au plus linéaire : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\|f(t, (x, y))\| \leqslant |||A(t)||| \, \|x\| + \|B(t)\|.$$
Puisque $C_1(t) := |||A(t)|||$ et $C_2(t) := \|B(t)\|$ sont des fonctions positives et continues, la question 1 permet de conclure.

Exercice 3

1. L'équation est autonome. Il suffit de remarquer que
$$f : \begin{bmatrix} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x(a - by), y(-c + dx)) \end{bmatrix}$$
est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique et donne le résultat.
2. Si $x_0 = 0$, alors, l'unique solution du problème de Cauchy est globale et est donnée par : $(x, y) : t \in \mathbb{R} \mapsto (0, e^{-ct} y_0)$. Si $y_0 = 0$, alors, l'unique solution du problème de Cauchy est globale et est donnée par : $(x, y) : t \in \mathbb{R} \mapsto (e^{at} x_0, 0)$.

3. On raisonne par l'absurde, et on suppose donné $t \in I$ tel que $x(t) \leqslant 0$. Alors, par théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t^* \in I$ tel que $x(t^*) = 0$. Ainsi, par unicité des solutions dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, $x \equiv 0$. En particulier, $x(0) = x_0 = 0$. Contradiction. On raisonne de même pour y.
4. La question précédente assure que cette quantité est bien définie. De plus, pour tout $t \in I$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(x(t), y(t)) = dx'(t) - c\frac{x'(t)}{x(t)} + by'(t) - a\frac{y'(t)}{y(t)} = 0.$$

5.a. Remarquons que pour tout $x, y > 0$,

$$H(x,y) = f_{a,b}(y) + f_{c,d}(x),$$

où $f_{\alpha,\beta}(z) := \beta z - \alpha \ln(z)$. Une simple étude de fonctions donne :

z	0		$\frac{\alpha}{\beta}$		$+\infty$
$f'_{\alpha,\beta}(z)$	‖	$-$	0	$+$	
$f_{\alpha,\beta}$	‖ $+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

La fonction $f_{\alpha,\beta}$ est donc minorée. De plus, si $\|(x,y)\| \to +\infty$, $|x| \to +\infty$ ou $|y| \to +\infty$, par exemple $|x| \to +\infty$. Alors,

$$H(x,y) \geqslant f_{a,b}(x) + \min_{y>0} f_{c,d}(y) \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

5.b. On suppose donné $\alpha \in \mathbb{R}$ et on considère $K := H^{-1}(\{\alpha\})$. Montrons que K est compact. Puisque l'on considère une application en dimension finie, il suffit de montrer que K est fermé et borné. K est clairement fermé, par continuité de H. Si K n'est pas borné, on peut construire $(x_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$ telle que $\|x_n\| \geqslant n$. Alors, par coercivité de H, $H(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ceci contredit le fait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H(x_n) = \alpha$.

5.c. Les solutions évoluent dans les lignes de niveaux de H, qui est une application continue et coercive. Ainsi, les solutions évoluent dans un compact : elles sont donc bornées. Par conséquent, le principe de majoration a priori assure que les solutions sont globales.

6. On a besoin du lemme suivant, qui sera étudié dans le cours attrait aux points d'équilibre.

Lemme (Convergence vers les points d'équilibre)**.** *Soient $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$, et y une solution globale du système différentiel autonome $y' = f(y)$. Supposons que $\lim_{t\to+\infty} y(t) = l \in \mathbb{R}$. Alors, l est un point d'équilibre du système, i.e. $f(l) = 0$.*

Démonstration : On a : pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(l), y(t)) = (f(l), y'(t)) = (f(l), f(y(t))) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} (f(l), f(l)) = \|f(l)\|^2$$

par continuité de f. Si on suppose que $f(l) \neq 0$, on a : il existe $A > 0$ tel que, pour tout $t \geqslant A$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(l), y(t)) \geqslant \frac{\|f(l)\|^2}{2} > 0.$$

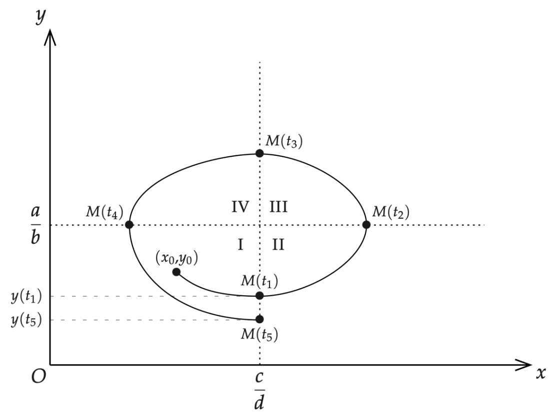
Ainsi, on obtient en intégrant, pour tout $t \geqslant A$,

$$(f(l), y(t)) \geqslant (f(l), y(A)) + \frac{\|f(l)\|^2}{2}(t - A).$$

Le membre de gauche tend vers $(f(l), l) \in \mathbb{R}$, celui de droite vers $+\infty$. Ceci conclut. ■

On a vu que les solutions vivaient dans le quart de plan supérieur, sous l'hypothèse $x_0, y_0 > 0$. On découpe alors le quart de plan en quatre zones comme suit :

$$\text{I}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad 0<x<\frac{c}{d},\quad 0<y\leqslant\frac{a}{b}\right\}.\qquad \text{III}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{c}{d}<x,\quad \frac{a}{b}\leqslant y\right\}.$$
$$\text{II}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{c}{d}\leqslant x,\quad 0<y<\frac{a}{b}\right\}.\qquad \text{IV}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad 0<x\leqslant\frac{c}{d},\quad \frac{a}{b}<y\right\}.$$



Supposons que $(x_0,y_0)\in$I, par exemple. Dans ce cadran, on a : $x'\geqslant 0$, et $y'\leqslant 0$. On suppose que $x(t)<\frac{c}{d}$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. Ainsi, les solutions restent dans le cadran A. Elles sont monotones et bornées (car elles évoluent dans les lignes de niveau d'une fonction continue et coercive), donc elles convergent. Par le lemme précédent, c'est nécessairement vers un point d'équilibre. Or, $x(t)\leqslant x_0<\frac{c}{d}$, et $y(t)\geqslant y_0>0$. Ceci fournit une absurdité. Alors, il existe $t_1\in\mathbb{R}$ tel que $x(t_1)=\frac{c}{d}$. Alors, $(x,y)(t_1)\in$II. On reproduit la même argumentation et on obtient :

* il existe $t_2>t_1$ tel que $y(t_2)=\frac{a}{b}$.
* il existe $t_3>t_2$ tel que $x(t_3)=\frac{c}{d}$.
* il existe $t_4>t_3$ tel que $y(t_4)=\frac{a}{b}$.
* il existe $t_5>t_1$ tel que $x(t_5)=\frac{c}{d}$.

Il a donc t_1,t_5 deux temps distincts tels que $x(t_1)=x(t_5)$. De plus,

$$f_{a,b}(y(t_1))+f_{c,d}(x(t_1))=H(x(t_1),y(t_1))=H(x(t_5),y(t_5))=f_{a,b}(y(t_5))+f_{c,d}(x(t_5)),$$

i.e.

$$f_{a,b}(y(t_1))=f_{a,b}(y(t_5)).$$

De plus, $0<y(t_1),y(t_5)\leqslant\dfrac{a}{b}$. À l'aide du tableau de variations, on voit que la fonction $f_{a,b}$ est strictement monotone sur cet intervalle. Par suite, elle est injective, et $y(t_1)=y(t_5)$. Donc,

$$(x,y)(t_1)=(x,y)(t_5).$$

Ainsi, l'unique solution globale (x,y) du problème de Cauchy considéré est périodique, de période t_5-t_1.

Exercice 4

1. La fonction v étant supposée de classe $\mathcal{C}^1$, le problème de Cauchy admet une unique solution maximale x, définie sur un intervalle ouvert $I=]T_*;T^*[$, contenant 0. On considère $u:t\in I\mapsto\|x(t)\|^2$. Alors, pour tout $t\in I$,

$$u'(t)=2(x(t)|v(x(t)))\leqslant 0.$$

Ainsi, pour tout $t\in[0,T^*[$,

$$\|x(t)\|\leqslant\|x_0\|\,.$$

Par le théorème des bouts, la solution est donc globale en temps positif car elle ne peut pas exploser en temps fini. Ainsi, $T^*=+\infty$.

2. De la même façon, la solution admet une unique solution maximale, x, définie sur un intervalle $I =]T_*; T^*[$. On montre que pour tout $t \in [0, T^*[$, $\|x(t)\| \leqslant 1$. On raisonne par l'absurde et on suppose que ce n'est pas le cas, *i.e.* il existe $t^* \in [0, T^*[$ tel que $\|x(t^*)\| > 1$. On introduit alors :

$$\tau := \sup \{t > 0, \quad \forall s \in [0,t], \quad \|x(s)\| \leqslant 1\}.$$

L'ensemble est majoré par t^*. Montrons qu'il est non vide. Si $x_0 \in \mathring{B}(0,1)$, alors, par continuité, il existe $\delta > 0$, tel que, pour tout $t \in [0, \delta[$, $\|x(t)\| \leqslant 1$. Ceci montre l'assertion. Si la condition initiale est un point du disque unité, on utilise le fait que le champ est rentrant : en effet, pour $h > 0$, assez petit, en utilisant l'hypothèse,

$$\|x(h)\|^2 = \|x_0\|^2 + 2(x_0, v(x_0))h + o(h) = 1 + 2\underbrace{(x_0, v(x_0))}_{<0} h + o(h).$$

Alors, pour $h > 0$ assez petit,

$$\|x(h)\|^2 < 1.$$

Ceci montre que l'ensemble est non vide, que τ est bien défini, et $\tau > 0$. Alors, par définition,

$$\|x(\tau)\| = 1.$$

En effet, pour tout $t \in [0, \tau[$, $\|x(t)\| \leqslant 1$: si ce n'est pas le cas, il existe $s \in [0, \tau[$ avec $\|x(s)\| > 1$. Alors, puisque $s < \tau$, ce n'est pas un majorant, donc il existe $s < u \leqslant \tau$ tel que $\forall v \in [0, u]$, $\|x(v)\| \leqslant 1$. Prendre $v = s$ fournit une contradiction.
La continuité de x donne : $\|x(\tau)\| = \lim\limits_{t \to \tau^-} \|x(t)\| \leqslant 1$. De plus, si l'inégalité est stricte, alors, la continuité assure qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $t \in [\tau, \tau + \delta]$, $\|x(\tau)\| \leqslant 1$. Ainsi, on contredit la minimalité du sup. Alors, on peut a nouveau effectuer un développement limité, et, pour h assez petit,

$$\|x(t+h)\|^2 = 1 + 2\underbrace{(x(\tau), v(x(\tau)))}_{<0} + o(h).$$

Alors, on contredit la définition de τ. Alors, on a bien pour tout $t \in [0, T^*[$, $\|x(t)\| \leqslant 1$. Le principe de majoration a priori assure que, puisque la solution est bornée, elle est globale.

Exercice 5

1. Il est clair que l'équation admet une unique solution maximale, puisque la fonction qui définit le problème est de classe $\mathcal{C}^1$. On a $y(0) = 0$. De plus, $y'(0) = y^2(0) - 0 = 0$. En dérivant l'équation (ce qui est possible car, puisque $y' := y^2 - I_d$, y' est de classe $\mathcal{C}^1$, donc y est de classe $\mathcal{C}^2$), il vient : $y''(0) = 2y'(0)y(0) - 1 = -1$. Alors, il vient directement, au vu de la régularité de y,

$$y(x) \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{1}{2}x^2.$$

Ainsi,

$$y'(x) = y'(0) + y''(0)x + o(x) \underset{x \to 0}{\sim} -x < 0.$$

Par suite, il existe $\delta > 0$, tel que, pour tout $x \in]0, \delta[$, $y'(x) < 0$. Alors, au vu de l'équation vérifiée par y, sur ce voisinage de 0^+,

$$\forall x \in]0, \delta[, \qquad y^2(x) < x.$$

2. On suppose par l'absurde qu'il existe $x^* \in]0, b[$ tel que $y^2(x^*) \geqslant x^*$. On introduit alors :

$$\kappa = \sup \left\{ x > 0, \quad \forall t \in]0, x[, \quad y^2(t) < t \right\}.$$

Cette quantité est bien définie, puisque l'ensemble est non vide au vu de la question 1, et majoré par x^*. Alors, les deux points suivants sont vérifiés :

a. $\forall t \in]0, \kappa[$, $y^2(t) < t$. Si ce n'est pas le cas, alors, il existe $t^* \in]0, \kappa[$ tel que $y^2(t^*) \geqslant t^*$. Puisque $t^* < \kappa$, ce n'est pas un majorant, donc il existe $t^* < s \leqslant \kappa$, tel que, pour tout $v \in]0, s[$, $y^2(v) < v$. Prendre $v = t^*$ fournit une contradiction.

b. $y^2(\kappa) = \kappa$. Par passage à la limite, il est clair que $y^2(\kappa) = \lim_{t \to \kappa^-} y^2(t) \leqslant \lim_{t \to \kappa^-} t = \kappa$. Si l'inégalité est stricte, alors, par continuité, il existe δ tel que, pour tout $x \in [\kappa, \kappa + \delta[$, $y^2(x) < x$. Alors, on obtient une contradiction quant à la définition de κ.

Un développement limité fournit alors pour $h < 0$, assez petit,

$$y^2(\kappa + h) = y^2(\kappa) + y^{2'}(\kappa)h + o(h) = \kappa + 2y(\kappa) \underbrace{y'(\kappa)}_{y^2(\kappa)-\kappa=0} h + o(h) = \kappa + o(h).$$

Alors,

$$y^2(\kappa + h) - (\kappa + h) = -h + o(h) > 0.$$

Ainsi, il existe $\delta > 0$ pour tout $x \in]\kappa - \delta, \kappa[$,

$$y^2(x) > x.$$

Par suite, ceci contredit la définition de κ.

3. L'inégalité précédente assure que la solution ne peut pas exploser en temps fini. Ainsi, le théorème des bouts assure que la solution est globale.