Feuille 5

EXERCICE 1 Déterminer la nature du point d'équilibre $(0,0)$ pour les systèmes de la forme $y'(t) = Ay(t)$, pour les différentes matrices ci-dessous.

1. $$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

2. $$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

3. $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 2 On considère l'équation différentielle $y'(t) = f(y(t))$ avec $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donné respectivement par,

1. $$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - x \\ y^2 - 2y \end{pmatrix}.$$

2. $$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - \sin(2x) \\ 1 - e^y \end{pmatrix}.$$

Déterminer dans chacun des cas les points d'équilibre ainsi que leur nature.

EXERCICE 3 On considère l'équation d'un oscillateur non linéaire donnée de la manière suivante :

$$x'' + kx' + g(x) = 0,$$

avec $k > 0$ et g une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, bornée telle que $g(0) = 0$.

1. Soient $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On s'intéresse au problème de Cauchy suivant :

   $$\begin{cases} x'' + kx' + g(x) = 0, \\ x(0) = x_0, \\ x'(0) = y_0. \end{cases}$$

   Montrer que ce problème de Cauchy admet une unique solution globale.

2. Déterminer la nature du point d'équilibre $(0,0)$ en fonction du signe de $g'(0)$.

EXERCICE 4 On considère le système suivant,

$$\begin{cases} x' = y + x - \frac{x^3}{3} + u, \\ y' = -x, \end{cases}$$

où $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que pour $u \equiv 0$, $(0,0)$ est un équilibre instable.

2. Montrer que pour $u(x) = -2x, x \in \mathbb{R}$, (0,0) est un équilibre asymptotiquement stable. *On dit que le feedback* $u(x) = -2x$ *stabilise l'équilibre* $(0,0)$.