L3 Mathématiques
ENS Rennes

Équations Différentielles
2023 – 2024

Contrôle Continu du 7 mai 2024
Durée : 1h30

Un soin particulier sera apporté à la qualité de la rédaction.

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable. On considère l'équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)). \tag{1}$$

1. Soit ϕ et ψ deux solutions de (1) définies sur le même intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $a \in I$ tel que $\phi(a) < \psi(a)$. Montrer que pour tout $t \in I$, $\phi(t) < \psi(t)$.
2. On suppose maintenant que $f(t, 0) = f(t, 1) = 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (a) Vérifier que les fonctions constantes égales à 0 et à 1 sont solutions de (1) sur $\mathbb{R}$.
   (b) Soit $x_0 \in]0, 1[$. Montrer qu'il existe une unique solution maximale à l'équation (1) vérifiant $x(0) = x_0$, définie sur un intervalle ouvert J.
   (c) Montrer que pour tout $t \in J$, $0 < x(t) < 1$.
   (d) En déduire que $J = \mathbb{R}$, c'est-à-dire que x est une solution globale.

Exercice 2

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $E(t)$ la partie entière de t, définie par $E(t) = n$, quand $n \leqslant t < n + 1$, pour $n \in \mathbb{Z}$.

1. (a) Soit $\alpha > 0$. Montrer que la fonction $x \to \sqrt{x}$ est k-lipchitzienne sur $]\alpha, \infty[$, pour une constante $k = k(\alpha)$ que l'on calculera en fonction de α.
   (b) Montrer que la fonction $x \to \sqrt{x}$ n'est pas localement lipchitzienne sur l'intervalle $[0, \infty[$.
2. Dans la suite de cet exercice, on étudie l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = E(t)\sqrt{y},$$

   pour $(t, y) \in I \times U$, où I et U sont des intervalles inclus dans $[0, \infty[$.
   (a) Est-ce que les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipchitz sont satisfaites pour (E) quand $I = [0, 2[$, $U =]\alpha, \infty[$, pour $\alpha > 0$? Justifier la réponse.
   (b) Est-ce que les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipchitz sont satisfaites s'applique pour (E) quand $I = [0, 1[$, $U = [0, \infty[$? Justifier la réponse.
   (c) Est-ce que les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipchitz sont satisfaites pour (E) quand on prend $I = [n, n + 1[$, $U =]\alpha, \infty[$, pour $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$? Justifier la réponse.

Exercice 3

On considère le problème de Cauchy:

$$\begin{cases} x' = 3x - 4y + \cos x - 1, \\ y' = 2x - 3y + \cos x - 1, \end{cases}$$

avec une condition initiale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

1. Discuter de l'existence et de l'unicité des solutions maximales et montrer que celles-ci sont globales, c'est-à-dire définies sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $(0, 0)$ est l'unique point d'équilibre.
3. Ce point d'équilibre est il stable, asymptotiquement stable, instable ?

Exercice 4

Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction C^1 croissante. On considère l'équation différentielle

$$y'' + q(t)y = 0$$

avec une condition initiale $(y(0), y'(0)) = (y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution globale.
2. Soit y une solution, on pose $V(t) = \displaystyle\int_0^t q(s)y(s)y'(s)ds$. Montrer que $\frac{1}{2}y'^2 + V$ est constante sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que V est bornée supérieurement.
4. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

   $$\frac{1}{2}q(t)y(t)^2 \leqslant \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}q(0)y_0^2 + \frac{1}{2}\int_0^t q'(s)y(s)^2 ds.$$

   (On pourra utiliser une intégration par partie).
5. En déduire y est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

   (On pourra remarquer que $q(t) \geq q(0) > 0$ et appliquer un lemme du cours).