Contrôle de systèmes non linéaires multi-commandés

Théo Gherdaoui
Encadré par Karine Beauchard et Frédéric Marbach

ENS Rennes - Université de Rennes

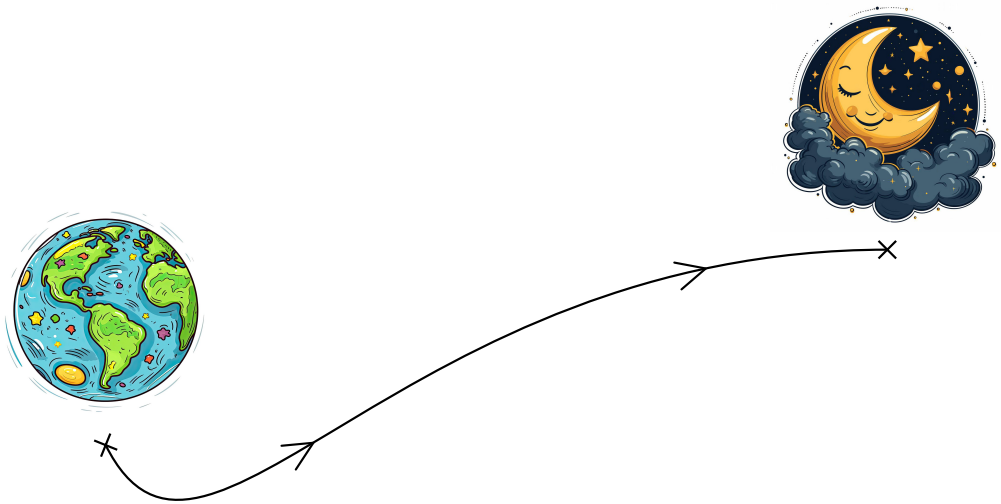
Soutenance de thèse
11 juin 2025

Introduction

Exemple : mouvement d'une fusée

$$x' = f(\underbrace{x}_{\text{position}}, \overbrace{u}^{\text{puissance des moteurs}}).$$

u est une fonction, c'est le **contrôle**.



1. Cas de la dimension finie
   - Définitions : STLC et outils algébriques
   - État de l'art
   - Un premier exemple
   - Formule de représentation de l'état de type Magnus
   - Condition nécessaire de STLC
   - Condition suffisante de STLC

2. Adaptation aux EDP
   - Caractère bien posé
   - État de l'art
   - Condition nécessaire de STLC
   - Condition suffisante de STLC

Cadre d'étude

Système affine : soient $f_0, f_1, f_2 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, réels analytiques sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$

$$\begin{cases} x' = f_0(x) + u(t)f_1(x) + v(t)f_2(x), \quad (0, T), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{EDO}$$

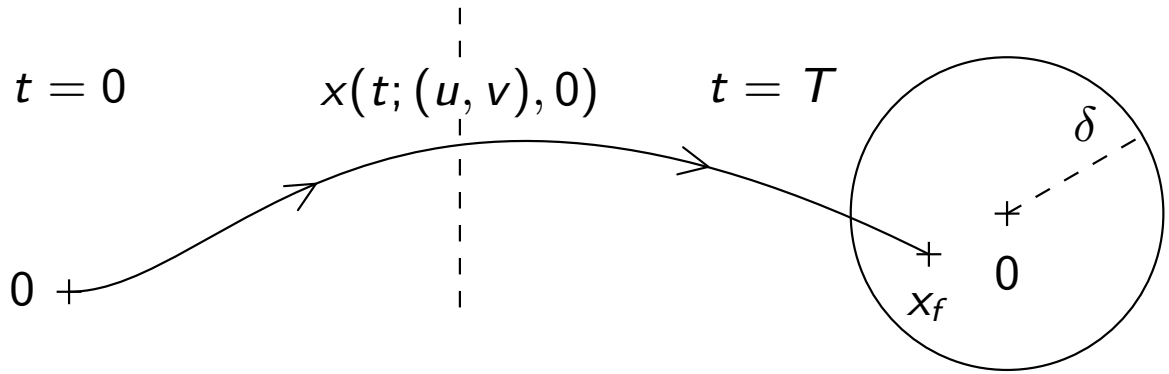
- (EDO) admet une **unique solution maximale** $x(\cdot; (u, v), x_0) \in C^0([0, T[, \mathbb{R}^d)$ pour $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $u, v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
- $f_0(0) = 0$: 0 est un point d'équilibre du système libre, *i.e.* pour $u, v \equiv 0$.

Contrôlabilité locale en temps petit (STLC)

$$x' = f_0(x) + uf_1(x) + vf_2(x).$$

Définition – STLC

Soit E_T un espace vectoriel normé de fonctions définies sur $[0, T]$. On dit que (EDO) est E-STLC si : pour tous $T, \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x_f \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $\|x_f\| \leq \delta$, il existe $u, v \in E_T$ tels que $\|(u, v)\|_{E_T} \leq \varepsilon$ et $x(T; (u, v), 0) = x_f$.



$=$ surjectivité locale autour de $(0, 0)$ de $\begin{bmatrix} E_T \times E_T & \to & \mathbb{R}^d \\ (u, v) & \mapsto & x(T; (u, v), 0) \end{bmatrix}$, $\forall T > 0$.

Quelques définitions

Définition – Crochets de Lie

Soient f, g deux champs de vecteurs réguliers sur $\mathbb{R}^d$. On définit

$$[f, g] : x \in \mathbb{R}^d \mapsto Dg(x) \cdot f(x) - Df(x) \cdot g(x).$$

Définitions

- $X := \{X_0, X_1, X_2\}$ un ensemble de trois **indéterminées non commutatives**.
- $\mathcal{A}(X)$ l'espace-vectoriel des polynômes non commutatifs en X.
- $\mathcal{L}(X)$ **l'algèbre de Lie libre** sur X, *i.e.* le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(X)$ contenant X_0, X_1, X_2, stable par le crochet de Lie $[a, b] := ab - ba$.
- $n_\ell(b)$ désigne le **nombre d'occurrences** de X_ℓ dans le monôme b.
- $n(b) := n_1(b) + n_2(b)$.

On peut "**évaluer**" :

$$b \in \mathcal{L}(X) \mapsto f_b \in \mathcal{C}^\omega(\mathbb{R}^d) \mapsto f_b(0) \in \mathbb{R}^d.$$

✎ Exemple : $[X_2, X_0] \mapsto [f_2, f_0] \mapsto [f_2, f_0](0) = Df_0(0) \cdot f_2(0) - Df_2(0) \cdot f_0(0) \in \mathbb{R}^d$.

État de l'art pour $x' = f_0(x) + uf_1(x) + vf_2(x)$

- **Test linéaire** : $\underbrace{\text{Vect}\{f_b(0);\ n(b) = 1\}}_{\text{crochets linéaires}} = \mathbb{R}^d \quad \Rightarrow \quad L^\infty\text{-STLC}.$ [Kalman (1960)]

$$\begin{cases} x_1' &= u \\ x_2' &= x_1 + x_1^2 \end{cases}, \qquad \text{Vect}\left(f_{X_1}(0), f_{[X_1,X_0]}(0)\right) = \mathbb{R}^2.$$

- **LARC** : Si $f_0 \equiv 0$, L^∞-STLC $\quad \Leftrightarrow \quad \text{Vect}\{f_b(0);\ b \in \mathcal{L}(X)\} = \mathbb{R}^d.$
[Chow (1941), Rashevski (1938)]

- Si $f_0 \not\equiv 0$, les crochets de Lie évalués en 0 contiennent l'information. [Krener (1973)]

Conditions nécessaires

- **LARC** : L^∞-STLC $\quad \Rightarrow \quad \text{Vect}\{f_b(0);\ b \in \mathcal{L}(X)\} = \mathbb{R}^d.$
[Herman (1963), Nagano (1966)]

$$\begin{cases} x_1' &= u \\ x_2' &= x_1^2 \geq 0 \end{cases}, \qquad \text{Vect}\left(f_{X_1}(0), f_{[X_1,[X_1,X_0]]}(0)\right) = \mathbb{R}^2.$$

État de l'art pour $x' = f_0(x) + uf_1(x) + vf_2(x)$

- Si $f_2 \equiv 0$, $W^{-1,\infty}$-STLC $\quad\Rightarrow\quad$ $f_{[x_1,[x_1,x_0]]}(0) \in \mathrm{Vect}\{f_b(0);\ n(b) = 1\}$.
  [Sussmann (1983), Stefani (1986)]
- Si $f_2(0) = 0$, L^∞-STLC $\quad\Rightarrow\quad$ $f_{[x_1,[x_1,x_0]]}(0) \in \mathrm{Vect}\{f_b(0);\ n_1(b) \leq 1\}$.
  [Giraldi, Lissy, Moreau et Pomet (2024)]
- [Agrachev (1990), Kawski (1987), Lewis et Hirschorn (2002)].

Conditions suffisantes

- $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Vect}\{f_b(0);\ n(b) \leq 2k\} \subseteq \mathrm{Vect}\{f_b(0);\ n(b) \leq 2k-1\}$ $\Rightarrow$ L^∞-STLC.
  [Hermes (1982)]
- **Condition $\mathcal{S}(\theta)$ de Sussmann** : LARC & $\exists \theta \in [0,1] \mid \forall b \in \mathcal{L}(X)$ avec $n_0(b)$ impair et $n_1(b), n_2(b)$ pairs,

  $$f_b(0) \in \mathrm{Vect}\{f_c(0);\ c \in \mathcal{L}(X),\ n(c) + \theta n_0(c) < n(b) + \theta n_0(b)\},$$

  $\Rightarrow$ L^∞-STLC. [Sussmann (1987)]
- [Agrachev et Gamkrelidze (1993), Krastanov (2009)].

Condition **nécessaire** de STLC : un premier exemple

Exemple

Le système $\begin{cases} x_1' &= u \\ x_2' &= v \\ x_3' &= x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 + 5ux_2^2 - 2x_2v \end{cases}$ n'est pas L^∞-STLC.

Pour tout $T > 0$, pour tous $u, v \in L^1((0,T),\mathbb{R})$,

$$\int_0^T \left(x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2\right)(s)\mathrm{d}s \geq \frac{3}{4}\int_0^T \left(x_1^2 + x_2^2\right)(s)\mathrm{d}s = \frac{3}{4}\int_0^T \left(u_1^2 + v_1^2\right)(s)\mathrm{d}s.$$

$$\left|\int_0^T u(s)x_2(s)^2\mathrm{d}s\right| = \left|\int_0^T u(s)v_1(s)^2\mathrm{d}s\right| \leq \|v_1\|_{L^2}^2 \|u\|_{L^\infty}.$$

Finalement,

$$x_3(T) \geq \left(\frac{3}{4} - 5\|(u,v)\|_{L^\infty}\right)\|(u_1,v_1)\|_{L^2}^2 - \overbrace{v_1(T)^2}^{=x_2(T)^2}.$$

$$x(T;(u,v),0) \in \{x \in \mathbb{R}^3;\ x_2^2 + x_3 \geq 0\}.$$

Formule de Magnus

Théorème – Formule de représentation de l'état de type Magnus

La solution de (EDO) est donnée par :

$$x(T;(u,v),0) = \sum_{b\in\mathcal{B}} \underbrace{\xi_b(T,(u,v))}_{\text{fonctionnelles explicites}} f_b(0) + \text{ termes de reste,} \qquad \text{(Magnus)}$$

où $\mathcal{B}$ est un sous-ensemble d'une base de $\mathcal{L}(X)$. [Beauchard, Le Borgne et Marbach (2023)]

Dans cette présentation,

$$\mathcal{B} = \underbrace{\mathcal{B}_1}_{\substack{\text{crochets "linéaires",}\\ n(b)=1}} \sqcup \underbrace{\mathcal{B}_2}_{\substack{\text{crochets "quadratiques",}\\ n(b)=2}} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_2 = \underbrace{\mathcal{B}_{2,good}}_{n_1(b)=n_2(b)=1} \sqcup \underbrace{\mathcal{B}_{2,bad}}_{(n_1(b),n_2(b))\in\{(0,2),(2,0)\}}.$$

De manière informelle,

☑	$\forall b \in \mathcal{B}_1,$	$\xi_b(T,-(u,v)) = -\xi_b(T,(u,v))$	$\rightsquigarrow \int u$ ou $\int v.$
☑	$\forall b \in \mathcal{B}_{2,good},$	$\xi_b(T,(-u,v)) = -\xi_b(T,(u,v))$	$\rightsquigarrow \int uv.$
✖	$\forall b \in \mathcal{B}_{2,bad},$	$\xi_b(T,(u,v)) \geq 0$	$\rightsquigarrow \int u^2$ ou $\int v^2.$

Remarque : pour les systèmes mono-contrôlés, $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_{2,bad}$ et $\mathcal{B}_{2,good} = \emptyset$.

Avec 1 contrôle...

$$(\star) \ : \ x' = f_0(x) + u(t) f_1(x) \qquad\qquad W_1 := [X_1, [X_1, X_0]].$$

Théorème – Sussmann

Si $f_{W_1}(0) \notin \mathrm{Vect}\{f_b(0);\ b \in \mathcal{B}_1\}$, alors $(\star)$ n'est pas $W^{-1,\infty}$-STLC.

[Sussmann (1983), Stefani (1986)]

Idée de preuve : on utilise (Magnus)

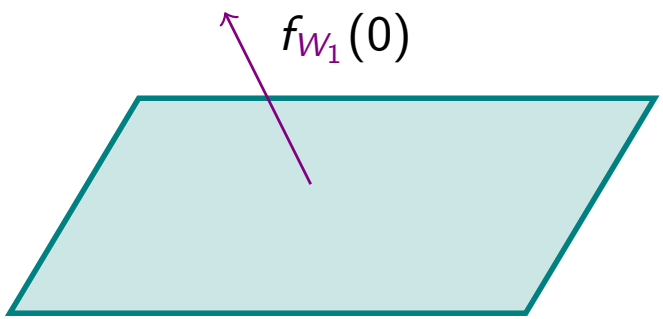
$$x(T;u,0) = \sum_{b\in\mathcal{B}_1} \xi_b(T,u) f_b(0) + \underbrace{\frac{1}{2}\|u_1\|_{L^2}^2}_{=\xi_{W_1}(T,u)} f_{W_1}(0) + \mathcal{O}\left(T\|u_1\|_{L^2}^2 + \underbrace{\|u_1\|_{L^3}^3}_{\leq \|u_1\|_{L^2}^2 \|u_1\|_{L^\infty}} + |u_1(T)|^2\right),$$

où $u_1 : t \in [0,T] \mapsto \int_0^t u(s)\mathrm{d}s$.

Closed-loop estimates :

$$\begin{cases} x_1' &= u \\ x_2' &= x_1^2 + u x_2^{56} \end{cases}$$

Alors, $|u_1(T)|^2 \leq |x(T;u,0)|^2$.



$\mathrm{Vect}\{f_b(0);\ b \in \mathcal{B}_1\}$

Avec 2 contrôles ...

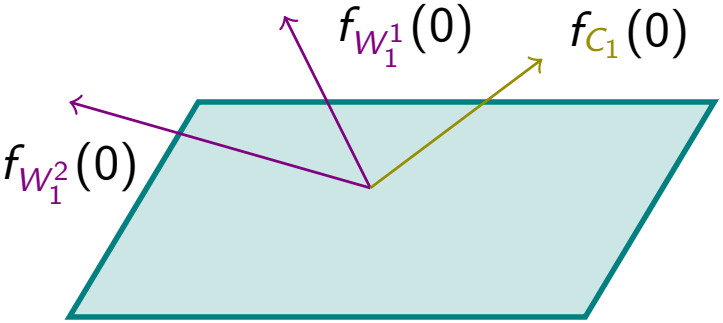
$$W_1^1 := [X_1,[X_1,X_0]], \qquad W_1^2 := [X_2,[X_2,X_0]], \qquad C_1 := [X_2,[X_1,X_0]].$$

L'égalité (Magnus) mène à

$$x(T;(u,v),0) = \frac{1}{2}\|u_1\|_{L^2}^2 f_{W_1^1}(0) + \frac{1}{2}\|v_1\|_{L^2}^2 f_{W_1^2}(0) + \left(\int_0^T u_1 v_1\right) f_{C_1}(0) +$$
$$\sum_{\substack{b\in\mathcal{B}_1\sqcup \\ \{[X_1,X_2]0^\nu;\nu\in\mathbb{N}\}}} \xi_b(T,(u,v)) f_b(0) + \mathcal{O}\Big(T\|(u_1,v_1)\|_{L^2}^2 + \underbrace{\|(u,v)\|_{L^1}^3}_{\leq C\|(u_1,v_1)\|_{L^2}^2\|(u'',v'')\|_{L^2}} + |u_1(T)|^2 + |v_1(T)|^2 \Big).$$

où

$$u_1 : t\in[0,T] \mapsto \int_0^t u(s)\mathrm{d}s.$$



$\mathrm{Vect}\{f_b(0);\ b\in\mathcal{B}_1\sqcup\{[X_1,X_2]0^\nu;\nu\in\mathbb{N}\}\}$

Faire gagner les méchants ...

Si $\mathbb{P} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire vérifiant $\mathbb{P}_{|\mathrm{Vect}\{f_b(0);\ b\in\mathcal{B}_1\sqcup\{[X_1,X_2]0^\nu;\nu\in\mathbb{N}\}\}} \equiv 0$,

$$\mathbb{P}\left(x(T;(u,v),0)\right) = \int_0^T \overbrace{\frac{1}{2}\mathbb{P}(f_{W_1^1}(0))u_1^2 + \frac{1}{2}\mathbb{P}(f_{W_1^2}(0))v_1^2 + \mathbb{P}(f_{C_1}(0))u_1 v_1}^{:=Q(u_1,v_1)}$$
$$+\mathcal{O}\left(\|(u_1,v_1)\|_{L^2}^2\left(T + \left\|(u'',v'')\right\|_{L^2}\right) + |u_1(T)|^2 + |v_1(T)|^2\right).$$

Closed-loop estimates : on prouve alors que $(f_1(0), f_2(0))$ est une famille libre.

$$\xi_{X_1}(T,(u,v)) = u_1(T), \qquad \xi_{X_2}(T,(u,v)) = v_1(T).$$

La **forme quadratique** Q est définie *ssi*

$$\mathbb{P}\left(f_{C_1}(0)\right)^2 < \mathbb{P}\left(f_{W_1^1}(0)\right)\mathbb{P}\left(f_{W_1^2}(0)\right).$$

Dans ce cas,

$$\mathbb{P}(x(T;(u,v),0)) \geq 0 \quad \text{lorsque } \left(T, \left\|(u'',v'')\right\|_{L^2}\right) \to 0.$$

Théorème – T.G. (2024)

Supposons qu'il existe une forme linéaire $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant

$$\mathbb{P}\,|_{\mathrm{Vect}\{f_b(0);\ b\in\mathcal{B}_1\sqcup\{[X_1,X_2]0^\nu;\nu\in\mathbb{N}\}\}} \equiv 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(f_{C_1}(0)\right)^2 < \mathbb{P}\left(f_{W_1^1}(0)\right)\mathbb{P}\left(f_{W_1^2}(0)\right).$$

Alors, (EDO) n'est pas H^2-STLC.

Reformulation sous forme de condition nécessaire **effective**.

Généralisations :

- $\rightsquigarrow$ à n'importe quel ordre de dérive,
- $\rightsquigarrow$ aux systèmes à r contrôles,
- $\rightsquigarrow$ aux dérives asymétriques,
- $\rightsquigarrow$ à la $W^{m,p}$-STLC pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [1, +\infty]$.

Condition **suffisante** de STLC : un premier exemple

Exemple

Le système $\begin{cases} x_1' &= u \\ x_2' &= v \\ x_3' &= x_1 v + x_1^2 + 107 x_2^2 \end{cases}$ est L^∞-STLC.

Approche *via* **vecteurs tangents :** [Frankowska (1987), Kawski (1990)]

- Les deux premières coordonnées sont linéairement contrôlables.
- Étude de la **troisième** : soient $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c^\infty((0,1),\mathbb{R})$ tels que $\int_0^1 \varphi\psi' = 1$. On pose

$$(u_z, v_z) : t \in [0,T] \mapsto |z|^{\frac{1}{4}} \left(\varphi', \mathrm{sgn}(z)\psi'\right)\left(\frac{|z|^{\frac{1}{4}} - T + t}{|z|^{\frac{1}{4}}}\right).$$

Alors,

- $x_1(t) = x_2(t) = 0$
- $\int_0^T x_1^2 = |z|^{\frac{5}{4}} \int_0^1 \varphi^2$,
- $\int_0^T x_2^2 = \mathrm{sgn}(z)|z|^{\frac{5}{4}} \int_0^1 \psi^2$,
- $\int_0^T x_1 v = z \int_0^1 \varphi\psi' = z$.

Finalement,

$$x\left(T; (u_z, v_z), 0\right) = z e_3 + \mathcal{O}\left(|z|^{\frac{5}{4}}\right).$$

Théorème – T.G. (2024)

On suppose qu'il existe $b_{r+1}, \cdots, b_d \in \mathcal{B}_{2,good}$ tels que :

$$\mathbb{R}^d = \text{Vect}\left\{f_b(0);\ b \in \mathcal{B}_1\right\} \oplus \text{Vect}\left(f_{b_{r+1}}(0), \cdots, f_{b_d}(0)\right). \qquad \text{(LARC)}$$

Soit $L := \max_{j \in [\![r+1,d]\!]} |b_j|$. Si,

$$\text{pour tout } b \in \mathcal{B}_{2,bad},\ |b| \leq L \Rightarrow f_b(0) \in \text{Vect}\left\{f_c(0);\ c \in \mathcal{B}_1\right\},$$

alors, (EDO) est $W^{m,\infty}$-STLC pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Retour à l'exemple

Le système $\begin{cases} x_1' &= u \\ x_2' &= v \\ x_3' &= x_1 v + x_1^2 + 107 x_2^2 \end{cases}$ vérifie

$$\text{Vect}\left(f_{X_1}(0), f_{X_2}(0), f_{[X_1,X_2]}(0)\right) = \mathbb{R}^4 \qquad \text{(LARC)}$$

et

$$\left\{b \in \mathcal{B}_{2,bad};\ |b| \leq |[X_1, X_2]|\right\} = \emptyset.$$

1. Cas de la dimension finie
   - Définitions : STLC et outils algébriques
   - État de l'art
   - Un premier exemple
   - Formule de représentation de l'état de type Magnus
   - Condition nécessaire de STLC
   - Condition suffisante de STLC

2. Adaptation aux EDP
   - Caractère bien posé
   - État de l'art
   - Condition nécessaire de STLC
   - Condition suffisante de STLC

$$\begin{cases} i\partial_t \psi = -\partial_{xx}^2 \psi - (u(t)\mu_1(x) + v(t)\mu_2(x))\,\psi, & (0,T)\times(0,1), \\ \psi(\cdot,0) = \psi(\cdot,1) = 0, & (0,T), \\ \psi(0,\cdot) = \psi_0, & (0,1). \end{cases} \tag{EDP}$$

On introduit $A := -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$, $D(A) := H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$. Il admet pour :

- valeurs propres : $\lambda_j = (j\pi)^2$ pour $j \geq 1$,
- vecteurs propres associés : $\varphi_j : x \in (0,1) \mapsto \sqrt{2}\sin(j\pi x)$ pour $j \geq 1$.

$(\varphi_j)_{j\geq 1}$ est une base hilbertienne de $L^2(0,1)$. On note $\mathcal{S}$ la sphère unité de $L^2(0,1)$.

Proposition – Caractère bien posé de (EDP)

Soient $T > 0$, $\mu_1, \mu_2 \in H^3((0,T),\mathbb{R})$, $u, v \in L^2((0,T),\mathbb{R})$ et $\psi_0 \in H_D^3(0,1) \cap \mathcal{S}$. Il existe une unique solution douce à (EDP), *i.e.* une fonction $\psi \in \mathcal{C}^0\left([0,T], H_D^3(0,1)\right) \cap \mathcal{S}$ telle que, dans $H_D^3(0,1)$, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\psi(t) = e^{-iAt}\psi_0 + i\int_0^t e^{-iA(t-s)}\left((u(s)\mu_1 + v(s)\mu_2)\psi(s)\right)\mathrm{d}s.$$

On notera cette solution $\psi(\cdot;(u,v),\psi_0)$. [Beauchard et Laurent (2010)]

Définition – STLC

On dit que (EDP) est L^2-STLC dans $H^3_D(0,1)$ si : pour tous $T, \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $\psi_f \in H^3_D(0,1) \cap \mathcal{S}$ vérifiant $\|\psi_f - \psi_1(T)\|_{H^3} \leq \delta$, il existe $u, v \in L^2((0,T),\mathbb{R})$ tels que $\|(u,v)\|_{L^2} \leq \varepsilon$ et $\psi(T;(u,v),\varphi_1) = \psi_f$.

[Beauchard, Bournissou, Chambrion, Laurent, Morancey, Perrin]

Théorème – Test linéaire

Soient $\mu_1, \mu_2 \in H^3((0,1),\mathbb{R})$ tels que :

$$\exists c > 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \left\| \left(\langle \mu_\ell \varphi_1, \varphi_j \rangle \right)_{1 \leq \ell \leq 2} \right\| \geq \frac{c}{j^3}.$$

Alors, (EDP) est L^2-STLC dans $H^3_D(0,1)$. [Beauchard et Laurent (2010)]

Cadre : $\exists K \geq 2$ tel que $\langle \mu_1 \varphi_1, \varphi_K \rangle = \langle \mu_2 \varphi_1, \varphi_K \rangle = 0$. On utilise une "**power series expansion**" [Beauchard, Bournissou, Cerpa, Coron, Crépeau, Marbach, Morancey].

Condition **nécessaire** de STLC

Théorème – T.G. (2025)

Soient $K \geq 1$ et $\mu_1, \mu_2 \in H^3((0,1),\mathbb{R})$ tels que :

1. $\langle \mu_1 \varphi_1, \varphi_K \rangle = \langle \mu_2 \varphi_1, \varphi_K \rangle = 0$,
2. $\langle [\mu_2,[\mu_1,\Delta]]\varphi_1, \varphi_K \rangle^2 < \langle [\mu_1,[\mu_1,\Delta]]\varphi_1, \varphi_K \rangle \langle [\mu_2,[\mu_2,\Delta]]\varphi_1, \varphi_K \rangle$.

L'équation (EDP) n'est pas $W^{-1,\infty}$-STLC dans $H^3_D(0,1)$.

Dans cette situation, $\mathbb{P} := \langle \cdot, \varphi_K \rangle$ et

1. $\mathbb{P}_{|\mathrm{Vect}\{f_b(0),\ b\in\mathcal{B}_1\}} = 0$ car $\mathbb{P}(f_\ell \varphi_1) = \langle \mu_\ell \varphi_1, \varphi_K \rangle,\ \ell \in \{1,2\}$ et $[\mu_1, \mu_2] = 0$,
2. $\mathbb{P}(e_3)^2 < \mathbb{P}(e_1)\mathbb{P}(e_2)$.

Généralisations :

$\rightsquigarrow$ à n'importe quel ordre de dérive,
$\rightsquigarrow$ aux systèmes à r contrôles.

On utilise un développement limité en $(0,0)$ de $(u,v) \mapsto \psi(T;(u,v),\varphi_1)$ à l'ordre 2 :

$$\psi \simeq \underbrace{\psi_1}_{\text{équilibre}} + \underbrace{\Psi}_{\text{linéaire}} + \underbrace{\xi}_{\text{quadratique}} .$$

Cette approximation est légitimée par

$$\langle (\psi(\cdot;u,\varphi_1) - \psi_1 - \Psi - \xi)(T), \varphi_K \rangle = \mathcal{O}\left(\|(u_1,v_1)\|^3_{L^2(0,T)} \right).$$

Elle repose sur le fait que $[\mu_1,\mu_2]=0$ et sa preuve utilise un **système auxiliaire**. Avec des IPP,

$$\Im \left\langle \xi(T), \varphi_K e^{-i\lambda_1 T} \right\rangle = \mathcal{O}\left(|u_1(T)|^2 + |v_1(T)|^2 + T\,\|(u_1,v_1)\|^2_{L^2(0,T)} \right)$$
$$+ \int_0^T \underbrace{\gamma^1 \frac{u_1(t)^2}{2} + \gamma^2 \frac{v_1(t)^2}{2} + \gamma^{1,2} u_1(t) v_1(t)}_{=Q(u_1(t),v_1(t))} \mathrm{d}t,$$

où $\gamma^\ell := \langle [\mu_\ell,[\mu_\ell,\Delta]]\varphi_1,\varphi_K\rangle$ pour $\ell \in \{1,2\}$ et $\gamma^{1,2} := \langle [\mu_2,[\mu_1,\Delta]]\varphi_1,\varphi_K\rangle$.

Condition **suffisante** de STLC

Théorème – T.G. (2024)

Soient $K \geq 2$ et $\mu_1, \mu_2 \in H^3((0,1),\mathbb{R})$ tels que :

1. $\langle \mu_1 \varphi_1, \varphi_K \rangle = \langle \mu_2 \varphi_1, \varphi_K \rangle = 0$.
2. $\exists c > 0,\ \forall j \in \mathbb{N}^* \setminus \{K\},\ \left\| (\langle \mu_i \varphi_1, \varphi_j \rangle)_{1 \leq i \leq 2} \right\| \geq \frac{c}{j^3}$.
3. $\gamma^1 := \langle [\mu_1, [\mu_1, \Delta]] \varphi_1, \varphi_K \rangle = 0$.
4. $\gamma^2 := \langle [\mu_2, [\mu_2, \Delta]] \varphi_1, \varphi_K \rangle = 0$.
5. $\gamma^{1,2} := \langle [\mu_2, [\mu_1, \Delta]] \varphi_1, \varphi_K \rangle \neq 0$.

L'équation (EDP) est L^2-STLC dans $H^3_D(0,1)$.

2.	Contrôle en projection grâce au linéaire.
3. et 4.	Neutralisation des mauvais crochets dans la direction perdue.
5.	Bon crochet quadratique à utiliser dans la direction perdue.

Généralisations :

$\rightsquigarrow$ étude de tous les bons crochets quadratiques,
$\rightsquigarrow$ à la $W^{m,\infty}$-STLC pour $m \in \mathbb{N}$.

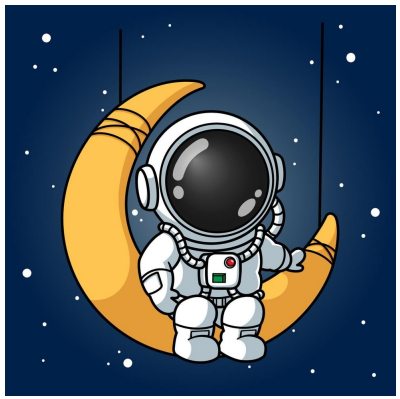
Bibliographie

Théo Gherdaoui
Small-Time Local Controllability of the multi-input bilinear Schrödinger equation thanks to a quadratic term, ESAIM: COCV, DOI 10.1051/cocv/2024091, 2024.

Théo Gherdaoui
Quadratic obstructions to small-time local controllability for multi-input systems, Journal of Dynamics and Differential Equations, to appear, arXiv: 2412.17384, 2024.

Théo Gherdaoui
Quadratic obstructions to Small-Time Local Controllability for the multi-input bilinear Schrödinger equation, arXiv: 2502.14999, 2025.

Perspectives

- Adaptation à d'autres équations.
- Améliorer le terme de reste dans la formule de Magnus dans le cas des systèmes multi-commandés.
- Généraliser l'obstruction de Stefani au cas des systèmes multi-commandés.

Merci pour votre attention !