

Compléments de cours - Agrégation externe

Équations différentielles ordinaires :

Voici les notes de cours que j'ai réalisées afin de donner aux agrégatifs mon complément de cours de 3h sur les équations différentielles ordinaires. Il vient compléter une séance de rappels de cours donnée par Karine Beauchard.

Table des matières

1	Retour sur le théorème de Cauchy-Lipschitz	1
2	Retour sur le théorème d'explosion en temps fini	2
3	Exponentielle de matrices	3
4	Étude de la stabilité	4
4.1	Un lemme fondamental	4
4.2	Théorème de linéarisation en première approche	6
5	Portraits de phase en dimension 2	8
5.1	1 ^{er} exemple	8
5.2	2 ^{ème} exemple	9
5.3	3 ^{ème} exemple	9
5.4	4 ^{ème} exemple	10
5.5	5 ^{ème} exemple	11

1 Retour sur le théorème de Cauchy-Lipschitz

Theorème 1 (*Théorème de Cauchy-Lipschitz*)

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , Ω un ouvert de \mathbb{R}^d , et $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Alors, pour tout $t_0 \in I$, $y_0 \in \Omega$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale (J, y) définie sur un intervalle ouvert $J \subseteq I$, contenant t_0 .

Remarques.

- Le théorème de Cauchy-Lipschitz se généralise aux fonctions f définies sur $I \times \Omega_E$, avec Ω_E un ouvert (connexe) d'un espace de Banach. La complétude est nécessaire ; afin de donner un sens à la formulation intégrale de l'équation différentielle, et pour appliquer le théorème du point fixe de Picard. C'est faux pour le théorème de Cauchy-Arzela-Peano. Ce théorème ne fournit pas non plus d'unicité.
- La preuve repose sur l'application du théorème du point fixe de Picard à la formulation intégrale du problème de Cauchy ; dans le cas des fonctions localement lipschitziennes, il faut introduire les cylindres de sécurité. Dans le cas globalement lipschitzien, on peut conclure en montrant qu'un des itérés est contractant, ou en appliquant un changement de norme.
- Une fonction localement lipschitzienne est continue, l'hypothèse de continuité de f porte sur la dépendance en t .
- L'hypothèse : f est localement lipschitzienne sur Ω est équivalent à : f est globalement lipschitzienne sur tout compact de Ω (puisque par Borel-Lebesgue, un compact est recouvert par un nombre fini de boules).

- Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux EVN, $\Omega_E \subseteq E$ un ouvert, et $f : \Omega_E \rightarrow F$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Alors, f est localement lipschitzienne sur Ω_E . En effet, fixons $x_0 \in \Omega_E$. Alors, il existe $\delta > 0$, tel que $B_E^\circ(x_0, \delta) \subseteq \Omega_E$. De plus, par définition de la continuité de $df : (\Omega_E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (\mathcal{L}_c(E, F), \|\cdot\|)$ en x_0 , il existe $r > 0$ tel que, pour tout $x \in B_E^\circ(x_0, r)$, $\|df(x) - df(x_0)\| \leq 1$. Ainsi,

$$\sup_{x \in B_E^\circ(x_0, r)} \|df(x)\| \leq \|df(x_0)\| + 1 =: M < \infty.$$

On pose $\mathcal{V}_{x_0} := B_E^\circ(x_0, \min(\delta, r))$. Alors, pour tout $x, y \in \mathcal{V}_{x_0}$, on a, par inégalité des accroissements finis sur le convexe \mathcal{V}_{x_0} , $\|f(x) - f(y)\|_F \leq \sup_{z \in [x, y]} \|df(z)\| \|x - y\|_E \leq M \|x - y\|_E$.

2 Retour sur le théorème d'explosion en temps fini

Proposition 1

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable vérifiant : il existe $M_1, M_2 \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \|f(t, x)\| \leq M_1(t) \|x\| + M_2(t).$$

Alors, les solutions maximales du problème de Cauchy $y'(t) = f(t, y(t))$ sont globales.

Démonstration : Les hypothèses assurent qu'à une condition initiale fixée, $y(t_0) = y_0$, le problème de Cauchy admet une unique solution maximale (I, y) définie sur un intervalle ouvert I contenant t_0 , $I = (T_*, T^*)$. Le critère d'explosion en temps fini assure qu'à lieu l'alternative suivante : $T^* = +\infty$, ou $\lim_{t \rightarrow T^*, t < T^*} \|y(t)\| = +\infty$. Remarquons que

$$\forall t \in (t_0, T^*), \|y(t)\| \leq \|y_0\| + \int_{t_0}^t \|f(s, y(s))\| ds \left(\|y_0\| + \int_{t_0}^t M_2(s) ds \right) + \int_{t_0}^t M_1(s) \|y(s)\| ds.$$

Le lemme de Grönwall donne : $\forall t \in (t_0, T^*)$,

$$\|y(t)\| \leq \|y_0\| + \int_{t_0}^t M_2(s) ds + \int_{t_0}^t \left(\|y_0\| + \int_{t_0}^s M_2(u) du \right) M_1(s) \exp \left(\int_s^t M_1(u) du \right) ds.$$

Les fonctions M_1 et M_2 étant $L_{loc}^1(\mathbb{R})$, on ne peut avoir explosion en temps fini. Ainsi, le théorème des bouts donne $T^* = +\infty$. On obtient de la même façon $T_* = -\infty$. ■

Proposition 2

Soit $U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} U(x) = +\infty$. Les solution maximales de $x'(t) = -\nabla U(x(t))$ avec condition initiale en 0 sont définies sur \mathbb{R}^+ et sont bornées.

Démonstration : Le champ de vecteurs ∇U étant \mathcal{C}^1 , le théorème de Cauchy-Lipschitz assure qu'à condition initiale fixée, le système-gradient admet une unique solution x définie sur un intervalle ouvert I , contenant 0. De plus, on a, $\forall t \in I$,

$$\frac{d}{dt} (U(x(t))) = dU(x(t))(x'(t)) = (\nabla U(x(t)) | -\nabla U(x(t))) = -\|\nabla U(x(t))\|^2 \leq 0.$$

Ainsi, $\forall t \in I \cap \mathbb{R}^+$, $U(x(t)) \leq U(x(0))$. La coercivité de U assure qu'il n'y a pas explosion en temps fini positif. Ainsi, le théorème de sortie de tout compact donne $\mathbb{R}^+ \subset I$. ■

Remarque 1. En dimension finie, si la solution maximale d'une équation différentielle évolue dans les lignes de niveaux d'une fonction coercive continue, alors elle est globale (car les lignes de niveaux d'une fonction coercive continue sont compactes).

3 Exponentielle de matrices

Proposition 3

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ commutent, alors $e^{A+B} = e^A e^B$.

Démonstration : Classiquement, on a par produit de Cauchy :

$$e^A e^B = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^n}{n!},$$

par binôme de Newton, puisque A et B commutent.

Une autre preuve, plus propre aux EDO, est la suivante : soient $f : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{t(A+B)}$ et $g : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{tA} e^{tB}$. On a : $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = (A+B)f(t)$, et $g'(t) = Ag(t) + e^{tA} B e^{tB}$. Puisque $e^{tA} \in \mathbb{K}[A]$ (car c'est un sous-espace vectoriel de dimension finie, donc fermé), et comme A et B commutent, alors, $[B, e^{tA}] = 0$. Ainsi, $g'(t) = (A+B)g(t)$. Puisque $f(0) = g(0) = I_n$, f et g vérifient le même problème de Cauchy. Par unicité, elles coïncient, $f(t) = g(t)$ conclut. ■

Lemme 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang 1. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = \text{tr}(A)^{n-1} A.$$

Démonstration : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une telle matrice. Alors, par définition, $\text{Im}(A) = \text{Vect}(U)$, pour $U \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (car A n'est pas la matrice nulle). Alors, les colonnes de A étant proportionnelles à U , il existe $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ tel que $A = (v_1 U, \dots, v_n U)$. Par suite, $A = U \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix} = U^t V$, avec $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$. Ainsi,

$$A^2 = U^t V U^t V = U \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}} V = ({}^t V U) A.$$

Remarquons finalement que :

$${}^t V U = \sum_{i=1}^n u_i v_i = \text{tr}(A).$$

Ainsi, $A^2 = \text{tr}(A)A$. La conclusion suit par récurrence immédiate. ■

Corollaire 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 1 et de trace non nulle. Alors, pour tout réel t ,

$$e^{tA} = I_2 + \frac{1}{\text{tr}(A)} \left(e^{\text{tr}(A)t} - 1 \right) A.$$

Démonstration : Pour tout réel t , $e^{tA} = I_2 + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \text{tr}(A)^{k-1} \right) A = I_2 + \frac{1}{\text{tr}(A)} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \text{tr}(A)^k \right) A$. ■

Remarques.

1. *Sans l'hypothèse de commutation, la relation est fautive.* En effet, soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors, $AB \neq BA$. Les matrices A et B étant nilpotentes d'ordre 2, on calcule facilement leur exponentielle : $e^A = I_2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $e^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ de sorte que $e^A e^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Or, $(A+B)^2 = I_2$, donc, $e^{A+B} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_2}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A+B}{(2n+1)!} = \begin{pmatrix} ch(1) & sh(1) \\ sh(1) & ch(1) \end{pmatrix} \neq e^A e^B$.

2. **La réciproque est fautive.** En effet, pour $A = \begin{pmatrix} 2i\pi & 0 \\ 0 & -2i\pi \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2i\pi \end{pmatrix}$, alors, $e^A = I_2$. Puisque B est de rang 1, $e^B = I_2 + \frac{1}{2i\pi}(e^{2i\pi} - 1)B = I_2$. Avec un calcul similaire, on a $e^{A+B} = I_2 = e^A e^B$. Pourtant, $AB = \begin{pmatrix} 0 & 2i\pi \\ 0 & 4\pi^2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & -2i\pi \\ 0 & 4\pi^2 \end{pmatrix} = BA$.

Proposition 4

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors :

$$AB = BA \text{ ssi } \forall t \in \mathbb{R}, e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}.$$

Démonstration : Le sens direct provient de la proposition 3. Pour la réciproque, on considère

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{t(A+B)} - e^{tA}e^{tB},$$

qui est nulle par hypothèse. Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi''(t) = (A+B)^2 e^{t(A+B)} - A^2 e^{tA} e^{tB} - 2Ae^{tA} B e^{tB} - e^{tA} B^2 e^{tB}.$$

Ainsi, $\varphi''(0) = (A+B)^2 - A^2 - 2AB - B^2 = 0$ donne $[A, B] = 0$. ■

Lemme 2

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, commutant avec $[A, B]$. Alors, pour tout t réel, $e^{tB} A e^{-tB} = A - [A, B]t$.

Démonstration : Soit $\Phi : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{tB} A e^{-tB}$. Alors, pour tout t réel, $\Phi'(t) = B e^{tB} A e^{-tB} - e^{tB} A B e^{-tB}$. Comme B commute avec $e^{tB} \in \mathbb{K}[B]$, $\Phi'(t) = e^{tB}(BA - AB)e^{-tB} = -e^{tB}[A, B]e^{-tB}$. Par hypothèse, B commute avec $[A, B]$, donc, $\Phi'(t) = -[A, B]e^{tB}e^{-tB} = -[A, B]$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi(t) = \Phi(0) - [A, B]t = A - [A, B]t$. ■

Proposition 5

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, commutant avec $[A, B]$. Alors $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A, B]}$.

Démonstration : Considérons $\Phi : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{tA} e^{tB} e^{-t(A+B)}$. Alors, pour tout t réel, $\Phi'(t)\Phi^{-1}(t) = A + e^{tA} B e^{-tA} - e^{tA} e^{tB} (A+B) e^{-tA} e^{-tB} = A + e^{tA} B e^{-tA} - e^{tA} \underbrace{e^{tB} A e^{-tB}}_{=A - [A, B]t} e^{-tA} - e^{tA} \underbrace{e^{tB} B e^{-tB}}_{=B} e^{-tA} = A - \underbrace{e^{tA} A e^{-tA}}_{=A} + e^{tA} [A, B] t e^{-tA}$. Par hypothèse, $[A, B]$ commute avec A , donc, $\Phi'(t) = [A, B]t\Phi(t)$.

Ainsi, $\Phi(t) = e^{\frac{t^2}{2}[A, B]}\Phi(0) = e^{\frac{t^2}{2}[A, B]}$. En évaluant en $t = 1$, on a : $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A, B]}$. En utilisant une dernière fois le fait que A et B commutent avec $[A, B]$, et la proposition 3, on conclut. ■

Il s'agit d'un cas particulier de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff.

4 Étude de la stabilité

4.1 Un lemme fondamental

Proposition 6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\sigma(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C}, \text{Re}(z) < 0\}$. Alors, il existe $K, \sigma > 0$, tel que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\|e^{tA}\| \leq K e^{-\sigma t}.$$

Démonstration : 1^{ère} preuve : utilisation du théorème de réduction de Jordan. Soit $\sigma > 0$ tel que $\sigma(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C}, \text{Re}(z) < -\sigma\}$. On note $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$, où les valeurs propres sont deux à deux distinctes, de multiplicité algébrique respective $m_i \in \mathbb{N}^*$. Le polynôme caractéristique

est scindé sur \mathbb{C} , $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$. Alors, le lemme des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton donne : $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^r \ker((A - \lambda_i I_n)^{m_i})$. Soit $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, et $v \in \ker((A - \lambda_i I_n)^{m_i})$. Alors, pour $t \in \mathbb{R}^+$,

$$e^{tA}v = e^{(\lambda_i I_n + A - \lambda_i I_n)t}v \underset{[\lambda_i I_n, A - \lambda_i I_n]=0}{=} e^{\lambda_i t} e^{(A - \lambda_i I_n)t}v = e^{\lambda_i t} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_i I_n)^k v.$$

$$\|e^{tA}v\| \leq e^{Re(\lambda_i)t} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k}{k!} \|(A - \lambda_i I_n)^k\| \|v\|.$$

Ainsi,

$$\|e^{tA}v\| e^{\sigma t} \leq \max_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket} \left(e^{(Re(\lambda_i) + \sigma)t} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k}{k!} \|(A - \lambda_i I_n)^k\| \right) \|v\|.$$

Donc, pour $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\| \|e^{tA}\| \|e^{\sigma t}\| \leq \max_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket} \underbrace{\left(e^{(Re(\lambda_i) + \sigma)t} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k}{k!} \|(A - \lambda_i I_n)^k\| \right)}_{=: f_i(t)}.$$

Comme $Re(\lambda_i) + \sigma < 0$, on obtient par croissance comparée $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_i(t) = 0$. Par continuité, f_i est bornée sur \mathbb{R}^+ . Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \| \|e^{tA}\| \| \leq K e^{-\sigma t}.$$

2^{ème} preuve : utilisation de l'analyse complexe. Soient $\sigma > 0$ et Ω , un disque contenu dans $\{z \in \mathbb{C}, Re(z) < -\sigma\}$ tel que $\sigma(A) \subset \mathring{\Omega}$. Alors,

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{tA} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} e^{tz} (zI_n - A)^{-1} dz.$$

En effet, remarquons premièrement que $\sigma(A) \subset \mathring{\Omega}$, donc $\partial\Omega \cap \sigma(A) = \emptyset$, donc pour $z \in \partial\Omega$, $zI_n - A \in Gl_n(\mathbb{R})$, et le second membre est bien défini. On le nomme $f(t)$. Remarquons que $t \mapsto e^{tz} (zI_n - A)^{-1}$ est dérivable sur \mathbb{R} , pour tout $z \in \partial\Omega$. De plus, pour tout $a > 0$, $t \in [-a, a]$, $z \in \partial\Omega$,

$$\| \|\partial_t (e^{tz} (zI_n - A)^{-1})\| \| = e^{tRe(z)} |z| \cdot \| (zI_n - A)^{-1} \| \leq e^{|z|^a} |z| \cdot \| (zI_n - A)^{-1} \|,$$

qui est intégrable, comme fonction continue sur un compact. Ainsi, on peut dériver sous le signe intégral, et $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$f'(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} z e^{tz} (zI_n - A)^{-1} dz = \underbrace{\left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} e^{tz} dz \right)}_{=0 \text{ (holomorphe)}} I_n + \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} A e^{tz} (zI_n - A)^{-1} dz = Af(t).$$

De plus, $f(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} (zI_n - A)^{-1} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0, R)} (zI_n - A)^{-1} dz$ pour R assez grand, par holomorphie de l'intégrande. Ainsi, en paramétrant le disque,

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta} I_n - A)^{-1} Re^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(I_n - \frac{Ae^{-i\theta}}{R} \right)^{-1} d\theta.$$

Pour $R > \| \|A\| \|$, on obtient par la série de Von-Neumann et en utilisant la convergence normale de la série de fonctions,

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} A^k \frac{e^{-ik\theta}}{R^k} d\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{R^k} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} d\theta \right)}_{=: \delta_{k,0}} = I_n.$$

Ainsi, f et $t \mapsto e^{tA}$ sont solutions du problème de Cauchy $\begin{cases} f'(t) &= Af(t) \\ f(0) &= I_n \end{cases}$, on conclut par unicité. Utilisons cette égalité pour conclure. Soit $t \in \mathbb{R}^+$, alors :

$$\|e^{tA}\| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{z \in \partial\Omega} (|e^{tz}| \cdot \|(zI_n - A)^{-1}\|) L(\partial\Omega) \leq \underbrace{\frac{1}{2\pi} L(\partial\Omega) \sup_{z \in \partial\Omega} \|(zI_n - A)^{-1}\|}_{=:K} e^{-t\sigma}. \quad \blacksquare$$

4.2 Théorème de linéarisation en première approche

Theorème 2 (Théorème de linéarisation de Lyapounov)

Soit $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $v(x^*) = 0$. Notons $A = \text{Jac}(v)(x^*)$. Si $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C}, \text{Re}(z) < 0\}$, alors x^* est un point d'équilibre asymptotiquement stable du système $x'(t) = v(x(t))$.

Remarques.

- La stabilité asymptotique est une notion locale, on peut donc espérer déduire des informations sur le système non linéaire à partir du système linéarisé (comme dans le théorème d'inversion locale). Le théorème de Lyapounov assure que si x^* est un point d'équilibre asymptotiquement stable du système linéarisé $x'(t) = \text{Jac}(v)(x^*)x(t)$ (critère de Routh), alors, il en est de même pour le système non linéaire.
- On a aussi : s'il existe $\lambda \in \sigma(A)$ tel que $\text{Re}(\lambda) > 0$, alors, x^* est un point d'équilibre instable du système non linéaire.
- La notion de stabilité (non asymptotique) est une notion trop fine pour passer du linéaire au non linéaire. Si la jacobienne de v admet une valeur propre de partie réelle nulle, alors, on ne peut rien conclure. Les quatre cas de figure sont possibles.

Application. Pendule. Soit $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ tel que $F(0) = 0$ et $F'(0) \geq 0$. Étudions la nature des points d'équilibre de l'EDO régissant l'évolution d'un pendule simple soumis à une forme de frottements, donnée par : $\theta'' = -\sin(\theta) - F(\theta')$. On commence par vectoriser l'équation :

en posant $X = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta' \end{pmatrix}$, $X' = f(X)$ où $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (y, -\sin(x) - F(y)) \end{matrix}$. Fixons une condition initiale $X(t_0) = X_0 \in \mathbb{R}^2$. Puisque $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert contenant t_0 . Remarquons de plus que pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\|f(x, y)\|_\infty \leq \|(x, y)\|_\infty + 1 + \|F\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$. On peut donc conclure en utilisant le fait que la fonction est au plus linéaire que toute solution maximale est globale. De plus, les points d'équilibre sont $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. Étudions leur nature :

$$\text{Jac}(f)(k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{k+1} & -F'(0) \end{pmatrix}.$$

1. Si k est pair :

$$\text{Jac}(f)(k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -F'(0) \end{pmatrix} =: A.$$

- * Si les valeurs propres de la jacobienne sont réelles, notons les λ_1, λ_2 . Alors, $\det(A) = 1$ donc les valeurs propres sont de même signe et non nulles. Puisque $\text{tr}(A) = -F'(0) \leq 0$, elles sont strictement négatives. Ainsi, le théorème de linéarisation conclut au caractère asymptotiquement stable du point d'équilibre $(k\pi, 0)$.
- * Sinon, elles sont complexes non réelles conjuguées. Comme $\text{tr}(A) = 2\text{Re}(\lambda_1) \leq 0$, le théorème de Lyapounov conclut de la même manière.

2. Si k est impair :

$$\text{Jac}(f)(k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -F'(0) \end{pmatrix} =: A.$$

Comme $\det(A) = -1$, les valeurs propres sont nécessairement réelles, non nulles, de signe opposé. L'une des deux est strictement positive. Par la remarque, $(k\pi, 0)$ est donc un point d'équilibre instable.

Application. Oscillations non linéaire. On considère l'EDO : $x'' + kx' + g(x) = 0$, où $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(0) = 0$, et $k > 0$. On vectorise l'équation : avec $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$, on a $X' = f(X)$

où $f : \begin{bmatrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (y, -ky - g(x)) \end{bmatrix}$. Alors, l'unique point d'équilibre est $0_{\mathbb{R}^2}$, et

$$Jac(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g'(0) & -k \end{pmatrix} =: A.$$

1. Si $g'(0) = 0$, alors $\sigma(A) = \{0, -k\}$, donc on ne peut pas conclure.
2. Si $g'(0) > 0$, $\det(A) > 0$, et $\text{tr}(A) < 0$, alors, les valeurs propres sont non nulles, soit réelles strictement négatives, soit complexes non réelles de partie réelle strictement négative. Dans les deux cas, le théorème conclut à l'asymptotique stabilité.
3. Sinon, $g'(0) < 0$, les valeurs propres sont non nulles, ne peuvent être que réelles, et de signe opposé, donc on conclut à l'instabilité.

Application. Stabilisation par feed-back. On considère $\begin{cases} x' = y + x - x^3/3 + u(x) \\ y' = -x \end{cases}$. Étudions la nature des points d'équilibre pour $u \equiv 0$. L'unique point d'équilibre est $(0, 0)$, et la matrice jacobienne est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, ayant pour valeur propre $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Il est donc instable.

Pour $u(x) = -2x$, on obtient toujours $(0, 0)$ comme unique point d'équilibre, ayant pour matrice jacobienne $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, dont le spectre est $\sigma(B) = \left\{ \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \right\}$. Il est donc asymptotiquement stable. Le feed-back a permis de stabiliser le point instable.

Démonstration : On remarque que, quitte à translater, on peut supposer que $x^* = 0$. La fonction v étant C^1 , le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = v(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ admet une unique solution maximale $x(\cdot, x_0)$, définie sur $I_{x_0} = (T_{*,x_0}, T^{*,x_0})$ intervalle ouvert contenant 0. Les deux points suivants sont vérifiés :

1. par le lemme, il existe $K > 0$ et $\sigma > 0$, tel que $\forall t \in \mathbb{R}^+, \|e^{tA}\| \leq K e^{-\sigma t}$.
2. par définition de la différentiabilité de v en 0, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq \delta, \|v(x) - v(0) - Ax\| \leq \varepsilon \|x\|$.

Heuristique : On va interpréter la non linéarité comme une perturbation du système linéaire. Ainsi, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n, \|x_0\| \leq \delta$,

$$\forall t \in]T_{*,x_0}, T^{*,x_0}[, \quad x'(t, x_0) = Ax(t, x_0) + (v(x(t, x_0)) - Ax(t, x_0)).$$

La formule de Duhamel fournit :

$$\forall t \in]T_{*,x_0}, T^{*,x_0}[, \quad x(t, x_0) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}(v(x(s, x_0)) - Ax(s, x_0))ds.$$

Donc,

$$\forall t \in [0, T^{*,x_0}[, \quad \|x(t, x_0)\| \leq K e^{-\sigma t} \|x_0\| + \int_0^t K e^{-\sigma(t-s)} \|v(x(s, x_0)) - Ax(s, x_0)\| ds.$$

Si on réussit à montrer que pour des conditions initiales assez petites, la solution ne sort pas de la boule $B(0, \delta)$, le point (2) assurera que :

$$\forall t \in [0, T^{*,x_0}[, \quad \|x(t, x_0)\| \leq K e^{-\sigma t} \|x_0\| + K \varepsilon \int_0^t e^{-\sigma(t-s)} \|x(s, x_0)\| ds,$$

i.e.

$$\forall t \in [0, T^{*,x_0}[, \quad e^{\sigma t} \|x(t, x_0)\| \leq K \|x_0\| + K \varepsilon \int_0^t e^{\sigma s} \|x(s, x_0)\| ds$$

On aura alors par le lemme de Grönwall,

$$\forall t \in [0, T^{*,x_0}[, \quad \|x(t, x_0)\| \leq K \|x_0\| e^{(K\varepsilon - \sigma)t}.$$

Étape 1 : K et σ étant fixés par le lemme, on pose $\varepsilon = \frac{\sigma}{2K}$ et on considère le δ associé à la définition de la différentiabilité de v en 0. Montrons que si $x_0 \in \mathbb{R}^n$, tel que $\|x_0\| < \min\left(\delta, \frac{\delta}{2K}\right)$, alors, $\forall t \in [0, T^{*,x_0}]$, $\|x(t, x_0)\| \leq \delta$.

On suppose que ce n'est pas le cas, et on introduit $\tau = \sup\{t > 0, \forall s \in [0, t], \|x(s, x_0)\| < \delta\}$. C'est un ensemble, non vide, par choix de x_0 et par continuité, et par hypothèse, majorée. Les deux points suivants en découlent :

1. $\forall s \in [0, \tau[$, $\|x(s, x_0)\| < \delta$. En effet, si ce n'est pas le cas, on considère $\rho \in [0, \tau[$ tel que $\|x(\rho, x_0)\| \geq \delta$. Puisque τ est le plus petit des majorants, et que $\rho < \tau$, ρ n'est pas un majorant, donc, $\exists t \in (\rho, \tau]$ tel que $\forall s \in [0, t]$, $\|x(s, x_0)\| < \delta$, et $s = \rho$ fournit une contradiction.
2. $\|x(\tau, x_0)\| = \delta$. En effet, on a trivialement que $\|x(\tau, x_0)\| \leq \delta$, en passant à la limite dans le point 1. Si l'inégalité était stricte, on aurait par continuité l'existence de $\eta > 0$ tel que $\|x(t, x_0)\| < \delta$ pour $t \in [\tau - \eta, \tau + \eta]$. Ainsi, pour tout $t \in [0, \tau + \eta]$, $\|x(t, x_0)\| < \delta$, et on a $\tau + \eta < \tau$, impossible !

Ainsi, l'heuristique est vraie sur $[0, \tau[$, et on obtient

$$\forall t \in [0, \tau[, \|x(t, x_0)\| \leq K \|x_0\| e^{-\frac{\sigma}{2}t} \leq K \|x_0\| \leq \frac{\delta}{2}.$$

On obtient une contraction en faisant $t \rightarrow \tau$.

Étape 2 : 0 est un point d'équilibre stable : soit $\xi > 0$, et on fixe $x_0 \in B\left(0, \min\left(\delta, \frac{\delta}{2K}, \frac{\xi}{K}\right)\right)$. Par ce qui a été fait en étape 1, la solution reste dans la boule de rayon δ , et par l'heuristique :

$$\forall t \in [0, T^{*,x_0}], \|x(t, x_0)\| \leq K \|x_0\| e^{-\frac{\sigma}{2}t}.$$

Par le théorème des bouts, on obtient $T^{*,x_0} = +\infty$, et

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \|x(t, x_0)\| \leq K \|x_0\| \leq \xi.$$

Étape 3 : 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable : c'est déjà un équilibre stable, et la décroissance exponentielle permet de conclure à la limite. ■

5 Portraits de phase en dimension 2

Cette partie regroupe l'étude de 5 portraits de phase de systèmes différentiels linéaires à coefficients constants en dimension 2 de la forme $X' = AX$. Remarquons premièrement que si $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ est une donnée initiale dans la base canonique, et si $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ est une base de \mathbb{R}^2 , alors les coordonnées de X_0 dans cette base sont donnée par \tilde{X}_0 vérifiant $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = P\tilde{X}_0$, avec P la matrice de passage de la base canonique à la base \mathcal{B} , *i.e.* dont les colonnes sont les vecteurs v_1 et v_2 . Alors, la solution $X(t) = e^{tA}X_0$ s'exprime dans la base \mathcal{B} par :

$$\tilde{X}(t) = P^{-1}X(t) = P^{-1}e^{tA}P\tilde{X}_0 = e^{P^{-1}APt}\tilde{X}_0.$$

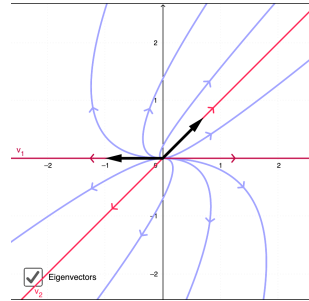
5.1 1^{er} exemple

Ici, $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice est triangulaire supérieure, de spectre $\sigma(A_1) = \{1, 2\}$. Son polynôme caractéristique est scindé à racines simples, donc A_1 est diagonalisable, semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On a clairement $\ker(A_1 - I_2) = \mathbb{R} \underbrace{e_1}_{=:v_1}$, et $\ker(A_1 - 2I_2) = \mathbb{R} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:v_2}$.

De fait,

$$\exp(tA_1) \sim \exp(tD) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Si $x_0 = \alpha v_1 + \beta v_2$, alors, $x(t) = \underbrace{\alpha e^t}_{=:x_1(t)} v_1 + \underbrace{\beta e^{2t}}_{=:x_2(t)} v_2$. Par suite, $x_2(t) = \frac{\beta}{\alpha^2} (x_1(t))^2$. On obtient alors le portrait de phase suivant :

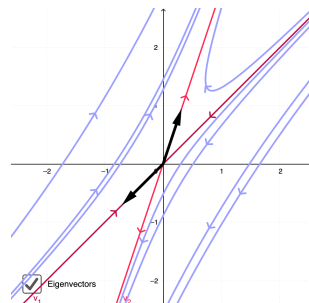


Il s'agit d'un noeud instable (cas des valeurs propres strictement positives).

5.2 2^{ème} exemple

Ici, $A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. On a $\chi_{A_2}(X) = X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$. Ainsi, A_2 est diagonalisable, et $E_1(A_2) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{=:v_1} \mathbb{R}$, $E_{-1}(A_2) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:v_2} \mathbb{R}$. De plus, $\exp(tA_2) \sim \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$.

Si $x_0 = \alpha v_1 + \beta v_2$, alors, $x(t) = \underbrace{\alpha e^t}_{=:x_1(t)} v_1 + \underbrace{\beta e^{-t}}_{=:x_2(t)} v_2$. Par suite, $x_2(t) = \frac{\alpha\beta}{x_1(t)}$. On obtient alors le portrait de phase suivant :



Il s'agit d'un point selle (cas des valeurs propres de signe opposé).

5.3 3^{ème} exemple

Ici, $A_3 = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. On a $\chi_{A_3}(X) = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$. La matrice A_3 n'est pas diagonalisable (sinon, elle serait égale à I_2), on cherche donc à la réduire sous forme de Jordan. Puisque $\ker(A_3 - I_2) = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=:v_1} \mathbb{R}$. On choisit $v_2 = e_1$, ainsi, (v_1, v_2) forme une base de \mathbb{R}^2 , et,

$A_3 v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = v_1 + v_2$. Ainsi,

$$\exp(tA_3) \sim \exp\left(t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Si $x_0 = \alpha v_1 + \beta v_2$, alors, $x(t) = \underbrace{(\alpha e^t + \beta t e^t)}_{=:x_1(t)} v_1 + \underbrace{\beta e^t}_{=:x_2(t)} v_2$. Donc,

$$x_1(t) = \frac{\alpha}{\beta} x_2(t) + x_2(t) \ln\left(\frac{x_2(t)}{\beta}\right) = \left(\frac{\alpha}{\beta} - \ln(\beta)\right) x_2(t) + x_2(t) \ln(x_2(t)).$$

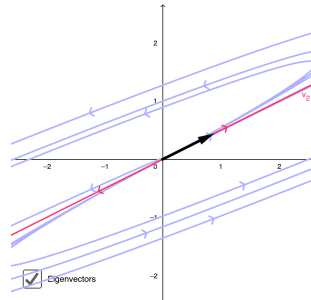
On définit alors $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto ax + \ln(x)x$. Étudions cette fonction. On a clairement,

$$\forall x > 0, f'(x) = a + 1 + \ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^{-(a+1)}.$$

Ceci donne le tableau de signe suivante :

x	0	$e^{-(a+1)}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	0		

Ceci donne une idée de la fonction à tracer. On obtient alors le portrait de phase suivant :



Il s'agit d'un nœud dégénéré répulsif.

5.4 4^{ème} exemple

Ici, $A_4 = \begin{pmatrix} -5 & -12 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, et $\chi_{A_4}(X) = X^2 + 10X + 49 = (X + 5)^2 + 24$. Donc, $\sigma(A_4) = \{-5 \pm 2i\sqrt{6}\}$, et $\ker(A_4 - (-5 + 2i\sqrt{6})I_2) = \underbrace{\begin{pmatrix} i\sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:w} \mathbb{R}$. On note $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}$,

et (v_1, v_2) forme une base de \mathbb{R}^2 . Remarquons que : $A_4 v_1 + iA_4 v_2 = (-5 + 2i\sqrt{6})(v_1 + iv_2) = -5v_1 - 2\sqrt{6}v_2 + i(2\sqrt{6}v_1 - 5v_2)$. Alors,

$$\begin{cases} A_4 v_1 &= -5v_1 - 2\sqrt{6}v_2 \\ A_4 v_2 &= 2\sqrt{6}v_1 - 5v_2 \end{cases}$$

Par suite,

$$A_4 \underset{(v_1, v_2)}{\sim} \begin{pmatrix} -5 & 2\sqrt{6} \\ -2\sqrt{6} & -5 \end{pmatrix} = -5I_2 + 2\sqrt{6}M, \quad \text{avec } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

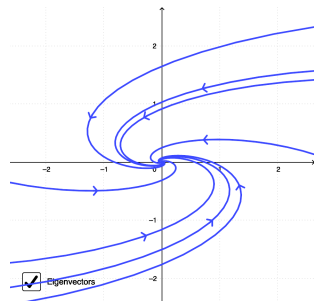
Ainsi,

$$\exp(tA_4) \sim \exp(t(-5I_2 + 2\sqrt{6}M)) = e^{-5t} e^{2\sqrt{6}Mt} = e^{-5t} \begin{pmatrix} \cos(2\sqrt{6}t) & \sin(2\sqrt{6}t) \\ -\sin(2\sqrt{6}t) & \cos(2\sqrt{6}t) \end{pmatrix}.$$

Si $x_0 = \alpha v_1 + \beta v_2$, alors

$$x(t) = \underbrace{\left(\alpha \cos(2\sqrt{6}t) + \beta \sin(2\sqrt{6}t)\right)}_{=:x_1(t)} e^{-5t} v_1 + \underbrace{\left(-\alpha \sin(2\sqrt{6}t) + \beta \cos(2\sqrt{6}t)\right)}_{=:x_2(t)} e^{-5t} v_2.$$

Donc, $x_1^2(t) + x_2^2(t) = (\alpha^2 + \beta^2)e^{-10t}$. Il s'agit donc d'une spirale rentrante (le rayon décroît). Afin de connaître le sens de rotation de la spirale, il faut prendre un exemple : pour une condition initiale $\alpha = 1, \beta = 0$, on obtient $x(t) = e^{-5t} (\cos(2\sqrt{6}t)v_1 - \sin(2\sqrt{6}t)v_2)$. On a donc une composante positive en temps court selon v_1 et négative en temps court selon v_2 . Ceci donne donc le résultat.



5.5 5^{ème} exemple

Ici, $A_5 = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, et $\chi_{A_5}(X) = X^2$. A_5 est nilpotente, et $\ker(A_5) = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:v_1} \mathbb{R}$. On choisit

$v_2 = e_1$, (v_1, v_2) est une base de \mathbb{R}^2 et $A_5 v_2 = 2v_1$. Alors,

$$\exp(tA_5) \sim \exp\left(t \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $x_0 = \alpha v_1 + \beta v_2$, $x(t) = \underbrace{(\alpha + 2t\beta)}_{=:x_1(t)} v_1 + \underbrace{\beta}_{=:x_2(t)} v_2$. Alors, $x_1(t) = \alpha + 2tx_2(t)$. On obtient ainsi :

