

Introduction à la géométrie hyperbolique et théorème de Poincaré.

Issa-Mbenard Dabo et Théo Gherdaoui.
Encadrés par Frank Loray.
ENS de Rennes.

Sommaire

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introduction à la géométrie hyperbolique. | 3 |
| 1.1 | Métrie hyperbolique. | 3 |
| 1.2 | Isométrie du demi-plan de Poincaré. | 4 |
| 1.3 | Géodésiques. | 4 |
| 1.4 | Lien entre \mathcal{U} et \mathbb{H} | 7 |
| 2 | Groupes Fuchsien. | 8 |
| 2.1 | Classification des groupes fuchsien. | 8 |
| 2.2 | Topologie de $PSL_2(\mathbb{R})$ | 9 |
| 3 | Domaines Fondamentaux. | 11 |
| 3.1 | Définition et Propriétés. | 11 |
| 3.2 | Domaine de Dirichlet. | 12 |
| 4 | Polygones et théorème de Poincaré. | 13 |
| 5 | Annexe : Trigonométrie hyperbolique et comparaison de géométries. | 16 |

Introduction

La géométrie hyperbolique a été développée au 18^{ème} siècle par le mathématicien Lobatchevski, puis par Poincaré. C'est une géométrie fascinante pour laquelle le 5^{ème} postulat d'Euclide (à savoir, par tout point extérieur à une droite, il passe une unique droite parallèle à la première) est le seul à ne plus être vérifié. Elle offre de nouveaux horizons, tout est à reconstruire, le théorème de Pythagore n'est plus vrai et la somme des angles d'un triangle ne vaut plus 180° ! C'est une théorie foisonnante, qui possède ses propres théorèmes et ses propres propriétés. Cet exposé a pour but de faire découvrir les rudiments de la géométrie hyperbolique, puis d'exposer le théorème de Poincaré, permettant par la suite de réaliser des pavages du demi-plan et du disque de Poincaré. Vous trouverez une annexe ayant pour objectif de comparer les trigonométries de différentes géométries.

1 Introduction à la géométrie hyperbolique.

1.1 Métrique hyperbolique.

Soit \mathbb{C} le corps des nombres complexes. On considère dans toute cette partie $z \in \mathbb{C}$, avec $z = x + iy$, $x = \text{Re}(z)$ et $y = \text{Im}(z)$. Nous noterons $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$, le demi-plan de Poincaré.

Définition 1. Si $\gamma : [0; 1] \rightarrow \mathbb{H}$ est un chemin différentiable, on définit la longueur hyperbolique du chemin, noté $h(\gamma)$, comme valant :

$$h(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{\left|\frac{d\gamma}{dt}\right|}{y(t)} dt$$

(On remarquera que $\forall t \in [0; 1]$, $y(t) = \text{Im}(\gamma(t)) > 0$ car γ est à valeurs dans \mathbb{H}). Ceci permet intuitivement de repousser l'axe des abscisses (les réels) à l'infini.

Proposition 1. Nous pouvons alors définir la distance, notée ρ , qui munit \mathbb{H} de la métrique hyperbolique :

$$\forall z, z' \in \mathbb{H}, \quad \rho(z, z') = \inf_{\gamma \in A} (h(\gamma))$$

où $A = \{\gamma : [0; 1] \rightarrow \mathbb{H}, \text{ différentiable}, \gamma(0) = z, \gamma(1) = z'\}$

Démonstration. Montrons que c'est bien une distance sur \mathbb{H}

Remarquons d'abord que, $\forall z, z' \in \mathbb{H}$, $z \mathcal{R} z' \iff z$ et z' sont reliés par une application γ différentiable à valeurs dans \mathbb{H} est une relation d'équivalence.

$\forall z \in \mathbb{H}$, l'application $\gamma = \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{H} \\ t \mapsto z \end{cases}$ assure la réflexivité de la relation.

$\forall z, z' \in \mathbb{H}$, tel que $z \mathcal{R} z'$ par γ , l'application $\tilde{\gamma} = \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{H} \\ t \mapsto \gamma(1-t) \end{cases}$ assure la symétrie de la relation.

$\forall z, z', z'' \in \mathbb{H}$, tel que $z \mathcal{R} z'$ par γ , $z' \mathcal{R} z''$ par $\tilde{\gamma}$, l'application $\tilde{\tilde{\gamma}} = \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{H} \\ t \mapsto \gamma(2t) & \text{si } t \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \\ t \mapsto \tilde{\gamma}(2t-1) & \text{sinon.} \end{cases}$

assure la transitivité de la relation.

Ainsi :

- $\forall z, z' \in \mathbb{H}$, $\rho(z, z') = 0 \iff \forall \gamma \in A, h(\gamma) = 0$.

Considérons $\gamma = \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{H} \\ t \mapsto tz' + (1-t)z \end{cases}$

$\forall t \in [0; 1]$, $\text{Im}(\gamma(t)) = \text{Im}(z')t + (1-t)\text{Im}(z) > 0$, donc l'intégrale d'une fonction continue étant nulle, et $0 < 1$, on en déduit que l'intégrande est nulle, ainsi, γ est constante. Par suite, $z = z'$

- La symétrie de la relation d'équivalence assure le caractère symétrique de la prétendue distance.

- Vérifions l'inégalité triangulaire : $\forall z, z', z'' \in \mathbb{H}$, si γ est un chemin dans \mathbb{H} reliant z et z' et $\tilde{\gamma}$ un chemin dans \mathbb{H} reliant z' à z'' , alors on a montré par transitivité de la relation que l'on obtenait un chemin dans \mathbb{H} de z à z'' .

Ainsi $\rho(z, z'') \leq h(\gamma) + h(\tilde{\gamma})$ puis, il suffit de passer à l'inf sur les chemins reliant dans \mathbb{H} , z à z' , puis z' à z'' pour conclure. □

1.2 Isométrie du demi-plan de Poincaré.

Notons maintenant que pour toute matrice, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{R})$, nous pouvons définir :

$$f_A : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\} \\ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \end{cases}$$

On remarque que f_A est une application bijective, et $(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}$. Définissons alors :

$$PSL_2(\mathbb{R}) = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \mid ad - bc = 1 \right\} \simeq SL_2(\mathbb{R}) / \langle \pm Id \rangle$$

Proposition 2. $\forall f \in PSL_2(\mathbb{R}), f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$

Démonstration. $\forall z \in \mathbb{H}, f(z) = \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} = \frac{ac|z|^2 + bd + ad(x + iy) + bc(x - iy)}{|cz + d|^2}$

Par suite, $Im(f(z)) = \frac{y(ad - bc)}{|cz + d|^2} = \frac{Im(z)}{|cz + d|^2} > 0$

De plus, $\forall z \in \mathbb{H}, f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{a - cz} = \frac{(dz - b)(a - c\bar{z})}{|a - cz|^2}$

D'où $Im(f^{-1}(z)) = \frac{ady - bcy}{|a - cz|^2} = \frac{Im(z)}{|a - cz|^2} > 0$ □

Proposition 3. $PSL_2(\mathbb{R}) \subset Isom(\mathbb{H})$

Démonstration. $\forall f \in PSL_2(\mathbb{R})$, soit $\gamma : [0; 1] \rightarrow \mathbb{H}$

Notons $\forall t \in [0; 1], \omega(t) = T(\gamma(t)) = u(t) + iv(t)$

$$\frac{dw}{dz}(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} = \frac{1}{(cz + d)^2}$$

$$h(T(\gamma)) = \int_0^1 \frac{\left| \frac{dw}{dt} \right|}{v(t)} dt = \int_0^1 \frac{\left| \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dt} \right|}{v(t)} dt$$

La preuve précédente montre que $v = \frac{y}{|cz + d|^2}$. Ainsi $\left| \frac{dw}{dz} \right| = \frac{v}{y}$

Conséquent, $h(T(\gamma)) = \int_0^1 \frac{\left| \frac{d\gamma}{dt} \right|}{y(t)} dt = h(\gamma)$ □

1.3 Géodésiques.

Définition 2. On appelle *géodésique* tout chemin dont la longueur minimise la distance entre deux points du demi-plan de Poincaré pour la métrique donnée.

Proposition 4. *Les géodésiques sont les droites parallèles à l'axe des ordonnées, et les demi-cercles orthogonaux à l'axe réel.*

Démonstration.

- Étape 1 : Supposons d'abord z et z' imaginaires purs, distincts. Écrivons $z = ia$ et $z' = ib$ avec a et b réels, et $a < b$.

Soit $\gamma : [0; 1] \rightarrow \mathbb{H}$

$$h(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{\left|\frac{dy}{dt}\right|}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{dy}{y(t)} dt = \int_a^b \frac{dy}{y} = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Si l'on paramètre afin que le chemin parcourt le segment $[a, b] : \gamma = \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{H} \\ t \mapsto ia(1-t) + ibt \end{cases}$

$$h(\gamma) = \int_0^1 \frac{|ib - ia|}{a(1-t) + bt} dt = \int_0^1 \frac{b-a}{a(1-t) + bt} dt = [\ln((1-t)a + tb)]_0^1 = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

La distance étant toujours supérieure à celle obtenue en paramétrant le chemin afin de suivre un segment le long de l'axe $i\mathbb{R}$, on en déduit que c'est la géodésique.

- Étape 2 : Montrons que l'on peut toujours se ramener de façon isométrique à cette situation.

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{H}$. Définissons $T(z) = -\frac{1}{z-\alpha} + \beta$

Cette application est associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} \beta & -1 - \alpha\beta \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$

Ainsi $T \in PSL_2(\mathbb{R}) \subset Isom(\mathbb{H})$.

Soit $z \in \Delta_c(r) \cap \mathbb{H}$. Posons $\alpha = c - r$. Montrons que l'on peut choisir β indépendant de z afin de ramenant z de façon isométrique par T sur l'axe des ordonnées.

$\forall z \in \Delta_c(r) \cap \mathbb{H}$, écrivons $z = c + r.e^{i\theta}$

$$\text{Ainsi, } T(z) = \beta - \frac{1}{c + r.e^{i\theta} - \alpha} = \beta - \frac{c - \alpha + r.e^{-i\theta}}{(c - \alpha)^2 + r^2 + 2(c - \alpha).r.\cos(\theta)}$$

$$T(z) \in i\mathbb{R} \iff \text{Re}(T(z)) = \beta - \frac{c - \alpha + r.\cos(\theta)}{(c - \alpha)^2 + r^2 + 2(c - \alpha).r.\cos(\theta)} = 0$$

$$\iff \beta = \frac{r(1 + \cos(\theta))}{2r^2(1 + \cos(\theta))} \iff \beta = \frac{1}{2r} \text{ qui est indépendant de } z.$$

□

Théorème 1.

$$\forall z, w \in \mathbb{H}, \rho(z, w) = \ln \left[\frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \right]$$

Lemme 1. $\forall T \in PSL_2(\mathbb{R}), \forall (z, w) \in \mathbb{H}^2, |T(z) - T(w)| = |z - w|.|T'(z).T'(w)|^{1/2}$

Démonstration. Écrivons $T : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$

$$|T(z) - T(w)|^2 = \left| \frac{az + b}{cz + d} - \frac{aw + b}{cw + d} \right|^2 = \left| \frac{(az + b)(cw + d) - (aw + b)(cz + d)}{(cz + d)(cw + d)} \right|^2$$

$$= \left| \frac{(z - w)(ad - bc)}{(cz + d)(cw + d)} \right|^2 = (|z - w|.|T'(z).T'(w)|^{1/2})^2 \text{ ce qui conclut.}$$

□

Lemme 2. $\forall (z, w) \in \mathbb{H}^2$, $\sinh(\frac{1}{2}\rho(z, w)) = \frac{|z - w|}{2(\text{Im}(z)\text{Im}(w))^{1/2}}$

Démonstration. Le membre de gauche de l'équation est invariant par composition par un élément de $PSL_2(\mathbb{R})$. Montrons qu'il en est de même pour le second membre.

$\forall T \in PSL_2(\mathbb{R})$, $\frac{|T(z) - T(w)|}{2(\text{Im}(T(z))\text{Im}(T(w)))^{1/2}} = \frac{|z - w|}{2} \cdot \left[\frac{|T'(z) \cdot T'(w)|}{\text{Im}(T(z))\text{Im}(T(w))} \right]^{1/2}$ par le premier lemme.

Or, on a vu dans les démonstrations précédentes que :

$$\text{Im}(T(z)) = \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2} = \text{Im}(z) \cdot |T'(z)|$$

$$\text{Enfin, } \frac{|T(z) - T(w)|}{2(\text{Im}(T(z))\text{Im}(T(w)))^{1/2}} = \frac{|z - w|}{2(\text{Im}(z)\text{Im}(w))^{1/2}}$$

Nous pouvons donc, afin de conclure à l'égalité, nous contenter de démontrer que le résultat est vrai pour des points $z = ia$ et $w = ib$ avec $a < b$.

Nous savons déjà que $\rho(z, w) = \ln(\frac{b}{a})$, et, $\sinh(\rho(ia, ib)) = \frac{b - a}{2\sqrt{ba}} = \frac{|ia - ib|}{2(\text{Im}(ia)\text{Im}(ib))^{1/2}}$ \square

Nous pouvons en déduire le théorème :

Démonstration. $\rho(z, w) = 2 \cdot \sinh^{-1}\left(\frac{|z - w|}{2(\text{Im}(z)\text{Im}(w))^{1/2}}\right)$

$$\begin{aligned} &= 2 \ln \left[\frac{|z - w|}{2(\text{Im}(z)\text{Im}(w))^{1/2}} + \sqrt{1 + \left[\frac{|z - w|}{2(\text{Im}(z)\text{Im}(w))^{1/2}} \right]^2} \right] \\ &= \ln \left[\frac{\left[|z - w| + \sqrt{|z - w|^2 + 4\text{Im}(z)\text{Im}(w)} \right]^2}{4\text{Im}(z)\text{Im}(w)} \right] \\ &= \ln \left[\frac{|z - w|^2 + 2\text{Im}(z)\text{Im}(w) + |z - w|\sqrt{|z - w|^2 + 4\text{Im}(z)\text{Im}(w)}}{2\text{Im}(z)\text{Im}(w)} \right] \end{aligned}$$

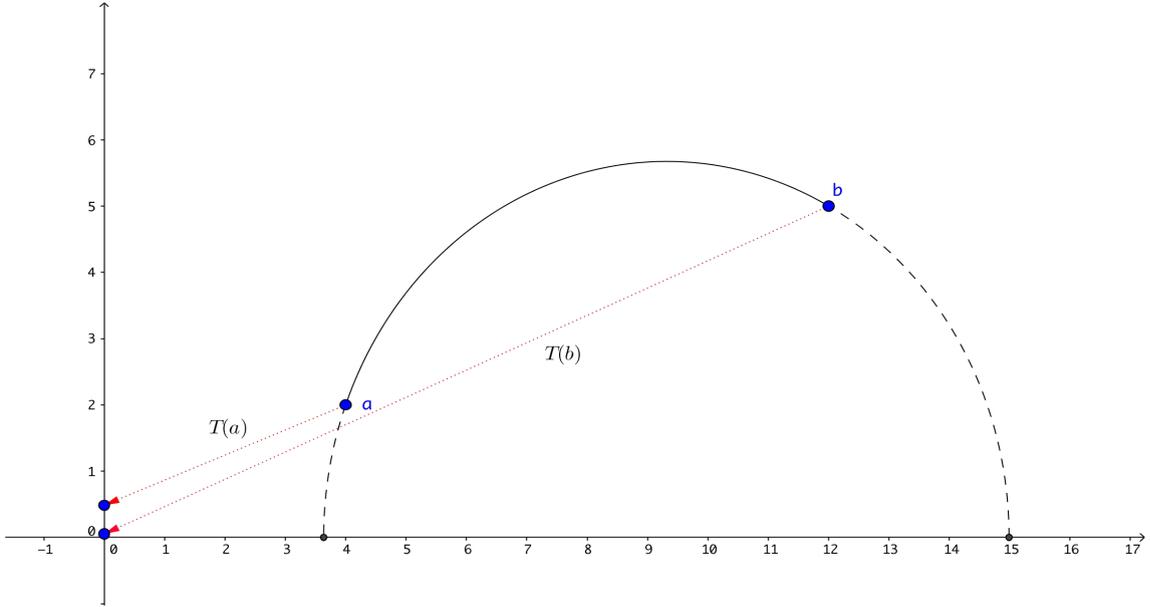
$$= \ln \left[1 + \frac{|z - w|(|z - w| + \sqrt{|z - w|^2 + 4\text{Im}(z)\text{Im}(w)})}{2\text{Im}(z)\text{Im}(w)} \right]$$

Or $\sqrt{|z - w|^2 + 4\text{Im}(z)\text{Im}(w)} = |z - \bar{w}|$

Donc $\rho(z, w) = \ln \left[1 + \frac{|z - w|(|z - w| + |z - \bar{w}|)}{2\text{Im}(z)\text{Im}(w)} \right]$. De plus $\frac{|z - w| + |z - \bar{w}|}{2\text{Im}(z)\text{Im}(w)} = \frac{2}{|z - \bar{w}| - |z - w|}$

Enfin $\rho(z, w) = \ln \left[1 + \frac{2|z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \right]$ d'où le résultat. \square

Illustration de la méthode :



Après avoir considéré le cercle passant par les deux points a et b du demi-plan de Poincaré, orthogonal à l'axe réel, on fait subir à a et b la transformation T.

Dans l'exemple, les points a et b de \mathbb{H} sont : $a = 4 + 2i$ et $b = 12 + 5i$. On trouve $r \simeq 5,677$ et $c = 9,3125$. On en déduit : $T(a) = \frac{1}{2r} - \frac{1}{a+r-c} \simeq 0,484i$ et $T(b) \simeq 0,0527i$

Par conséquent : $\rho(a, b) \simeq \ln\left(\frac{0,484}{0,0526}\right) \simeq 2,219$.

Le théorème précédent affirme que : $\rho(a, b) = \ln \left[\frac{|a - \bar{b}| + |a - b|}{|a - \bar{b}| - |a - b|} \right] = \ln \left[\frac{\sqrt{113} + \sqrt{73}}{\sqrt{113} - \sqrt{73}} \right]$

$\simeq 2,2182$. On peut montrer que \widehat{AB} possède une longueur euclidienne d'environ : 9,673.

Corollaire 1. $PSL_2(\mathbb{R})$ transforme les géodésiques en géodésiques.

Démonstration. Il suffit de remarquer que : $\forall z, w \in \mathbb{H}, \rho(z, w) = \rho(z, \xi) + \rho(\xi, w) \iff \xi \in [z, w]$ \square

1.4 Lien entre \mathcal{U} et \mathbb{H} .

Notons $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$. Considérons $f : \begin{cases} \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{U} \\ z \mapsto \frac{zi+1}{z+i} \end{cases}$ Elle est bien définie.

En effet : $z+i=0 \iff z=-i \notin \mathbb{H}$

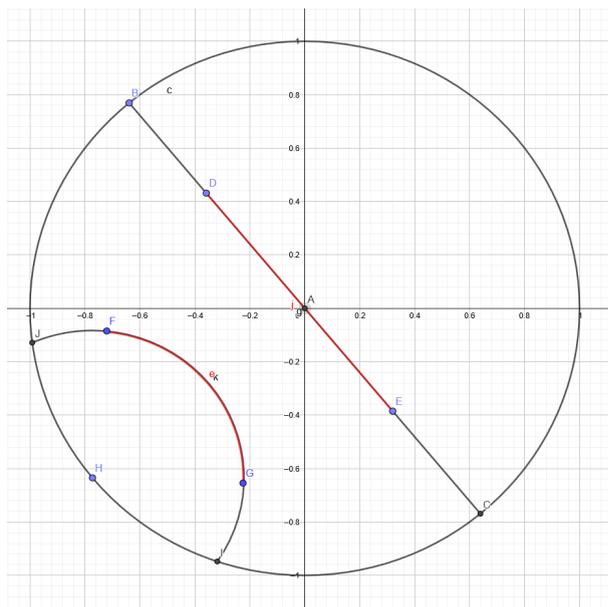
De plus, $\forall z \in \mathbb{H}, \left| \frac{zi+1}{z+i} \right|^2 = \frac{x^2+(y-1)^2}{x^2+(y+1)^2} < 1 \iff 4y > 0$ ce qui est vrai.

Elle est de plus bijective et l'application $\begin{cases} \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{H} \\ z \mapsto \frac{1-iz}{z-i} \end{cases}$ est sa bijection réciproque.

On munit \mathcal{U} de la distance : $\forall z, w \in \mathcal{U}, \rho^*(z, w) = p(f^{-1}(z), f^{-1}(w))$

On en déduit que (\mathcal{U}, ρ^*) et (\mathbb{H}, p) sont isométriques. Cette remarque permet de justifier

le fait qu'on se placera plus tard, dans le disque unité et non le demi-plan de Poincaré, puisque l'on pourra de façon isométrique, appliquer tout ce qui a été fait dans \mathcal{U} à \mathbb{H} .



2 Groupes Fuchsien.

2.1 Classification des groupes fuchsien.

Définition 3.

- On appelle trace de $T \in PSL_2(\mathbb{R})$, la quantité notée $Tr(T) := |a + d|$ où $T : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$
- Si $Tr(T) < 2$, on dit que T est elliptique.
- Si $Tr(T) = 2$, on dit que T est parabolique.
- Sinon, T est dite hyperbolique.

Proposition 5. Soit $T : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$

1. T est hyperbolique ssi A est diagonalisable dans \mathbb{R} et semblable à $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda \neq 1$.
2. T est elliptique ssi A est semblable à une matrice de rotation, non égale à $\pm I_2$.

Démonstration.

1. Pour le sens direct, $\chi_A(X) = X^2 - (a+d)X + 1$. Donc, $\Delta = (a+d)^2 - 4 > 0$. Par suite, le polynôme caractéristique est simplement scindé et A est diagonalisable. De plus, notons λ_1 et λ_2 ses valeurs propres. L'invariance du déterminant par changement

de base fournit $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$.

Réciproquement, puisque A est diagonalisable, son polynôme caractéristique est scindé, donc $Tr(T) \geq 2$. Montrons que l'on ne peut avoir l'égalité. En effet, si $Tr(T) = 2$, alors $\Delta = 0$ et la valeur propre est multiple. Par suite, $A \sim \lambda I_2$. Or $det(A) = 1$, donc $\lambda = 1$ ce qui est exclu.

2. Pour le sens direct, remarquons que la condition $Tr(T) < 2$ impose le polynôme caractéristique à posséder des racines complexes non réelles conjuguées, notées α et $\bar{\alpha}$.

Ainsi $A \sim_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$. De plus, $det(A) = 1 \Rightarrow |\alpha| = 1$ donc, $\alpha = e^{i\theta}$.

Par conséquent, $A \sim_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \sim_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. De plus, deux matrices semblables dans \mathbb{C} le sont dans \mathbb{R} , ce qui conclut, $\theta \neq 0$, sinon $Tr(A) = 2$ ce qui est impossible.

Réciproquement, l'invariance de la trace par changement de base assure que $Tr(T) = 2|\cos(\theta)|$ et la condition $\theta \neq 0[\pi]$ fournit le résultat. □

2.2 Topologie de $PSL_2(\mathbb{R})$.

Théorème 2 (Admis). *La topologie induite sur \mathbb{H} par la métrique hyperbolique est la même que celle induite par la métrique euclidienne.*

Référence : Fuchsians Groups, Svetlana Katok, Chapitre 1, Théorème 1.3.3., page 11.

Définition 4. Soit $T : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \in PSL_2(\mathbb{R})$. On note

$\|T\| := \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \sqrt{tr({}^t A.A)}$. C'est la norme de Frobenius sur l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$, héritée de la structure euclidienne. Elle induit une distance sur $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$, $(T, S) \mapsto \|T - S\|$. On admettra pour la suite que cette application demeure une distance sur $PSL_2(\mathbb{R})$ muni de ses lois. La distance induit donc une topologie sur $PSL_2(\mathbb{R})$, c'est celle à laquelle nous allons nous intéresser.

Définition 5. Un sous-groupe Γ de $Isom(\mathbb{H})$ est dit **discret** si Γ est un ensemble discret pour l'espace topologique $Isom(\mathbb{H})$, ie $\forall x \in \Gamma, \exists V \in \mathcal{V}(x), V \subset Isom(\mathbb{H})$ et $V \cap \Gamma = \{x\}$

Proposition 6. $\Gamma \subset Isom(\mathbb{H})$ est un sous-groupe discret \iff

$$\forall (T_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Gamma^{\mathbb{N}}, (T_n \rightarrow I_d) \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, T_n = I_d)$$

Démonstration.

- Pour le sens direct, on suppose que $T_n \rightarrow I_d$ donc, $\forall V \in \mathcal{V}(I_d), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, T_n \in V$. Il suffit de remarquer que $\{I_d\}$ est un ouvert pour la topologie donnée afin de conclure.

- Réciproquement, Il suffit de montrer que les singletons sont ouverts. Observons premièrement que , $\forall T \in \Gamma, \forall (T_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Gamma^{\mathbb{N}}, (T_n \rightarrow T) \Rightarrow (T_n - T + I_d \rightarrow I_d)$. Par hypothèse, à partir d'un certain rang, $T_n - T + I_d = I_d$. Par suite on peut supposer que $T = I_d$. On souhaite contruire une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in B(I_d, \frac{1}{n}) \setminus \{I_d\}$ (AC). L'hypothèse affirme que cela est impossible. Par conséquent, à partir d'un certain rang, $B(I_d, \frac{1}{n_0}) \subset \{I_d\}$, cela montre que c'est un ouvert. \square

Définition 6. *Un sous-groupe discret de $PSL_2(\mathbb{R})$ est appelé **groupe Fuchsien**.*

Définition 7. *Une famille $\{M_\alpha | \alpha \in A\}$ de sous-ensembles de \mathbb{H} indexée par un ensemble A est dite localement finie si, pour tout compact $K, K \subset \mathbb{H}, M_\alpha \cap K \neq \emptyset$ pour un nombre fini de α uniquement.*

Définition 8. *Un groupe G , agit proprement discontinûment sur \mathbb{H} si la G -orbite de tout point de \mathbb{H} est localement finie*

Lemme 3. *Un espace compact et discret est fini.*

Démonstration. Soit X un espace discret et compact. On sait donc que les singletons sont des ouverts. Or,

$$X \subset \bigcup_{x \in X} \{x\}$$

Ceci forme un recouvrement ouvert d'un compact. La propriété de Borel-Lebesgue affirme que : $\exists n \in \mathbb{N}, (x_1, \dots, x_n) \in X^n$ tel que $X \subset \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} \{x_i\}$. Ceci permet de conclure. \square

Remarque. *On aurait pu utiliser la caractérisation séquentielle sur un espace métrique : Supposons que l'ensemble est infini, on considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux distincts, et par compacité, on extrait une suite $(x_{\phi(n)})$ convergente. L'espace étant discret, la suite est stationnaire, ce qui est impossible par définition.*

Lemme 4. *Soit Γ un sous-groupe de $PSL_2(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{H}$, un point fixe d'une certaine transformation de Γ . Alors, il existe un voisinage \mathcal{V} de p dans \mathbb{H} , pour lequel aucun point de \mathcal{V} n'est point fixe d'une transformation de $\Gamma \setminus \{I_d\}$.*

Démonstration. Supposons que $T(p) = p$ pour une certaine isométrie $T \in \Gamma \setminus \{I_d\}$, et que pour tout voisinage de p , il y a un point fixe par une transformation de Γ autre que l'identité. On peut alors trouver $(p_n) \in \mathbb{H}^{\mathbb{N}}$ et $(T_n) \in \Gamma^{\mathbb{N}}$ telle que $T_n(p_n) = p_n$. Le théorème 2 affirme que $B_F(p, 3\epsilon)$ est un compact. Puisque Γ agit proprement discontinûment l'ensemble $\{T \in \Gamma | T(p) \in B_F(p, 3\epsilon)\}$ est fini (Lemme 3). Ainsi, il existe un rang à partir duquel $\rho(T_n(p), p) > 3\epsilon$ alors que $\rho(p_n, p) < \epsilon$.

Or $\rho(T_n(p), p) \leq \rho(T_n(p), T_n(p_n)) + \rho(T_n(p_n), p) = 2\rho(p, p_n) \leq 2\epsilon$, ce qui est impossible. \square

Théorème 3. *Soit Γ un sous-groupe de $PSL_2(\mathbb{R})$. Alors : Γ est un groupe fuchsien si et seulement si Γ agit proprement discontinûment sur \mathbb{H}*

Démonstration.

- Pour le sens direct, Il suffit de remarquer que : $\forall z \in \mathbb{H}$, et $\forall K$, compact de \mathbb{H} , l'ensemble $\{T \in PSL_2(\mathbb{R}) | T(z) \in K\} \cap \Gamma$ est un ensemble fini comme intersection d'un compact et d'un discret (cf. lemme 3). Ainsi Γ agit proprement discontinûment.
- Pour le sens réciproque, supposons par l'absurde que le groupe n'est pas fuchsien, c'est-à-dire n'est pas discret. Soit $s \in \mathbb{H}$, un point qui n'est fixé par aucune transformation différente de l'identité (l'existence est assurée par le lemme 4). Puisque Γ n'est pas discret, il existe une suite $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$, de points distincts de Γ telle que $T_k \rightarrow I_d$. Ainsi, $T_k(s) \rightarrow s$ et puisque s n'est un point fixe d'aucune transformation, les $(T_k(s))_{k \in \mathbb{N}}$ sont des points différents de s . Par suite, tout disque hyperbolique fermé centré en s contient une infinité de points de l'orbite de s , ce qui contredit le fait que Γ agisse proprement discontinûment.

□

3 Domaines Fondamentaux.

3.1 Définition et Propriétés.

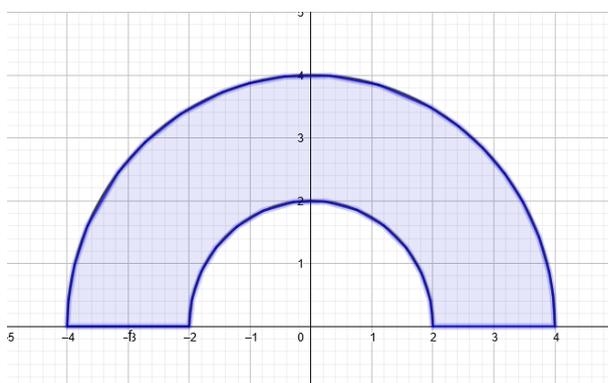
Soit (X, d) un espace métrique et G un groupe d'homéomorphismes de X dans X agissant proprement discontinûment sur X .

Définition 9. *Un sous-ensemble fermé $F \subset X$ est un **domaine fondamental** de G si*

- $\bigcup_{T \in G} T(F) = X$
- $\forall T \in G \setminus \{Id\}, \overset{\circ}{F} \cap T(\overset{\circ}{F}) = \emptyset$

La famille $\{T(F) \mid T \in G\}$ est appelé pavage de X .

Exemple. *Soit Γ le groupe $\{z \mapsto 2^k z, k \in \mathbb{Z}\}$, la figure suivante représente un domaine fondamental de Γ*



Définition 10. *On définit μ , l'aire hyperbolique comme suit :*

$$\forall A \subset \mathbb{H}, \mu(A) = \int_A \frac{dx dy}{y^2} \in \overline{\mathbb{R}}$$

Proposition 7. *Les transformations de $PSL_2(\mathbb{R})$ conservent l'aire hyperbolique i.e. : $\forall A \subset \mathbb{H}, \forall T \in PSL_2(\mathbb{R}), \mu(T(A)) = \mu(A)$.*

Démonstration. Soit $T : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \in PSL_2(\mathbb{R})$.

Posons $u : (x, y) \mapsto \operatorname{Re}(T(x + iy))$ et $v : (x, y) \mapsto \operatorname{Im}(T(x + iy))$.

L'application $f : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ est l'application associée à T dans \mathbb{R}^2 . f est un C^1 -difféomorphisme, on peut donc appliquer le changement de variable suivant :

$$\text{Soit } A \subset \mathbb{H}, \mu(A) = \int_{T(A)} \frac{dudv}{v^2} = \int_A \frac{|cz + d|^4}{|cz + d|^4 y^2} dx dy = \mu(A).$$

En effet, $v(x, y) = \frac{y}{|c(x + iy) + d|^2}$ et la jacobienne de f est :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{|cz + d|^4} \text{ grâce aux équations de Cauchy-Riemann. } \square$$

Proposition 8. *Soient F_1 et F_2 deux domaines fondamentaux d'un groupe Fuchsien Γ , et $\mu(F_1) < +\infty$. Supposons de plus que les frontières de F_1 et F_2 sont d'aire hyperbolique nulle. Alors $\mu(F_2) = \mu(F_1)$.*

Démonstration. On a $F_1 \cap \left(\bigcup_{T \in \Gamma} T(\overset{\circ}{F}_2)\right) = \bigcup_{T \in \Gamma} (F_1 \cap T(\overset{\circ}{F}_2)) \subset F_1$

F_2 étant un domaine fondamental, les ensembles $(F_1 \cap T(\overset{\circ}{F}_2))_{T \in \Gamma}$ sont disjoints, on a donc :

$$\mu(F_1) \geq \sum_{T \in \Gamma} \mu(F_1 \cap T(\overset{\circ}{F}_2)) = \sum_{T \in \Gamma} \mu(T^{-1}(F_1) \cap \overset{\circ}{F}_2) = \sum_{T \in \Gamma} \mu(T(F_1) \cap \overset{\circ}{F}_2)$$

F_1 est un domaine fondamental donc, $\bigcup_{T \in \Gamma} T(F_1) = X$ et $\bigcup_{T \in \Gamma} (T(F_1) \cap \overset{\circ}{F}_2) = \overset{\circ}{F}_2$

$$\text{D'où } \sum_{T \in \Gamma} \mu(T(F_1) \cap \overset{\circ}{F}_2) \geq \mu\left(\bigcup_{T \in \Gamma} (T(F_1) \cap \overset{\circ}{F}_2)\right) = \mu(\overset{\circ}{F}_2) = \mu(F_2)$$

On a alors $\mu(F_1) \geq \mu(F_2)$. En interchangeant les rôles de F_1 et F_2 , on obtient finalement $\mu(F_1) = \mu(F_2)$. \square

3.2 Domaine de Dirichlet.

Définition 11. *Soient Γ un groupe Fuchsien et $p \in \mathbb{H}$ fixé par aucun élément de $\Gamma \setminus \{Id\}$. On définit le domaine de Dirichlet de Γ centré en p comme étant l'ensemble :*

$$D_p(\Gamma) = \{z \in \mathbb{H} \mid \forall T \in \Gamma, \rho(z, p) \leq \rho(z, T(p))\}$$

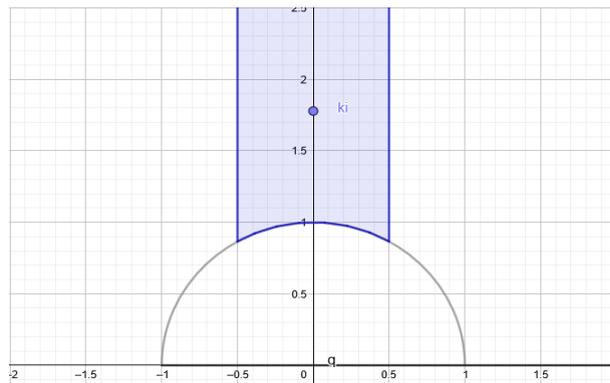
Proposition 9. *Soient Γ un groupe Fuchsien et $p \in \mathbb{H}$ fixé par aucun élément de $\Gamma \setminus \{Id\}$, alors $D_p(\Gamma)$ est un domaine fondamental convexe de Γ .*

Démonstration. Soient $z \in \mathbb{H}$ et Γ_z son orbite par Γ . Par définition de la borne inférieure, on peut créer une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Γ_z tel que $\rho(p, z_n)$ tend vers $\inf\{\rho(p, z') \mid z' \in \Gamma_z\}$. Γ_z étant discret, la suite est stationnaire, la borne inférieure est atteinte pour $z_0 \in \Gamma_z$. Donc $\rho(p, z_0) \leq \rho(p, T(z_0)) = \rho(T^{-1}(p), z_0), \forall T \in \Gamma$, ce qui implique que $z_0 \in D_p(\Gamma)$. Donc

$D_p(\Gamma)$ contient au moins un élément de chaque Γ -orbite donc $\bigcup_{T \in \Gamma} T(D_p(\Gamma)) = \mathbb{H}$.

Soit $z \in \mathbb{H}$ tel que $\rho(p, z) = \rho(p, T(z))$ pour $T \in \Gamma \setminus \{Id\}$. Ainsi, $\rho(p, z) = \rho(T^{-1}(p), z)$, donc z appartient à la médiatrice du segment $[p, T^{-1}(p)]$, ce qui signifie que z est soit sur la frontière de $D_p(\Gamma)$, soit hors de $D_p(\Gamma)$. Or, z n'est donc pas intérieur à $D_p(\Gamma)$. On en déduit que deux points distincts intérieurs à $D_p(\Gamma)$ ne peuvent appartenir à la même orbite, donc $\forall T \in \Gamma, D_p(\Gamma) \cap T(D_p(\Gamma)) = \emptyset$.

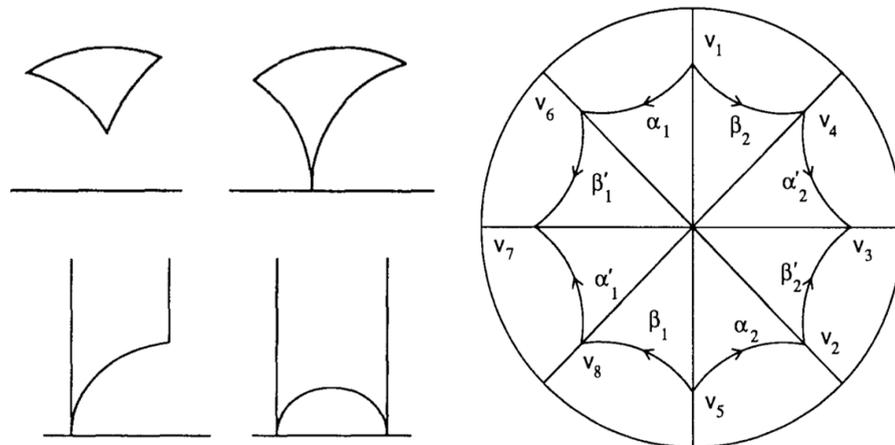
Enfin $D_p(\Gamma)$ est fermé convexe comme intersection des fermés convexes suivants : $\{z \in \mathbb{H} | \rho(z, p) \leq \rho(z, T(p))\} \forall T \in \Gamma$, ce qui termine la preuve. \square



C'est le domaine de Dirichlet pour $PSL_2(\mathbb{Z})$, centré en ki pour $k > 1$.

4 Polygones et théorème de Poincaré.

Définition 12. On appelle *polygone hyperbolique à n sommets* tout ensemble délimité par n segments géodésiques. On appelle alors *côtés* ses segments et *sommets* les points d'intersection des côtés.



Triangles et octogone hyperboliques

Définition 13. On définit l'angle hyperbolique entre deux géodésiques dans \mathbb{H} comme étant l'angle entre leur tangente au point d'intersection.

Proposition 10 (Gauss-Bonnet). [Admise] Soit T un triangle hyperbolique d'angle α , β et γ .

$$\mu(T) = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

Référence : Fuchsians Groups, Svetlana Katok, Chapitre 1, Théorème 1.4.2., page 13.

Proposition 11 (Admise). Si un domaine de Dirichlet est un polygone, alors il a un nombre pair de côtés.

Référence : Fuchsians Groups, Svetlana Katok, Chapitre 1, paragraphe 2, page 74.

Définition 14. Soit P un polygone à n côtés et G un sous-groupe de $PSL_2(\mathbb{R})$. On définit la relation d'équivalence suivante sur l'ensemble des sommets de P :

$$s\mathcal{R}s' \iff \exists g \in G, s' = g(s)$$

On appelle **cycles** les classes d'équivalence.

Démonstration. Vérifions que \mathcal{R} est une relation d'équivalence : Soit P un polygone à n côtés, possédant pour sommets : s_1, \dots, s_n .

- La relation est reflexive car $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $s_i = I_d(s_i)$ et $I_d \in G$ puisque G est un groupe.
- La relation est symétrique car $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, s'il existe $g \in G$ tel que $s_j = g(s_i)$ alors, $s_i = g^{-1}(s_j)$ et $g^{-1} \in G$ car G est un groupe.
- Quant à la transitivité, $\forall i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ tels que $s_j = g(s_i)$ et $s_k = g'(s_j)$ avec $g, g' \in G$, $s_k = g' \circ g(s_i)$ et $g' \circ g \in G$ car G est un groupe.

□

Définition 15. Soit P un polygone et G un sous-ensemble de $PSL_2(\mathbb{R})$. On dit que les côtés de P sont **appariés** par les éléments de G si, pour tout côté c de P :

- il existe un unique $g_c \in G$ tel que $g_c(c)$ est un côté de P .
- $g_{g(c)} = g_c^{-1}$

Définition 16 (Genre et Caractéristique d'Euler). Pour tout polygone, on appelle **caractéristique d'Euler** et on note χ la quantité : $\chi = \# \text{sommets} - \# \text{faces} + \# \text{arêtes}$. On appelle alors **genre**, noté g , la quantité vérifiant $2 - 2g = \chi$

Remarque.

- La caractéristique d'Euler est constante égale à 2 pour les polyèdres euclidiens.
- Le genre s'interprète comme étant le nombre d'anses du polygone.

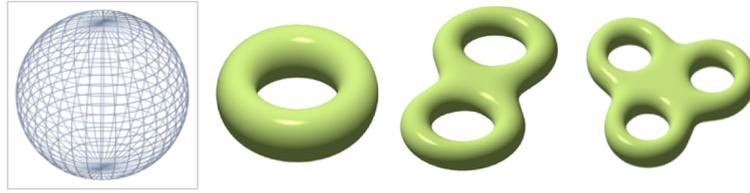


Image de solides de genre 0,1,2 et 3.

Théorème 4 (Théorème de Poincaré). (*Admis*)

Soit P un polygone à $2n$ côtés, muni d'un ensemble de transformations qui apparie ses côtés. Soit Γ le sous-ensemble de $PSL_2(\mathbb{R})$ engendré par ces transformations. Notons, m_1, \dots, m_r les cardinaux des cycles de P . Si :

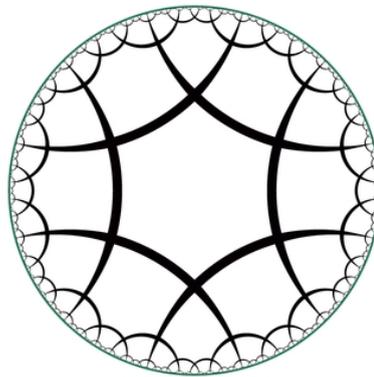
* Pour tout cycle, la somme des angles de ses sommets divise 2π

$$* n - 1 - r + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) > 0$$

$$\text{Alors : } \mu(P) = 2\pi \cdot \left[n - 1 - r + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \right].$$

De plus, Γ est un groupe Fuchsien dont P est un domaine fondamental.

Référence : Fuchsians Groups, Svetlana Katok, Chapitre 4, Théorème 4.3.2 page 92.



5 Annexe : Trigonométrie hyperbolique et comparaison de géométries.

Nous avons montré dans le théorème 1 que :

$$\forall z, w \in \mathbb{H}, \rho(z, w) = \ln \left[\frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \right]$$

$$\forall z, w \in \mathbb{H}, \sinh \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] = \frac{|z - w|}{2(\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w))^{1/2}}$$

Corollaire 2. $\forall z, w \in \mathbb{H}, \cosh \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] = \frac{|z - \bar{w}|}{2(\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w))^{1/2}}$

Démonstration. En effet, $\forall x \in \mathbb{R}, \cosh(x) = \sqrt{1 + \sinh^2(x)}$

Par conséquent, $\cosh \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] = \frac{\sqrt{4\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w) + |z - w|^2}}{2(\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w))^{1/2}}$

Si $z = x + iy$ et $w = \alpha + i\beta$, alors :

$$4\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w) + |z - w|^2 = 4\beta y + (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (x - \alpha)^2 + (y + \beta)^2 = |z - \bar{w}|^2.$$

Donc on obtient la formule donnée \square

Corollaire 3. $\forall z, w \in \mathbb{H}, \cosh [\rho(z, w)] = 1 + \frac{|z - w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}$

Démonstration. Il suffit de constater que $\forall x \in \mathbb{R}, \cosh(x) = 2 \sinh^2 \left[\frac{x}{2} \right] + 1$ \square

Lemme 5. $\forall z, w \in \mathcal{U}, \sinh^2 \left[\frac{1}{2} \rho^*(z, w) \right] = \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}$

Démonstration. $\sinh^2 \left[\frac{1}{2} \rho^*(z, w) \right] = \sinh^2 \left[\frac{1}{2} \rho(f^{-1}(z), f^{-1}(w)) \right] = \frac{|f^{-1}(z) - f^{-1}(w)|^2}{4\operatorname{Im}(f^{-1}(z))\operatorname{Im}(f^{-1}(w))}$

Par suite, $\sinh^2 \left[\frac{1}{2} \rho^*(z, w) \right] = \frac{\left| \frac{1 - iz}{z - i} - \frac{1 - iw}{w - i} \right|^2}{4 \cdot \frac{1 - |z|^2}{|z - i|^2} \cdot \frac{1 - |w|^2}{|w - i|^2}} = \frac{|(1 - iz)(w - i) - (1 - iw)(z - i)|^2}{4(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}$

Enfin, $\sinh^2 \left[\frac{1}{2} \rho^*(z, w) \right] = \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}$ \square

Lemme 6. $\forall z, w \in \mathcal{U}, \cosh^2 \left[\frac{1}{2} \rho^*(z, w) \right] = \frac{|1 - z\bar{w}|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}$

Démonstration. $\cosh^2 \left[\frac{1}{2} \rho^*(z, w) \right] = 1 + \sinh^2 \left[\frac{1}{2} \rho^*(z, w) \right] = 1 + \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}$

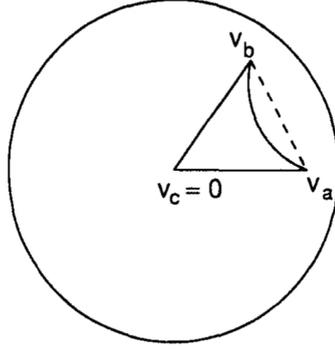
Si $z = x + iy$ et $w = \alpha + i\beta$, alors :

$$(1 - |z|^2)(1 - |w|^2) + |z - w|^2 = (1 - x^2 - y^2)(1 - \alpha^2 - \beta^2) + (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = 1 - 2x\alpha - 2y\beta + x^2(\alpha^2 + \beta^2) + y^2(\alpha^2 + \beta^2) = (1 - y\beta - x\alpha)^2 + (x\beta + y\alpha)^2 = |1 - z\bar{w}|^2 \quad \square$$

Théorème 5. Soit un triangle hyperbolique possédant des côtés de longueur a, b et c , et d'angles α, β , et γ . Si les angles sont de mesure strictement positive, alors

1. $\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b) \cos(\gamma)$
2. $\frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sinh(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)}$
3. $\cosh(c) = \frac{\cos(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\gamma)}{\sin(\alpha) \sin(\beta)}$

Démonstration. Notons les sommets du triangle opposés aux côtés a, b , et c , respectivement : v_a, v_b , et v_c . Nous pouvons supposer que $v_c = 0$ et que $\text{Im}(v_a) = 0, \text{Re}(v_a) > 0$ (comme sur la figure).



$$1. \cosh(c) = \cosh(\rho(v_a, v_b)) = 2 \sinh^2 \left[\frac{1}{2} \rho(v_a, v_b) \right] + 1$$

$$\cosh(c) = \frac{2|v_a - v_b|^2}{(1 - |v_a|^2)(1 - |v_b|^2)} + 1 \text{ par le lemme 5.}$$

$$\text{De plus, } \Delta := \cosh(a) \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b) \cos(\gamma)$$

$$\Delta = \cosh(\rho(v_c, v_b)) \cosh(\rho(v_a, v_c)) - \sinh(\rho(v_c, v_b)) \sinh(\rho(v_c, v_a)) \cos(\gamma)$$

$$\text{Posons } A := \cosh(\rho(v_c, v_b)) \cosh(\rho(v_a, v_c))$$

$$A = (2 \cosh^2(\frac{1}{2} \rho(v_c, v_b)) - 1)(2 \cosh^2(\frac{1}{2} \rho(v_a, v_c)) - 1)$$

$$A = \left[\frac{2}{1 - |v_b|^2} - 1 \right] \left[\frac{2}{1 - |v_a|^2} - 1 \right] \text{ (par le lemme 6)}$$

$$A = \frac{2(|v_a|^2 + |v_b|^2)}{(1 - |v_b|^2)(1 - |v_a|^2)} + 1$$

$$\text{Posons } B := \sinh(\rho(v_c, v_b)) \sinh(\rho(v_c, v_a)) \cos(\gamma), \text{ de sorte que } \Delta = A - B$$

$$B = 4 \sinh(\frac{1}{2} \rho(v_c, v_b)) \cosh(\frac{1}{2} \rho(v_c, v_b)) \sinh(\frac{1}{2} \rho(v_c, v_a)) \cosh(\frac{1}{2} \rho(v_c, v_a)) \cos(\gamma)$$

$$B = 4 \frac{|v_b||v_a| \cos(\gamma)}{(1 - |v_b|^2)(1 - |v_a|^2)}$$

$$\text{Enfin, } \Delta = \frac{2(|v_a|^2 + |v_b|^2 - 2|v_b||v_a| \cos(\gamma))}{(1 - |v_b|^2)(1 - |v_a|^2)} + 1$$

$$\Delta = \frac{2|v_a - v_b|^2}{(1 - |v_b|^2)(1 - |v_a|^2)} + 1 = \cosh(c); \text{ ce qui conclut.}$$

2. En utilisant le point 1, on obtient
$$\left(\frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)}\right)^2 = \frac{\sinh^2(c)}{1 - \left[\frac{\cosh(a)\cosh(b) - \cosh(c)}{\sinh(a)\sinh(b)}\right]^2}$$

Il suffit de vérifier que le membre de droite est symétrique en a , b , et c .

En effet
$$\left(\frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)}\right)^2 = \frac{\sinh^2(a)\sinh^2(b)\sinh^2(c)}{(\sinh(a)\sinh(b))^2 - (\cosh(a)\cosh(b) - \cosh(c))^2}$$

Le dénominateur, $(\sinh(a)\sinh(b))^2 - (\cosh(a)\cosh(b) - \cosh(c))^2$ vaut :
 $2\cosh(a)\cosh(b)\cosh(c) + 1 - \cosh^2(a) - \cosh^2(b) - \cosh^2(c)$

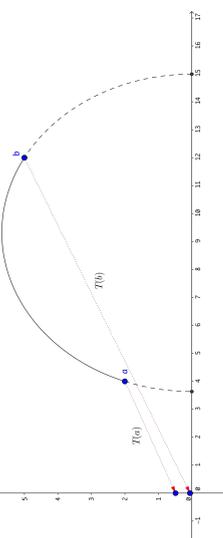
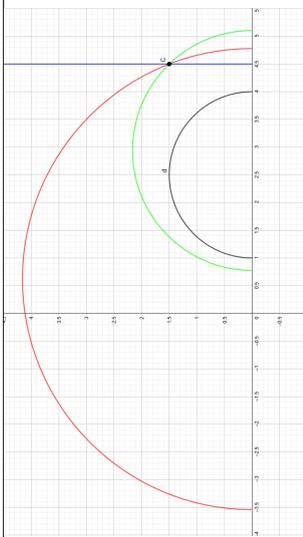
3. Posons $A = \cosh(a)$, $B = \cosh(b)$ et $C = \cosh(c)$

Par le point 2, $\cos(\gamma) = \frac{AB - C}{\sqrt{(A^2 - 1)(B^2 - 1)}}$. On obtient de la même façon, $\cos(\alpha)$,
 et $\cos(\beta)$.

De plus, on obtient $\sin^2(\gamma) = \frac{1 + 2ABC - (A^2 + B^2 + C^2)}{(A^2 - 1)(B^2 - 1)}$. On opère de même
 pour $\sin(\beta)$.

Et
$$\frac{\cos(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\gamma)}{\sin(\alpha)\sin(\beta)} = \frac{(BC - A)(CA - B) + (AB - C)(C^2 - 1)}{1 + 2ABC - (A^2 + B^2 + C^2)} = C = \cosh(c)$$

□

| | Géométrie euclidienne | Géométrie hyperbolique |
|--------------------------------|---|---|
| Géodésique |  |  |
| Somme des angles d'un triangle | π | $< \pi$ |
| Aire d'un triangle | $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ avec $p = \frac{a+b+c}{2}$ (Héron) | $\mu(T) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$ (Gauss-Bonnet) |
| Loi des sinus | $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$ | $\frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sinh(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)}$ (Théorème 5) |
| Al-Kashi | $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$ | $\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b) \cos(\gamma)$ (Théorème 5) |
| Théorème de Pythagore | $c^2 = a^2 + b^2$ | $\cosh(c) = \cosh(a) \cosh(b)$ |
| Axiome n°5 | Par un point extérieur à une droite, ne passe qu'une seule droite parallèle à la première |  |
| | | Les géodésiques rouge, verte, et bleue, sont parallèles à la droite (d) et passent par le point C. |