COLLEGE DOCTORAL BRETAGNE
MATHS, TELECOMS INFORMATIQUE, SIGNAL SYSTEMES, ELECTRONIQUE

école normale supérieure rennes

Thèse de doctorat de

L'École Normale Supérieure de Rennes

École Doctorale N° 601

Mathématiques, Télécommunications, Informatique, Signal, Systèmes, Électronique

Spécialité : *Mathématiques et leurs interactions*

Par
Théo GHERDAOUI

Contrôle de systèmes non linéaires multi-commandés

Thèse présentée et soutenue à l'École Normale Supérieure de Rennes, le 11 juin 2025
Unité de recherche : Univ Rennes, CNRS, IRMAR - UMR 6625, F-35000 Rennes, France

Rapporteurs avant soutenance :

Eduardo CERPA	Professeur des universités, Pontificia Universidad Católica de Chile
Thomas CHAMBRION	Professeur des universités, Université de Bourgogne

Composition du Jury :

Présidente :	Emmanuelle CRÉPEAU	Professeure des universités, Université Polytechnique Hauts-de-France
Examinateurs :	Eduardo CERPA	Professeur des universités, Pontificia Universidad Católica de Chile
	Thomas CHAMBRION	Professeur des universités, Université de Bourgogne
	Clément MOREAU	Chargé de Recherche CNRS, Laboratoire des Sciences du Numérique de Nantes
Dir. de thèse :	Karine BEAUCHARD	Professeure des universités, École Normale Supérieure de Rennes
Co-enc. de thèse :	Frédéric MARBACH	Chargé de Recherche CNRS, École Normale Supérieure de Paris

REMERCIEMENTS

Ce travail, fruit de trois années de recherche, n'aurait pu voir le jour sans le soutien précieux de nombreuses personnes. Avant d'en présenter la substance, j'aimerais exprimer toute ma gratitude, à celles et ceux qui, par leur bienveillance et leurs encouragements, ont contribué à la réalisation de ce manuscrit.

Mes premiers remerciements s'adressent tout naturellement à mes deux directeurs de thèse. Je le dis souvent : j'ai davantage choisi ma thèse pour mes encadrants que pour le domaine. Merci à vous de m'avoir fait découvrir le monde passionnant du contrôle. Vous m'avez initié pendant ces trois années à des mathématiques d'une grande élégance. Ce fut une formidable expérience, qui m'a instruit à tous les niveaux. La confiance que vous m'avez accordée et l'intérêt porté à mes recherches m'ont permis de grandir. Karine, merci pour ton encadrement, ton investissement, ta bonne humeur, ta persévérance et tous les conseils que tu m'as patiemment transmis. Ta disponibilité sans faille et ton souci constant du détail m'ont aidé à tirer le meilleur de moi-même, à ne pas baisser les bras face aux difficultés et aux moments de doute. Pour tout cela et bien plus encore, je te suis sincèrement reconnaissant. Ton cours de L3 reste pour moi une référence et il influencera sans aucun doute ma pratique enseignante. Frédéric, ton cours de M2 a conforté mon envie de poursuivre une thèse en contrôlabilité avec toi. Malgré la distance, tu as toujours été présent en cas de besoin. Merci pour tes conseils et ta bienveillance. Tes intuitions, nombreuses et éclairantes, m'ont souvent montré la voie. Je ne peux que retenir ton amour de la concision, qui fut – il faut bien le reconnaître – plus d'une fois contrarié par mes productions. Ces trois années m'ont indéniablement enrichi de l'expérience de ce brillant tandem.

Je tiens également à remercier Eduardo Cerpa et Thomas Chambrion d'avoir accepté de rapporter ma thèse. Je vous suis très reconnaissant du temps passé à la lecture et l'analyse de mes travaux. Un immense merci à Emmanuelle Crépeau et Clément Moreau qui me font l'honneur de faire partie de mon jury de thèse.

Ma passion pour les sciences et l'enseignement naît au lycée grâce à des professeurs inspirants. Alexandra Bous, Mathilde Boutry, Maxime Cousin, Xavier Douchet, Frédéric Dubuisson, Marie-Annick Fourdan, Michaël Luitaud, Delphine Mallet-Bednarz, François Morand, Francis Rochas, Eric-Teddy Rousseaux et Anne Verdin notamment, ont été de véritables modèles et m'ont transmis l'amour de ce beau métier.

Je mesure la chance que j'ai eue de suivre ma formation à l'ENS et à l'Université de Rennes. Ces sept années passées au sein de ces établissements ont durablement marqué mon parcours, en m'offrant un environnement à la fois convivial et stimulant. Je tiens à remercier tous les membres du département de mathématiques pour leur bonne humeur, avec une attention toute particulière pour François, Rémi, Nicolas, Agnès, Arnaud (merci pour le TD !), Erwan, Baptiste et Jérémy. Eugenio, merci beaucoup pour l'invitation à Nice, la soutenance blanche, les discussions et tous les instants partagés. Thibaut, tu as été un prof exceptionnel, qui continue encore d'inspirer ma manière d'enseigner. Aujourd'hui, j'ai la chance de te compter parmi mes amis et je t'en suis profondément reconnaissant. Merci pour tes précieux conseils, ton soutien constant et plus généralement pour tout ce que tu as fait pour moi. Être membre de l'IRMAR a également significativement contribué à mon épanouissement. Un grand merci à tous les collègues pour les moments passés ensemble, notamment Léo, Nicolas, Vincent et Karel. Je tiens aussi à remercier mes anciens élèves, qui m'ont conforté dans l'idée de me destiner à l'enseignement, entre autres Alex, Julian, Clara, Chloé, Jules, Pierre, Thomas et Lucas.

Mon quotidien au bureau a été ponctué par des moments d'échange et de partage. Faire une thèse est une aventure humaine et je voudrais remercier tous les doctorants que j'ai côtoyés au sein du labo. Merci à Jeanne, Antoine B. (promis, on ira au Gange bientôt !), Émile (la relève de l'option B est maintenant assurée !), Stéphane (toi aussi, tu te fossiliseras un jour !), Ewan (la relève du séminaire Landau !), François E., Hugo (et toutes ses après-midis passées à l'ENS), Raphaël, Ketsia, François L., Yoann (merci pour l'investissement dans le séminaire doctorant !), Tanguy (et son avis OBJECTIF sur l'organisation des RDL !), Mattia, Antoine M., Nicolas (qui fait presque maintenant partie du bureau 212), Nathan et Akash (ma personnalité politique préférée !). Merci également à mes cobureaux : Mewen, Guillaume, Antoine M. et Rita, pour ces instants passés ensemble. Votre présence, votre humour et votre solidarité ont profondément marqué mon parcours doctoral. Guillaume, on gardera notamment en mémoire le covoiturage, spécifiquement le lundi matin ! Mewen, je ne perds pas espoir de te faire admettre un jour ton penchant algébrique !

De même, le personnel administratif et informatique a été d'un soutien permanent tout au long de cette aventure. Un grand merci à Marie-Aude pour sa disponibilité et sa bienveillance, à Aude et Florian pour leur patience, leur gentillesse et leur aide précieuse dans l'organisation du séminaire Landau, à Patrice pour son expertise informatique et logistique tout au long de ma thèse et plus encore pour la préparation de ma soutenance, à Adeline pour sa gestion des RDL et à Céline et Nassima pour leur efficacité et leur appui constant au quotidien.

Au-delà des mathématiques, ce sont les amitiés sincères et la musique qui m'ont nourri. Je tiens à adresser ma reconnaissance à mes amis du lycée, notamment Pierre, François et Flavie, et ses fameuses divisions par zéro (si on t'avait dit un jour que tu figurerais dans un manuscrit de thèse de mathématiques...) ! Même si la vie nous a éloignés, notre lien demeure fort et précieux. L'Orchestre d'Harmonie de Rennes m'a également offert une bouffée d'air frais dans les moments où j'en ressentais le besoin. Un merci tout particulier à Marie-Annick, ma fidèle collègue de pupitre, pour tous nos partages et fous rires.

Durant ces trois dernières années, j'ai eu l'opportunité de participer à plusieurs conférences. Ces événements m'ont permis de rencontrer de nombreux collègues, que je tiens à remercier chaleureusement ici, en particulier Paul, Frank, Sylvain, Pierre, Lotfi, Emmanuel, Marius et Julie. À Bangalore, lors d'une école d'été, j'ai fait la connaissance de Bapu, Sakil et Manish. Ensemble, nous avons partagé des expériences fortes. Bien que la distance nous sépare aujourd'hui, nous continuons d'entretenir notre amitié. Merci à vous trois et tout particulièrement à Bapu, mon coloc, pour ces moments intensément humains. Jérémy, merci à toi pour les instants passés ensemble, tes conseils, ton écoute. Nos trajectoires sont semblables ; dans quelques années, j'y crois, nous serons collègues ! J'ai aussi eu la chance de rencontrer mes frères et sœurs de thèse. Morgan, ta simplicité et ta bonne humeur m'ont tout de suite mis à l'aise. Ton côté décontracté et accessible a vraiment compté. Les soirées à Bénasque avec Kévin restent de très bons souvenirs, à la fois légers et importants. Mégane, tu as vraiment facilité mon arrivée en doctorat. Nos discussions, ta présence en conférence, tes conseils, les TD d'EDO que tu m'as transmis en début de thèse : tout cela m'a grandement aidé à trouver mes marques. Tes travaux m'ont offert un solide modèle sur lequel développer mes idées. Pour tout cela, merci. Kévin, notre amitié survivra à la thèse, c'est certain. Merci pour ton écoute et ton soutien indéfectible quand les doutes étaient forts. Nos séjours en Espagne et en Inde, entre maths, vélo, piscine, randos et visites resteront gravés en moi. Se retrouver ensemble à l'autre bout du monde a vraiment renforcé nos liens. Merci pour ta présence et pour tout ce que tu as apporté à cette aventure. Merci aussi à Thomas, le petit nouveau de notre lignée ! Ravi de voir que tes simulations numériques et tes intégrales de cotangente ne t'ont pas fait fuir. Encore une année à supporter Karine et Frédéric, courage !

J'aimerais aussi témoigner ma gratitude envers mes fidèles amis de promo : Fabrice (dont le talent mathématique n'a d'égal que la superbe de son legato), Vincent, Paul (ma référence en ALGB !), Mathieu (on n'aura finalement pas réussi à pousser Joseph à bout de nerfs...) et JéZu. Ces moments partagés ont rendu ce parcours plus léger et vivant. Clément, notre passion commune pour la musique nous a naturellement rapproché. Merci pour le temps passé à tes côtés ; les discussions, les découvertes cinématographiques, les concerts, les restaurants... Je n'aurai finalement jamais réussi à te réconcilier avec les maths. J'attends encore la date de ta prochaine escapade rennaise ! Ralph, malgré des blagues de qualité douteuse, il faut bien l'admettre : ton humour fait partie intégrante de ton charme. Ton amitié m'est très chère, merci pour toutes ces soirées, ces instants passés à Rennes, Brest, Lille ou Dunkerque. Gab, on en a fait des maths tous les deux ! Entre ton enthousiasme débordant, ta spontanéité, et mon tempérament posé et rigoureux, je pense qu'on formait un sacré duo ! Quand je repense à ces après-midis passées à majorer une horrible somme, à raconter nos vies – sans épargner celles des autres ! Que de souvenirs.

Théo, tu es rentré dans ma vie sur le tard, mais tu n'y as pas pour autant pris une place moins importante. Pour toutes les fois où je t'ai fait attendre à « la fourche », tu mérites des remerciements appuyés ! Au cinéma, au resto, au concert, à Vannes ou à vélo, nous en avons passé du temps ensemble, merci pour tout cela. Ma plus grande victoire restera d'avoir réussi à t'amener à la piscine ! Antoine, Laurine, nous nous sommes embarqués dans l'organisation des RDL. Cette expérience nous a indéfectiblement rapprochés. Même si elle s'est révélée exigeante,

parfois épuisante, quel plaisir ce fut de la vivre à vos côtés ! Que de soirées mémorables passées tous les trois à parler de momies ou de pingouins. Un simple regard suffit à déclencher les éclats de rire ! Merci pour ces moments de pure décontraction. Antoine, merci pour ces repas au RU, les mandats partagés, les démarches administratives communes, les coups de pouce en logique ! Laurine, n'oublie pas : « *la plage participera à ton confort de vie !* ». Thomas, que de moments vécus ensemble. Merci pour tes encouragements, ton soutien (mathématique ou non), ta gentillesse et ton avis précieux en toute circonstance. Ton amitié m'est très chère. J'en finirai même par oublier que tu es probabiliste ! Entre deux équations et trois fous rires, tu as su rendre chaque moment plus léger et plus humain.

Ophélie, voilà combien d'années que l'on se supporte ! Nous avons vécu tellement de choses ensemble ; la terminale, la prépa, la coloc, l'agrégation *etc.* Nous partageons le même amour du métier, de la rigueur, de la justice et de la transparence ; je pense que l'on entretient mutuellement nos névroses ! Merci pour tout ce que tu as fait pour moi et la liste serait très longue ; parmi tout cela, je retiens notamment nos discussions interminables, ton soutien, ton écoute, ton énergie, ton dynamisme... Merci d'avoir pris le temps de relire ces pages d'affreux calculs, de me rassurer dans les moments de doute. Tout ce temps passé au restaurant mexicain, au théâtre, au concert, à cuisiner, est si précieux. Bien que sudiste en devenir, je compte sur toi pour faire surface régulièrement dans l'Ouest pour continuer à partager ces instants de complicités que je chéris.

Je tiens finalement à adresser mes remerciements les plus chaleureux à ma famille – notamment mes parents, mon frère, ma tata – pour leur présence indéfectible tout au long de cette aventure. Certains d'entre vous ont même fait le déplacement pour assister à cette soutenance (alors que, soyons honnêtes, vous n'allez peut-être pas tout réussir à suivre jusqu'à la dernière slide !). Pourtant, vous êtes là et c'est bien cela qui compte. Ce n'est pas votre compréhension des EDP qui m'a soutenu, mais votre présence, vos encouragements, votre attention, vos messages, vos appels et tous ces moments simples et essentiels partagés ensemble. Merci pour les restos, les concerts, les discussions sans lien avec la recherche, qui m'ont permis de souffler et de me ressourcer. C'est aussi grâce à vous que j'ai tenu bon. Cette thèse vous doit beaucoup et moi plus encore. David, je ne sais par où commencer. Tu es mon pilier et je ne trouve pas de mot assez fort pour t'exprimer ma gratitude. Ta présence, ton amour, ta bienveillance, ta candeur et ton soutien ont été essentiels dans tout ce que j'ai entrepris. Je peine encore aujourd'hui à mesurer la chance que j'ai de partager ma vie avec toi. Merci pour tout ce que tu es et pour tout ce que tu m'as permis de traverser avec plus de force et de sérénité.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

En théorie du contrôle, la contrôlabilité désigne la capacité d'un système à atteindre un état désiré en manipulant des variables, appelées contrôles. Ce concept s'applique aussi bien aux équations différentielles ordinaires (EDO) qu'aux équations aux dérivées partielles (EDP), qui modélisent des phénomènes dynamiques dans des contextes variés. Dans le domaine de la *physique*, la capacité de contrôler un système dynamique est essentielle pour des technologies comme les fusées ou les satellites, où des contrôles précis doivent être appliqués pour ajuster la trajectoire ou stabiliser la position du véhicule dans l'espace. En *biologie* et en *médecine*, les systèmes physiologiques peuvent également être modélisés par des EDO ou des EDP. Par exemple, les modèles de croissance tumorale sont des systèmes où l'on cherche à contrôler des processus biologiques complexes en ajustant des paramètres externes comme les doses de médicaments. En *robotique* et en *automatique*, la contrôlabilité est utilisée pour faire en sorte qu'un robot ou un véhicule autonome atteigne des positions et oriente ses actions de manière précise. Plus généralement, dans la vie quotidienne, des applications simples de la contrôlabilité incluent des systèmes comme la régulation de la température d'une maison (thermostats). La plupart des systèmes réels que l'on cherche à contrôler sont non linéaires, ce qui rend la question de la contrôlabilité particulièrement complexe.

Dans ce manuscrit, on s'intéresse plus spécifiquement à la contrôlabilité en *temps petit* : étant donné un système et deux états A et B, sommes-nous en mesure, en agissant sur le système au moyen de contrôles, de le faire passer de l'état A à l'état B, en temps arbitrairement court ? La contrôlabilité en temps petit a des applications physiques importantes, tant d'un point de vue fondamental que pour les applications technologiques. En effet, les systèmes quantiques, une fois conçus, ont une durée de vie très courte avant de se désintégrer (*e.g.* par l'émission spontanée de photons) et de perdre leurs propriétés non classiques (telles que la superposition). Par conséquent, la capacité de les contrôler en un minimum de temps est donc également un défi important en physique.

Dans la littérature, de nombreux travaux se sont intéressés à la contrôlabilité des équations mono-contrôlées, *i.e.* pour lesquelles l'opérateur possède un seul levier d'action sur le système. Dans ce manuscrit, on se focalise sur le cas des systèmes possédant plusieurs contrôles scalaires.

Finalement, l'élaboration des principaux résultats de ce manuscrit repose sur une formule de représentation de l'état de type Magnus, introduite dans [BLBM23], qui approxime la solution d'une équation différentielle ordinaire par une combinaison linéaire de vecteurs. Ces vecteurs sont les évaluations en x_0 de crochets de Lie itérés des champs de vecteurs impliqués dans l'équation. Leurs coefficients sont des fonctionnelles du temps et des contrôles. L'avantage de cette stratégie de preuve est qu'elle peut s'adapter au cadre de la dimension infinie des EDP : la formule de représentation n'est pas valable dans toute sa généralité pour l'état de l'EDP, mais ses termes dominants peuvent être extraits d'un développement de la solution de l'EDP. Ainsi, nous pouvons conclure avec une preuve similaire en dimension infinie.

Ce manuscrit repose sur les trois publications suivantes [Ghe25b], [Ghe24] [Ghe25a] et se divise en trois parties. La première partie présente des conditions nécessaires et des conditions suffisantes à la contrôlabilité locale en temps petit pour des systèmes de dimension finie, énoncées en termes de crochets de Lie. Dans un deuxième temps, on présente un état de l'art des principaux résultats connus sur la contrôlabilité locale de l'équation de Schrödinger, en mettant en lumière les liens avec la dimension finie. La deuxième partie expose les différents résultats obtenus durant cette thèse. Plus précisément, on y présente un résultat positif de contrôlabilité locale en temps petit pour l'équation de Schrödinger bilinéaire, à deux contrôles. Elle contient également l'étude d'obstructions quadratiques pour des systèmes affines multi-contrôlés en dimension finie, ainsi que son adaptation à l'équation de Schrödinger bilinéaire multi-commandée. La troisième partie, plus technique et écrite en anglais, est dédiée aux preuves complètes des résultats exposés dans la partie précédente. Finalement, ce manuscrit contient des appendices dans lesquels certaines preuves et résultats annexes sont développés.

Première partie

Contrôlabilité des systèmes non linéaires

CHAPITRE 1

ÉTAT DE L'ART DE LA STLC DES SYSTÈMES AFFINES EN DIMENSION FINIE

Résumé. Dans ce chapitre, on propose une introduction à la contrôlabilité locale en temps petit des systèmes affines (en dimension finie) avec un ou plusieurs contrôles scalaires, en y présentant notamment les liens avec les crochets de Lie. L'étude, menée d'un point de vue géométrique, inclut un partiel état de l'art. On renvoie le lecteur à [Cor07], dont la plupart des énoncés sont issus. On expose enfin en dernière section une formule de représentation de l'état de type Magnus, faisant intervenir les crochets de Lie. Elle est utilisée de manière déterminante dans cette thèse.

1.1 Contrôlabilité locale en temps petit des systèmes affines

Nous débutons ce chapitre en présentant une classe de systèmes parmi celles étudiées dans cette thèse. Nous spécifierons aussi la notion de contrôlabilité qui sera au centre de notre analyse.

On considère $f_0, \cdots, f_r$ des champs de vecteurs analytiques sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$ et on s'intéresse au système de contrôle affine suivant :

$$x'(t) = f_0(x(t)) + \sum_{\ell=1}^{r} u^\ell(t) f_\ell(x(t)). \tag{1.1.1}$$

Il s'agit d'un système de contrôle non linéaire multi-commandé.

- *État :* la fonction $x(t) \in \mathbb{R}^d$.
- *Contrôles* : les fonctions scalaires réelles $u^1, \cdots, u^r$. Dans tout ce document, on suppose implicitement que tous les contrôles sont scalaires et on notera $u := (u^1, \cdots, u^r)$.

On parle de système affine, puisque la dépendance en les contrôles est affine dans (1.1.1). Le seul champ de vecteurs qui n'est pas directement lié à un contrôle est f_0, c'est le terme dit de *drift*. On suppose enfin que $f_0(0) = 0$. Cette dernière hypothèse assure que 0 est un point d'équilibre du système libre, *i.e.* que $(x, u) \equiv 0$ est une trajectoire du système.

Remarque 1.1.1. *À première vue, le choix d'un système sous cette forme semble restrictif. Néanmoins, tout système non linéaire $x' = f(x, u)$ peut se mettre sous la forme d'un système affine après la transformation $y = (x, u)$.*

Pour tout $u \in L^1((0, t), \mathbb{R})^r$, il existe une unique solution douce – mild solution – à l'équation (1.1.1) – *i.e.* une fonction continue qui vérifie la formulation intégrale de l'équation différentielle – avec la donnée initiale $p \in \mathbb{R}^d$ en t_0, que l'on notera $x(\cdot; u, p, t_0)$. Lorsque $t_0 = 0$ et $p = 0$, on notera cette unique solution $x(\cdot; u)$. Ainsi, tout au long de cette thèse, on considérera de manière tacite des trajectoires bien définies, soit en limitant l'intervalle de temps, soit en choisissant des contrôles suffisamment petits pour prévenir tout phénomène d'explosion.

Nous nous intéressons à la **S**mall-**T**ime **L**ocal **C**ontrollability (STLC) *i.e.* la contrôlabilité locale en temps petit : c'est la possibilité de réaliser, en un temps arbitrairement court, de petits mouvements autour de l'équilibre 0 avec de petits contrôles. De nombreuses autres notions de contrôlabilité peuvent être explorées, mais elles ne seront pas abordées ici. La définition suivante a été introduite par Beauchard et Marbach dans [BM18] pour les systèmes mono-contrôlés.

Définition 1.1.2 ($E^1 \times \cdots \times E^r$-STLC)**.** *Soient $E^1_T, \cdots, E^r_T$ des familles d'espaces vectoriels normés de fonctions définies sur $[0, T]$ pour $T > 0$. On dit que le système (1.1.1) est $E^1 \times \cdots \times E^r$–STLC lorsque, pour tous $T, \rho > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x_f \in B(0, \delta)$, il existe $u \in (E^1_T \times \cdots \times E^r_T) \cap L^1((0, T), \mathbb{R})^r$ vérifiant $\|u\|_{E^1_T \times \cdots \times E^r_T} \leq \rho$ et $x(T; u) = x_f$.*

Définition 1.1.3 (E-STLC)**.** *Soit E_T une famille d'espaces vectoriels normés de fonctions définies sur $[0, T]$ pour $T > 0$. On dit que le système (1.1.1) est E-STLC lorsque (1.1.1) est $E \times \cdots \times E$-STLC.*

Remarque 1.1.4. *De manière implicite, on discute de la STLC autour de l'équilibre 0. La notion historique de STLC correspond à $E^1 = \cdots = E^r = L^\infty$ – voir [Ste86 ; Sus83 ; Cor07].*

On pourrait penser qu'en dimension finie, l'espace fonctionnel lié à la petitesse des contrôles importe peu. Néanmoins, les travaux de Beauchard et Marbach ont mis en évidence le caractère déterminant de cette dépendance dans [BM18].

Établir une condition nécessaire et suffisante à la $E^1 \times \cdots \times E^r$-STLC pour (1.1.1) est une question ouverte. Néanmoins, des conditions nécessaires et des conditions suffisantes sont connues et sont principalement formulées en termes de crochets de Lie. Dans la suite de ce document, on en présente quelque-unes.

1.2 Crochets de Lie

La question de la STLC du système affine (1.1.1) est liée à l'évaluation en 0 des crochets de Lie itérés des champs de vecteurs $f_0, \cdots, f_r$. On définit précisément les crochets de Lie de champs de vecteurs avant de motiver leur utilisation.

Définition 1.2.1 (Crochet de Lie de champs de vecteurs)**.** *Soient $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^d$ des champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur un sous-ensemble ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$. On définit*

$$[f, g] : x \in \Omega \mapsto \mathrm{D}g(x) \cdot f(x) - \mathrm{D}f(x) \cdot g(x). \tag{1.2.1}$$

Remarque 1.2.2. *On peut identifier un champ de vecteurs $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ à un opérateur de la façon suivante : $f \mapsto (\mathrm{op}(f) : \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \mapsto (f, \nabla\varphi))$, où $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^d$. Alors, pour tous $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$,*

$$\mathrm{op}\left([f, g]\right) = [\mathrm{op}(f), \mathrm{op}(g)]_c,$$

où $[\cdot,\cdot]_c$ désigne le commutateur entre deux opérateurs. Ceci motive la notation du crochet de Lie de deux champs de vecteurs.

Voici quelques explications heuristiques de l'importance des crochets de Lie dans l'étude de la STLC.

- Rappelons que la notion de STLC – voir Définition 1.1.2 – est stable par difféomorphisme. Le résultat fondamental de Krener – voir [Kre73, Théorème 1] – stipule que, si deux systèmes de la forme (1.1.1) ont des crochets évalués en 0 linéairement isomorphes, alors ils sont difféomorphes. Ainsi, l'**ensemble de l'information sur la STLC** est contenue dans le sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ constitué des évaluations en 0 des crochets de Lie itérés des champs de vecteurs $f_0, \cdots, f_r$.
- La question de la contrôlabilité d'une équation est par essence liée à l'expression de la valeur finale de la solution de cette équation. Soit $A \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{M}_d(\mathbb{R}))$. Considérons l'équation différentielle $x'(t) = A(t)x(t)$ et supposons que $A(t)A(s) = A(s)A(t)$ pour tous $t, s \in \mathbb{R}$. Alors, l'unique solution de cette équation vérifiant $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$ est donnée par $x : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp\left(\int_0^t A(s)\mathrm{d}s\right) x_0$. L'absence de commutativité rend souvent difficile l'obtention de solutions explicites pour les équations différentielles. Cependant, des formules de représentation de l'état utilisent les crochets de Lie pour contourner ce pro-

blème. Il est en effet naturel de faire intervenir des crochets de Lie, *i.e.* des commutateurs – voir Remarque 1.2.2 – pour **mesurer le défaut de commutativité**.

Afin de faire, en pratique, le lien entre la contrôlabilité et les crochets de Lie, nous proposons de faire un point sur quelques développements connus de l'expression de la solution d'une équation différentielle ordinaire du type (1.1.1) ; c'est l'objet de la Section 1.6.2. L'un de ces développement sera central pour cette thèse.

1.3 Condition de rang de l'algèbre de Lie

Pour faciliter la manipulation des crochets de Lie de champs de vecteurs, nous introduisons ici un autre formalisme. Soit $X := \{X_0, \cdots, X_r\}$, un ensemble à $r+1$ indéterminées non commutatives. Intuitivement, il faut penser à l'indéterminée X_ℓ comme étant le champ de vecteurs f_ℓ, pour $\ell \in [\![0, r]\!]$.

Définition 1.3.1 (Algèbre libre)**.** *On note $\mathcal{A}(X)$ l'algèbre libre réelle générée par X, i.e. l'algèbre associative unitaire des polynômes en les indéterminées non commutatives X_ℓ, $\ell \in [\![0, r]\!]$.*

Exemple 1.3.2. $X_0^2 X_1^8 X_r X_0^9 - 27 X_0^7 X_2 + 14 X_r^4 \in \mathcal{A}(X)$.

Définition 1.3.3 (Algèbre de Lie libre)**.** *Pour $a, b \in \mathcal{A}(X)$, on définit le crochet de Lie de a et de b par $[a, b] := ab - ba$, aussi noté $ad_a(b)$ ou $\underline{ad}_b(a)$. Cette opération est antisymétrique et satisfait l'identité de Jacobi : pour tous $a, b, c \in \mathcal{A}(X)$,*

$$[a, [b, c]] + [c, [a, b]] + [b, [c, a]] = 0. \tag{1.3.1}$$

On définit également $\mathcal{L}(X)$, l'algèbre de Lie libre réelle générée par X, i.e. le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(X)$ contenant X et stable par crochet de Lie $[\cdot, \cdot]$.

Nous avons donc introduit à ce stade deux notions de crochets de Lie : une sur $\mathcal{A}(X)$ (donc en particulier sur $\mathcal{L}(X)$) introduite en Définition 1.3.3 et une sur les champs de vecteurs, énoncée en Définition 1.2.1. Le but de l'item suivant est de faire le lien entre ces deux notions.

Définition 1.3.4 (Évaluation des crochets de Lie)**.** *Soient $f_0, \cdots, f_r \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ des champs de vecteurs définis sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$. Soit $\Lambda : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ l'unique morphisme d'algèbre de Lie vérifiant $\Lambda(X_\ell) = f_\ell$, pour $\ell \in [\![0, r]\!]$. On définit $f_b := \Lambda(b)$, pour $b \in \mathcal{L}(X)$.*

Exemple 1.3.5. *Soit $b := [[[X_1, X_2], X_0], [X_1, X_0]] \in \mathcal{L}(X)$. On a $f_b = [[[f_1, f_2], f_0], [f_1, f_0]]$.*

Le premier énoncé faisant un lien entre les crochets de Lie et la STLC est dû à Hermann [Her63] et Nagano [Nag66]. Il s'agit d'une condition nécessaire de STLC, que voici.

Théorème 1.3.6. *Soient $f_0, \cdots, f_r$ des champs de vecteurs analytiques sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$. On suppose que le système (1.1.1) est L^∞-STLC. Alors,*

$$Vect\{f_b(0);\ b \in \mathcal{L}(X)\} = \mathbb{R}^d. \tag{1.3.2}$$

Cette égalité est appelée **L**ie **A**lgebra **R**ank **C**ondition (LARC).

Exemple 1.3.7. *On considère le système*

$$\begin{cases} x_1' &= 0 \\ x_2' &= u \end{cases}.$$

C'est un système de la forme (1.1.1) *avec* $r = 1$, $f_0(x) = 0$ *et* $f_1(x) = e_2$. *Les champs de vecteurs étant constants, tous les crochets itérés sont nuls et* $\mathrm{Vect}\{f_b(0);\ b \in \mathcal{L}(X_0, X_1)\} = \mathrm{Vect}(e_2)$. *La LARC n'est pas vérifiée. Par la contraposée du Théorème 1.3.6, le système n'est pas* L^∞*-STLC. On aurait pu constater dès le début que la première ligne a une évolution libre : la solution* $x(\cdot; u)$ *vit dans la sous-variété* $\{(0, x_2);\ x_2 \in \mathbb{R}\}$. *C'est un fait général, connu sous le nom du Théorème de Frobénius – voir [Cor07, Théorème 3.25].*

Contre-exemple 1.3.8. *Cette condition nécessaire n'est néanmoins pas suffisante. Considérons le système*

$$\begin{cases} x_1' &= u \\ x_2' &= x_1^2 \end{cases}.$$

On vérifie que $f_{X_1}(0) = e_1$ *et* $f_{[X_1,[X_1,X_0]]}(0) = 2e_2$. *La LARC est donc vérifiée. Néanmoins, le système n'est pas* L^∞*-STLC puisque la deuxième composante est croissante donc toute cible de* $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_2 < 0\}$ *n'est pas atteignable depuis* 0.

Remarque 1.3.9. *Dans l'exemple précédent, le crochet* $f_{[X_1,[X_1,X_0]]}(0)$ *produit la direction* e_2. *Or, le système ne peut pas évoluer selon* $-e_2$. *On verra dans la suite que ce crochet est important dans l'histoire de l'étude de la STLC des systèmes affines.*

Contre-exemple 1.3.10. *La conclusion du Théorème 1.3.6 tombe en défaut si les champs de vecteurs ne sont plus analytiques. En effet,* $x' = ue^{-\frac{1}{x^2}}\mathbb{1}_{x\neq 0}$ *est* L^∞*-STLC mais* $\mathrm{Vect}\{f_b(0);\ b \in \mathcal{L}(X_0, X_1)\} = \{0\}$.

Malgré le fait que la réciproque est fausse – voir Contre-exemple 1.3.8 – le Théorème 1.3.6 admet une réciproque partielle pour les systèmes sans dérive – *i.e.* vérifiant $f_0 \equiv 0$ – prouvée indépendamment par Rashevski dans [Ras38] et Chow dans [Cho41].

Théorème 1.3.11. *Soient* $f_1, \cdots, f_r$ *des champs de vecteurs analytiques sur un voisinage de* 0 *dans* $\mathbb{R}^d$. *Supposons que la LARC* (1.3.2) *est vérifiée (avec* $f_0 \equiv 0$*). Alors, le système sans drift* $x' = \sum_{\ell=1}^{r} u^\ell f_\ell(x)$ *est* L^∞*-STLC.*

Remarque 1.3.12. *Sous des hypothèses plus fortes, on peut aussi démontrer la contrôlabilité globale en temps petit de l'équation sans drift – voir [Cor07, Théorème 3.18].*

Le cas des systèmes linéaires à coefficients constants fournit une autre réciproque partielle au Théorème 1.3.6.

Théorème 1.3.13. *Soient* $(d, r) \in \mathbb{N}^2$, $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{d,r}(\mathbb{R})$. *Le système* $x' = Ax + Bu$ *est* L^∞*-STLC ssi la LARC est vérifiée.*

Idée de démonstration du Théorème 1.3.13. Le système $x' = Ax + Bu$ peut se réécrire sous la forme (1.1.1) et

$$\mathrm{Vect}\,\{f_b(0);\ b \in \mathcal{L}(X)\} = \mathrm{Vect}\{A^i Bu;\ u \in \mathbb{R}^r,\ i \in [\![0, d-1]\!]\}.$$

Ainsi, la LARC est équivalente à la condition de Kalman. □

Remarque 1.3.14. *Dans le cas où la condition de Kalman (ou la LARC) est vérifiée, on peut montrer que le système linéaire à coefficients constants $x' = Ax + Bu$ est $\mathcal{C}_c^m$-STLC, pour tout $m \in \mathbb{N}$ – voir [BM18, Théorème 1].*

1.4 Test linéaire

Dans l'esprit du théorème d'inversion locale, il est naturel de s'intéresser à l'approximation linéaire afin de démontrer une propriété locale sur un objet non linéaire. Pour ce faire, on souhaite distinguer les crochets « linéaires », *i.e.* des crochets ayant moralement un seul X_ℓ avec $\ell \in [\![1, r]\!]$. Néanmoins, l'écriture dans $\mathcal{L}(X)$ n'est pas unique. En effet, $[X_0, [X_0, X_2]] - [X_0, [X_0, X_2]] = 0$. Nous définissons donc un ensemble de crochets ayant moins de structure, sans opération : un *magma.*

Définition 1.4.1 (Crochets itérés)**.** *On note* $\mathrm{Br}(X)$ *l'ensemble des crochets itérés d'éléments de X. Il peut être défini par récurrence de la manière suivante : $X_0, \cdots, X_r \in \mathrm{Br}(X)$ et, si $a, b \in \mathrm{Br}(X)$, alors la paire ordonnée (a, b) appartient à $\mathrm{Br}(X)$. Plus formellement, $\mathrm{Br}(X)$ est le magma libre sur X.*

On peut alors définir le nombre d'occurrences d'une indéterminée d'un élément de $\mathrm{Br}(X)$.

Définition 1.4.2 (Longueur et nombre d'occurrences)**.** *Pour $b \in \mathrm{Br}(X)$, $|b|$ désigne la longueur de b. Pour $\ell \in [\![0, r]\!]$, $b \in \mathrm{Br}(X)$, $n_\ell(b)$ désigne le nombre d'occurrences de l'indéterminée X_ℓ dans b. On utilisera également la notation $n(b) := n_1(b) + \cdots + n_r(b) = |b| - n_0(b)$.*

Exemple 1.4.3. *Considérons le crochet $b := (((X_1, (X_0, X_2)), X_2), (X_1, X_2))$. Alors, $|b| = 6$, $n_0(b) = 1$, $n_1(b) = 2$, $n_2(b) = 3$ et $n(b) = 5$.*

Remarque 1.4.4. *Il y a une application naturelle d'évaluation $\mathrm{E} : \mathrm{Br}(X) \to \mathcal{L}(X)$ définie par récurrence par : $\mathrm{E}(X_\ell) := X_\ell$ pour $\ell \in [\![0, r]\!]$ et $\mathrm{E}((a, b)) := [\mathrm{E}(a), \mathrm{E}(b)]$.*

Maintenant que l'on est en mesure de compter le nombre d'occurrences d'une indéterminée X_ℓ dans un élément de $\mathrm{Br}(X)$, on peut définir les ensembles de crochets suivants.

Définition 1.4.5 (Couches homogènes de $\mathcal{L}(X)$)**.** *Pour $A_1, \cdots, A_r \subset \mathbb{N}$, on définit le sous-espace vectoriel $S_{A_1,\cdots,A_r}(X)$de $\mathcal{L}(X)$ par*

$$S_{A_1,\cdots,A_r}(X) := \mathit{Vect}\{\mathrm{E}(b);\ b \in \mathrm{Br}(X),\ n_\ell(b) \in A_\ell,\ \ell \in [\![1, r]\!]\}.$$

Pour $A \subset \mathbb{N}$, $S_A(X)$ est défini par

$$S_A(X) := \mathit{Vect}\{\mathrm{E}(b);\ b \in \mathrm{Br}(X),\ n(b) \in A\}.$$

Pour $i \in \mathbb{N}$, on écrira $S_i(X)$ au lieu de $S_{\{i\}}(X)$.

Remarque 1.4.6. *Les crochets « linéaires » sont les crochets de S_1.*

Finalement, on peut utiliser la Définition 1.3.4 pour évaluer les éléments de ces ensembles en les champs de vecteurs.

Définition 1.4.7. *Soient $f_0, \cdots, f_r$ des champs de vecteurs analytiques sur un voisinage de* 0 *dans* $\mathbb{R}^d$ *et et* $f := \{f_0, \cdots, f_r\}$. *Pour* $\mathcal{N} \subset \mathrm{Br}(X)$ *ou* $\mathcal{N} \subset \mathcal{L}(X)$ *on utilise la notation*

$$\mathcal{N}(f)(0) := \mathit{Vect}\{f_b(0);\ b \in \mathcal{N}\} \subseteq \mathbb{R}^d. \tag{1.4.1}$$

Remarque 1.4.8. *Lorsque* $b \in \mathrm{Br}(X)$, *on note* f_b *au lieu de* $f_{E(b)}$.

Nous pouvons désormais énoncer le « test linéaire ». Il est démontré dans [Cor07], ou [BM18, Théorème 1] pour le cas régulier.

Théorème 1.4.9. *[Test linéaire] Soient $f_0, \cdots, f_r$ des champs de vecteurs analytiques sur un voisinage de* 0 *dans* $\mathbb{R}^d$ *tels que* $f_0(0) = 0$. *Supposons que*

$$S_1(f)(0) = \mathbb{R}^d. \tag{1.4.2}$$

Alors, le système (1.1.1) *est* $\mathcal{C}_c^m$*-STLC pour tout* $m \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.4.10. *On considère le système suivant*

$$\begin{cases} x_1' &= & u \\ x_2' &= & x_1 + x_2^3 \\ x_3' &= & x_2 + x_3^5 + x_1^{17} \end{cases}.$$

C'est un système de la forme (1.1.1) *vérifiant* $f_{X_1}(0) = e_1$, $f_{(X_1,X_0)}(0) = e_2$ *et* $f_{((X_1,X_0),X_0)}(0) = e_3$. *Ainsi, on déduit du Théorème 1.4.9 que le système est* $\mathcal{C}_c^m$*-STLC, pour tout* $m \in \mathbb{N}$.

Notation (Crochet d'intégration $b0^\nu$)**.** *Pour* $b \in \mathrm{Br}(X)$ *et* $\nu \in \mathbb{N}$, *on utilisera la notation* $b0^\nu$ *pour faire référence au crochet itéré à droite* $(\cdots(b, X_0), \ldots, X_0)$, *où* X_0 *apparaît* ν *fois.*

Exemple 1.4.11. *Soit* $b := ((X_1, X_2), (X_0, X_2))$. *Alors* $b0^2 = ((((X_1, X_2), (X_0, X_2)), X_0), X_0)$.

Remarque 1.4.12. *L'identité de Jacobi* (1.3.1) *permet de vérifier que*

$$S_1(f)(0) = \mathit{Vect}\{f_{X_\ell 0^k}(0);\ \ell \in [\![1, r]\!],\ k \in \mathbb{N}\}.$$

La condition (1.4.2) *est une reformulation de la condition de Kalman sur le système linéarisé en* 0 *i.e.*

$$y' = Ay + B^t \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_r \end{pmatrix} \quad \mathit{avec} \quad A := \mathrm{D}f_0(0) \ \mathit{et}\ B := \begin{pmatrix} f_1(0) | \cdots | f_r(0) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{d,r}(\mathbb{R}),$$

puisque, pour tous $\ell \in [\![1, r]\!]$ *et* $k \in \mathbb{N}$, $f_{X_\ell 0^k}(0) = (\mathrm{D}f_0(0))^k f_\ell(0) = A^k f_\ell(0)$.

Contre-exemple 1.4.13. *Les deux systèmes affines suivants* $x' = u^2$ *et* $x' = u^3$ *ont leur système linéarisé non contrôlable autour de* 0. *Néanmoins, le premier n'est pas* L^∞*-STLC alors que le second l'est. Ainsi, lorsque le système linéarisé n'est pas contrôlable, il faut poursuivre le développement de la solution et étudier le comportement des termes d'ordre supérieur.*

1.5 Conditions d'ordre supérieur

1.5.1 Conditions suffisantes de STLC

Lorsque le Théorème 1.4.9 tombe en défaut *i.e.* si $S_1(f)(0) \subsetneq \mathbb{R}^d$, l'étude de la contrôlabilité se poursuit par l'analyse des crochets d'ordre supérieur, c'est-à-dire des crochets de $S_2(f)(0)$, $S_3(f)(0)$, *etc.*

Exemple 1.5.1. *Soit $l \geq 2$ un entier. On montre que le système*

$$\begin{cases} x_1' &= u \\ x_2' &= x_1^l \end{cases}$$

est L^∞-STLC ssi l est impair. Lorsque l est pair, alors $x_2(t)$ est positif pour tout $t > 0$. Cet exemple illustre un résultat plus général, démontré dans [Her82 ; Sus83] par Hermes et Sussmann en 1983*, que voici.*

Théorème 1.5.2 (Théorème d'Hermes)**.** *Soient f_0, f_1 des champs de vecteurs analytiques sur un voisinage de* 0 *dans $\mathbb{R}^d$ tels que $f_0(0) = 0$. Supposons que la LARC* (1.3.2) *est vérifiée et que*

$$\forall l \in \mathbb{N}^*, \quad S_{[\![1,2l]\!]}(f)(0) \subseteq S_{[\![1,2l-1]\!]}(f)(0). \tag{1.5.1}$$

Alors, le système $x' = f_0(x) + uf_1(x)$ est L^∞-STLC.

Ce théorème peut être heuristiquement interprété de la façon suivante : si tous les crochets d'ordre pair – potentiellement « *mauvais* » – sont compensés par des crochets d'ordre impair – qui sont moralement « *bons* » – alors, le système est contrôlable.

Exemple 1.5.3. *Le théorème s'applique au système*

$$\begin{cases} x_1' &= u \\ x_2' &= x_1^3 + x_1^4 \end{cases}.$$

En effet, $S_1(f)(0) = Vect(e_1)$, $S_3(f)(0) = S_4(f)(0) = Vect(e_2)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1, 3, 4\}$, $S_k(f)(0) = \{0\}$.

Une autre condition suffisante de contrôlabilité locale en temps petit célèbre est due à Sussmann – voir [Sus87, Théorème 7.3], [Cor07, Théorème 3.29]. Commençons par préciser la définition suivante.

Définition 1.5.4. *On définit l'application $\sigma : b \in \mathrm{Br}(X) \mapsto \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_r} \sigma_\pi(E(b)) \in \mathcal{L}(X)$, où, pour toute permutation $\pi \in \mathfrak{S}_r$, $\sigma_\pi : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X)$ désigne l'unique morphisme d'algèbre de Lie vérifiant $\sigma_\pi(X_0) = X_0$ et $\sigma_\pi(X_\ell) = X_{\pi(\ell)}$ pour $\ell \in [\![1, r]\!]$.*

Par exemple, si $r = 2$ et $b = (X_1, (X_1, X_0))$ alors $\sigma(b) = [X_1, [X_1, X_0]] + [X_2, [X_2, X_0]]$.

Théorème 1.5.5 (Condition $\mathcal{S}(\theta)$ de Sussmann)**.** *Soient $f_0, \cdots, f_r$ des champs de vecteurs analytiques sur un voisinage de* 0 *dans $\mathbb{R}^d$ tels que $f_0(0) = 0$. Supposons que la LARC* (1.3.2) *est vérifiée et qu'il existe* $\theta \in [0,1]$ *tel que, pour tout* $\mathfrak{b} \in \mathrm{Br}(X)$ *avec* $n_0(\mathfrak{b})$ *impair et* $n_\ell(\mathfrak{b})$ *pairs pour* $\ell \in [\![1, r]\!]$*, on ait*

$$f_{\sigma(\mathfrak{b})}(0) \in \mathit{Vect}\{f_b(0);\ b \in \mathrm{Br}(X),\ n(b) + \theta n_0(b) < n(\mathfrak{b}) + \theta n_0(\mathfrak{b})\}. \tag{1.5.2}$$

Alors, le système (1.1.1) *est* L^∞*-STLC.*

Dans un certain sens, cette condition indique la manière dont les « *mauvais* » crochets peuvent être compensés par de « *bons* » crochets pour permettre la STLC.

Exemple 1.5.6. *La condition* $\mathcal{S}(\theta)$ *de Sussmann s'applique au système*

$$\begin{cases} x_1' &= u \\ x_2' &= x_1 \\ x_3' &= x_2^2 + x_1^3 \end{cases}.$$

En effet, on vérifie que $f_{(X_1 0, X_1 0^2)}(0) = 2e_3$ *et* $f_{(X_1,(X_1,(X_1,X_0)))}(0) = 6e_3$*. Ainsi, tout* $\theta \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$ *convient.*

Des conditions suffisantes de STLC plus fortes sont connues, par exemple celle d'Agrachev et Gamkrelidze – voir [AG93, Théorème 4].

1.5.2 Conditions nécessaires de STLC

1.5.2.1 Pour des systèmes mono-contrôlés $(r = 1)$

Avant de démontrer la condition $\mathcal{S}(\theta)$ – voir Théorème 1.5.5 – Sussmann s'est intéressé à la réciproque de la condition suffisante de contrôlabilité (1.5.1) : est-elle nécessaire ? Sussmann centre son étude sur le cas où $k = 1$, plus particulièrement sur le crochet $W_1^1 := (X_1, X_1 0)$. Ce crochet a un rôle important – voir Remarque 1.3.9. Dans [Sus83], Sussmann démontre la première condition nécessaire connue, que voici.

Théorème 1.5.7. *Soient* f_0, f_1 *des champs de vecteurs analytiques sur un voisinage de* 0 *dans* $\mathbb{R}^d$ *tels que* $f_0(0) = 0$*. Si* $x' = f_0(x) + u f_1(x)$ *est* L^∞*-STLC, alors* $f_{W_1^1}(0) \in S_1(f)(0)$*.*

Remarque 1.5.8. *Ce théorème peut être lu par sa contraposée de la façon suivante : si le « mauvais » crochet* $f_{W_1^1}(0)$ *n'est pas compensé par les « bons » crochets de* $S_1(f)(0)$*, alors il crée une obstruction à la* L^∞*-STLC. Ce théorème permet de traiter à nouveau le Contre-exemple 1.3.8. En effet, on a* $S_1(f)(0) = \mathit{Vect}(e_1)$ *et* $f_{W_1^1}(0) = 2e_2$*. Par la contraposée du Théorème 1.5.7, on déduit la non-*L^∞*-STLC du système.*

Remarque 1.5.9. *Beauchard et Marbach ont montré dans [BM18] que le Théorème 1.5.7 reste valable avec la notion plus faible de* $W^{-1,\infty}$*-STLC, qui est équivalente à la small-state-STLC. Les auteurs montrent également que l'hypothèse d'analyticité sur les champs de vecteurs n'est pas nécessaire : il suffit que* f_0 *soit de classe* $\mathcal{C}^3$ *et* f_1 *de classe* $\mathcal{C}^2$*.*

Si $f_{W_1^1}(0) \in S_1(f)(0)$, cette obstruction tombe en défaut et on peut s'intéresser au rôle du deuxième crochet quadratique *i.e.* $f_{(X_1 0, X_1 0^2)}(0)$. Sussmann propose dans [Sus83] l'Exemple

1.5.6. On vérifie que $S_1(f)(0) = \text{Vect}(e_1, e_2)$, $f_{W_1^1}(0) = 0$ et $f_{(X_10,X_10^2)}(0) = 2e_3$. Ainsi, $f_{(X_10,X_10^2)}(0) \in S_{[\![1,2]\!]}(f)(0) \setminus S_1(f)(0)$. Pourtant, le système est L^∞-STLC. C'est ce système qui est à l'origine du Théorème 1.5.5. L'étude des différents crochets quadratiques est une question subtile. Dans [BM24], Beauchard et Marbach proposent une méthode générale pour démontrer des obstructions à la contrôlabilité des systèmes affines. Ils établissent ainsi l'énoncé suivant.

Théorème 1.5.10. *Soient f_0, f_1 des champs de vecteurs analytiques sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$ tels que $f_0(0) = 0$. Soit $m \in [\![-1, +\infty[\![$. Si le système $x' = f_0(x) + uf_1(x)$ est $W^{m,\infty}$-STLC, alors,*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f_{(X_10^{k-1},X_10^k)}(0) \in S_{[\![1,\pi(k,m)]\!]\setminus\{2\}}(f)(0).$$

où $\pi(k,m) := 1 + \left\lceil \frac{2k-2}{m+1} \right\rceil$ avec la convention $\pi(k,-1) = +\infty$ et $\pi(1,-1) = 1$.

Ce théorème s'intéresse aux crochets quadratiques de tout ordre et donne des conditions nécessaires de STLC en fonction du cadre fonctionnel. S'en déduit la forme contraposée : s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f_{(X_10^{k-1},X_10^k)}(0) \notin S_{[\![1,\pi(k,m)]\!]\setminus\{2\}}(f)(0)$, alors le système n'est pas $W^{m,\infty}$-STLC . On peut le comprendre de la façon suivante (et c'est ce qui apparaît dans la preuve) : si le « *mauvais* » crochet de Lie $f_{(X_10^{k-1},X_10^k)}(0)$ n'est pas compensé, alors il induit une dérive qui empêche le système d'être contrôlable. Il s'agit d'une extension du Théorème 1.5.7 (qui correspond au cas où $k = 1$ et $m = 0$).

Remarque 1.5.11. *Revenons à l'Exemple 1.5.6. Pour ce système, $S_1(f)(0) = \text{Vect}(e_1, e_2)$ et $f_{(X_10,X_10^2)}(0) = 2e_3$. On applique le Théorème 1.5.10 avec $k = 2$ et $m = 1$, pour en déduire que le système n'est pas $W^{1,\infty}$-STLC (même s'il est L^∞-STLC).*

Cela conclut la présentation des crochets de $S_2(f)(0)$ dans le cas mono-contrôlé. Un autre résultat, inspiré de l'Exemple 1.5.1, concerne l'étude des crochets de $S_{2l}(f)(0)$ pour $l \in \mathbb{N}^*$. Ce résultat, dû à Stefani, a été établi dans [Ste86].

Théorème 1.5.12 (Théorème de Stéfani)**.** *Soient f_0, f_1 des champs de vecteurs analytiques sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$ tels que $f_0(0) = 0$. Si le système $x' = f_0(x) + uf_1(x)$ est L^∞-STLC, alors,*

$$\forall l \in \mathbb{N}^*, \quad f_{\text{ad}^{2l}_{X_1}(X_0)}(0) \in S_{[\![1,2l-1]\!]}(f)(0).$$

Exemple 1.5.13. *Ce théorème traite l'Exemple 1.5.1 puisque $S_{[\![1,2l-1]\!]}(f)(0) = S_1(f)(0) = \text{Vect}(e_1)$ et $f_{\text{ad}^{2l}_{X_1}(X_0)}(0) = (2l)!e_2$, pour tout entier $l \in \mathbb{N}^*$.*

1.5.2.2 Pour des systèmes multi-contrôlés

Dans [Gir+24], Giraldi, Lissy, Moreau et Pomet considèrent des systèmes affines de la forme (1.1.1) avec $r = 2$ et $f_0(0) = f_2(0) = 0$. Ils prouvent une condition nécessaire pour la L^∞-STLC ; elle est formulée sur le crochet $f_{W_1^1}(0)$. Leur énoncé peut être reformulé comme suit.

Théorème 1.5.14. *Soient f_0, f_1, f_2 des champs de vecteurs analytiques sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$ tels que $f_0(0) = f_2(0) = 0$. Si le système (1.1.1) (avec $r = 2$) est L^∞-STLC, alors $f_{W_1^1}(0) \in S_{1,\mathbb{N}}(f)(0)$.*

Comme $f_0(0) = f_2(0) = 0$, tous les crochets itérés faisant intervenir uniquement f_0 et f_2 s'annulent en 0. Les auteurs prouvent une dérive du système qui est intégralement basée sur le crochet $f_{W_1^1}(0)$. Pour la démonstration, ils utilisent la formule de représentation de l'état de Chen-Fliess – présentée en Section 1.6.1.1 – et réorganisent ses termes pour former des crochets de Lie – comme l'a fait Stefani dans [Ste86].

Dans le même article [Gir+24], les auteurs prouvent une autre condition nécessaire pour la $W^{1,\infty} \times L^\infty$-STLC des systèmes (1.1.1) vérifiant $r = 2$. Dans des cas particuliers simples, le théorème peut être énoncé comme suit.

Théorème 1.5.15. *Soient f_0, f_1, f_2 des champs de vecteurs analytiques sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$ tels que $f_0(0) = f_2(0) = 0$. Supposons que $f_{W_1^1}(0)$, $f_{(X_1,(X_2,X_1))}(0)$ et $f_{((X_2,X_1),(X_0,X_1))}(0)$ sont dans $S_{1,\mathbb{N}}(f)(0)$. Soit*

$$\begin{aligned} q : (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto & -a_1^2 f_{(X_10,X_10^2)}(0) - a_2^2 f_{((X_2,X_1),(X_2,X_1)0)}(0) \\ & -a_1 a_2 \left(f_{((X_2,X_1),X_10^2)} + f_{(X_10,(X_2,X_1)0)} \right)(0) \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

S'il existe une forme linéaire $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ dont la restriction à $S_{1,\mathbb{N}}(f)(0)$ est nulle et telle que la forme quadratique $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \varphi(q(a_1, a_2))$ soit définie positive, alors le système (1.1.1) (avec $r = 2$) n'est pas $W^{1,\infty} \times L^\infty$-STLC.

Dans [HL02], Lewis et Hirschorn utilisent la formule de représentation de l'état de Chen–Fliess pour démontrer le résultat suivant, que nous énonçons en utilisant notre contexte légèrement différent et nos propres notations.

Théorème 1.5.16. *Soient f_0, f_1, f_2 des champs de vecteurs analytiques sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$ tels que $f_0(0) = 0$ et $(f_1(0), f_2(0))$ est une famille libre. Supposons que 0 est un point régulier pour Vect$\{f_b(0);\ b \in \mathcal{L}(X_1, X_2)\}$* [1]*. Soit $N := S_1(f)(0) +$ Vect$\{f_{(X_1,X_2)0^\nu}(0);\ \mu \in \mathbb{N}\}$ + Vect$\{f_b(0);\ b \in \mathcal{L}(X_1, X_2)\}$. Supposons que le système (1.1.1) (avec $r = 2$) est L^∞-STLC. Soit $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d/N$ la surjection canonique. Définissons la forme quadratique à valeurs vectorielles suivante*

$$B_N : (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto a_1^2 \sigma(f_{W_1^1}(0)) + a_2^2 \sigma(f_{(X_2,X_20)}(0)) + 2a_1 a_2 \sigma(f_{(X_2,X_10)}(0)) \in \mathbb{R}^d/N.$$

Alors, il n'existe pas de forme linéaire $\mathbb{P} : \mathbb{R}^d/N \to \mathbb{R}$ telle que la forme quadratique $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{P}(B_N(a_1, a_2)) \in \mathbb{R}$ soit définie positive.

Nous comparerons ces résultats avec celui obtenu dans [Ghe24] en Section 4.3.4. D'autres auteurs ont étudié les obstructions à la contrôlabilité liées aux phénomènes quadratiques – voir *e.g.* [Agr90].

1.6 Formules de représentation de l'état

Nous présentons dans cette section quelques résultats de représentation de l'état d'une équation différentielle ordinaire. L'objectif est multiple.

1. *i.e.* $\dim\{g(x); g \in \text{Lie}(f_1, f_2)\}$ ne dépend pas de x sur un voisinage de 0.

- Certaines de ces formules font intervenir des crochets de Lie. Elles permettent donc de faire en pratique, dans les démonstrations, le lien entre la STLC et les crochets de Lie.
- Une de ces formules, outil central des travaux présentés dans ce document, a été introduite par Beauchard et Marbach dans [BM24] et a permis de démontrer récemment de nouvelles conditions nécessaires de STLC – voir par exemple Théorème 1.5.10.
- Cette même formule permet de produire des preuves plus facilement adaptables au cadre de la dimension infinie des EDP. Même si la formule de représentation de l'état n'est pas valable en général pour l'état d'une EDP, on peut extraire les mêmes termes dominants de la dynamique.

1.6.1 Équations différentielles formelles

On établit d'abord ces développements de manière formelle. En effet, l'étude de leur convergence est subtile et est menée en détail dans [BLBM23]. On rappelle que $X = \{X_0, \cdots, X_r\}$ est un ensemble à $r+1$ indéterminées non commutatives.

Remarque 1.6.1. *L'ensemble $\mathcal{A}(X)$ – introduit en Définition 1.3.1 – est une algèbre graduée $\mathcal{A}(X) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n(X)$, où $\mathcal{A}_n(X)$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie engendré par les monômes de degré n en les indéterminées X_ℓ.*

Définition 1.6.2 (Séries formelles)**.** *On considère l'algèbre associative unitaire $\widehat{\mathcal{A}}(X)$ des séries formelles générées par $\mathcal{A}(X)$. Un élément $a \in \widehat{\mathcal{A}}(X)$ est une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que nous écrirons $a = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$, où $a_n \in \mathcal{A}_n(X)$.*

D'un point de vue pratique, une série formelle est une série dont la convergence n'est pas examinée. Dans toute cette section, on considère l'équation différentielle formelle

$$\begin{cases} x'(t) &= \left(X_0 + \sum_{\ell=1}^{r} u^\ell(t) X_\ell\right) x(t) \\ x(0) &= x^\star \end{cases}, \tag{1.6.1}$$

où $u \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})^r$ et $x^\star \in \widehat{\mathcal{A}}(X)$. On peut remarquer une analogie avec les systèmes (1.1.1).

Définition 1.6.3 (Solution d'une équation différentielle formelle)**.** *Soient $u \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})^r$ et $x^\star = (x_n^\star)_{n\in\mathbb{N}} \in \widehat{\mathcal{A}}(X)$. La solution de l'équation formelle (1.6.1) est la fonction $x : \mathbb{R}^+ \to \widehat{\mathcal{A}}(X)$, dont les coefficients $\left(x_n : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{A}_n(X)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les uniques fonctions continues satisfaisant, pour tout $t \geq 0$, $x_0(t) = x_0^\star$ et pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $t \geq 0$,*

$$x_n(t) = x_n^\star + \int_0^t x_{n-1}(s) \left(X_0 + \sum_{\ell=1}^{r} u^\ell(s) X_\ell\right) \mathrm{d}s.$$

1.6.1.1 Formule de Chen–Fliess

Raisonnons de manière heuristique. En temps court, nous pouvons fournir l'approximation grossière $x(t) \simeq x^\star$. En réinjectant cette approximation dans l'équation, nous obtenons en itérant

$x(t) \simeq x^\star + \int_0^t \left(X_0 + \sum_{\ell=1}^r u^\ell(s) X_\ell\right) x^\star \mathrm{d}s$, puis

$$x(t) \simeq x^\star + \int_0^t \left(X_0 + \sum_{\ell=1}^r u^\ell(s) X_\ell\right) x^\star \mathrm{d}s$$
$$+ \int_0^t \left(X_0 + \sum_{\ell=1}^r u^\ell(s) X_\ell\right) \left(\int_0^s \left(X_0 + \sum_{\ell=1}^r u^\ell(\sigma) X_\ell\right) x^\star \mathrm{d}\sigma\right) \mathrm{d}s.$$

Cette suite d'approximations est à l'origine de la formule de Chen-Fliess, que voici.

Lemme 1.6.4 (Chen-Fliess formula)**.** *L'unique solution de l'équation différentielle formelle* (1.6.1) *avec* $x^\star = 1$ *est donnée par*

$$x(t) = \sum_{\sigma \in \cup_{k\in\mathbb{N}} [\![0,r]\!]^k} \left(\int_0^t x_\sigma\right) X_{\sigma_1} \cdots X_{\sigma_k}, \tag{1.6.2}$$

où $x_0 = 1$, $x_\ell = u^\ell$ *pour* $\ell \in [\![1, r]\!]$ *et pour* $\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_k) \in [\![0, r]\!]^k$,

$$\int_0^t x_\sigma := \int_{0<\tau_1<\cdots<\tau_k<t} x_{\sigma_1}(\tau_1) \cdots x_{\sigma_k}(\tau_k) \mathrm{d}\tau_1 \cdots \mathrm{d}\tau_k.$$

Ce développement est établi dans [Che57 ; Fli81]. Néanmoins, il possède des désavantages en vue de son application à la théorie du contrôle :

- les fonctionnelles $\left(\int_0^t x_\sigma\right)_{\sigma \in \cup_{k\in\mathbb{N}} [\![0,r]\!]^k}$ ne sont pas algébriquement indépendantes,
- dans le contexte des équations différentielles ordinaires non linéaires, la représentation (1.6.2) n'est pas invariante par difféomorphisme.

Ces éléments, développés dans [BLBM23], motivent la recherche d'autres formules de représentation impliquant directement des crochets de Lie.

1.6.1.2 Formule de Magnus

Retournons à l'équation différentielle (1.6.1). Supposons que les contrôles u sont constants par morceaux, *e.g.* $u^1 \equiv 1$ sur $[0, 1]$, $u^2 \equiv 1$ sur $[1, 2]$ et les autres sont nuls. On obtient formellement la solution $x(2) = e^{X_0+X_2} e^{X_0+X_1} x^\star$. En utilisant la formule de Campbell–Baker–Hausdorff–Dynkin, on a finalement $x(2) = \exp\left(2X_0 + X_2 + X_1 + \frac{1}{2}[X_0 + X_2, X_0 + X_1] + \cdots\right) x^\star$. En itérant cette formule, on peut écrire un produit de n exponentielles comme une unique exponentielle. En faisant tendre n vers $+\infty$, on calcule finalement un produit continu d'exponentielles, ce qui, heuristiquement, revient à résoudre l'équation (1.6.1). Magnus a été le premier à écrire de manière formelle la solution d'une EDO comme l'exponentielle d'une série. Afin d'en donner un énoncé, on a besoin des deux définitions suivantes.

Définition 1.6.5. *Soit* $a \in \widehat{\mathcal{A}}(X)$ *ayant* 0 *pour terme constant. On définit* $\exp(a) \in \widehat{\mathcal{A}}(X)$ *comme*

$$\exp(a) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

Définition 1.6.6 (Séries formelles de l'algèbre de Lie)**.** *On définit* $\widehat{\mathcal{L}}(X)$ *comme l'algèbre de Lie des séries formelles* $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widehat{\mathcal{A}}(X)$ *vérifiant* $a_n \in \mathcal{L}(X)$, *pour* $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.6.7 (Formule de Magnus)**.** *L'unique solution de l'équation différentielle formelle* (1.6.1) *satisfait* $x(t) = x^\star \exp(Z(t,u))$*, où* $Z(t,u) \in \widehat{\mathcal{L}}(X)$*.*

La quantité $Z(t,u)$ est définie explicitement comme le logarithme de $x(t)$. L'information essentielle de cet énoncé est que $Z(t,u)$ est une série formelle de crochets de Lie itérés de $X_0, \cdots, X_r$. Malheureusement, lorsqu'on évalue $Z(t,u)$ en des champs de vecteurs (en remplacant X_ℓ par f_ℓ) la série obtenue ne converge pas forcément (même si les champs de vecteurs sont analytiques).

1.6.1.3 Formule de type-Magnus

Ce sont ces constatations qui ont amené Beauchard et Marbach à introduire une nouvelle formule de représentation de l'état de type Magnus, plus adaptée aux applications à la théorie du contrôle : ils ont isolé le rôle de la dérive autonome X_0 par rapport au rôle des perturbations dépendant du temps $u^\ell(t)X_\ell$. Plus précisément, on a l'énoncé suivant.

Théorème 1.6.8 (Formule de type-Magnus)**.** *L'unique solution de l'équation différentielle formelle* (1.6.1) *satisfait* $x(t) = x^\star \exp(tX_0)\exp(\mathcal{Z}(t,u))$*, où* $\mathcal{Z}(t,u) \in \widehat{\mathcal{L}}(X)$*.*

Il existe d'autres développements formels de la solution d'une EDO, comme le produit infini de Sussmann. Toutes ces considérations historiques et les démonstrations des théorèmes énoncés dans cette section sont développées dans [BLBM23]. Toutes ces formules sont valables d'un point de vue formel. Néanmoins, la possibilité de les évaluer n'est pas garantie et l'étude de la convergence est non triviale. Nous faisons un point sur ces éléments pour la formule de type Magnus dans les sections suivantes.

1.6.2 Évaluation de la formule de représentation de l'état de type Magnus

1.6.2.1 Ensemble de Hall et base de l'algèbre de Lie libre $\mathcal{L}(X)$

La formule de représentation de l'état de type Magnus – voir Théorème 1.6.8 – assure que la solution de l'équation différentielle formelle (1.6.1) s'écrit $x(t) = x^\star e^{tX_0} e^{\mathcal{Z}(t,u)}$. Il existe une écriture explicite de $\mathcal{Z}(t,u)$, mais elle est complexe à manipuler. On rappelle que $\mathcal{Z}(t,u) \in \widehat{\mathcal{L}}(X)$. Nous allons donc plutôt décomposer $\mathcal{Z}(t,u)$ sur une base algébrique de $\mathcal{L}(X)$ et trouver une façon d'accéder à ses coordonnées. Il existe un moyen algorithmique de construire des bases de $\mathcal{L}(X)$, il s'agit des **ensembles de Hall**. Afin de les introduire, on a besoin de la définition suivante.

Définition 1.6.9 (Facteur gauche et droit)**.** *Pour* $b \in \mathrm{Br}(X)$ *avec* $|b| > 1$*,* b *peut être écrit de manière unique* $b = (b_1, b_2)$*, avec* $b_1, b_2 \in \mathrm{Br}(X)$*. Nous utilisons la notation* $\lambda(b) = b_1$ *et* $\mu(b) = b_2$*, qui définit les applications facteur gauche et droit* $\lambda, \mu : \mathrm{Br}(X) \setminus X \to \mathrm{Br}(X)$*.*

Exemple 1.6.10. *Soit* $b := ((X_1, X_2), ((X_2, X_0), X_0))$ *un crochet. On a e.g.* $\lambda(b) = (X_1, X_2)$*,* $\mu(b) = ((X_2, X_0), X_0)$ *et* $\lambda(\mu(b)) = (X_2, X_0)$*.*

Définition 1.6.11 (Ensemble de Hall)**.** *Un ensemble de Hall est un sous-ensemble* $\mathcal{B}$ *de* $\mathrm{Br}(X)$ *muni d'un ordre total* $<$ *vérifiant les axiomes suivants :*

- $X \subset \mathcal{B}$,

- *pour tous* $b_1, b_2 \in \mathrm{Br}(X)$, $(b_1, b_2) \in \mathcal{B}$ *ssi* $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$, $b_1 < b_2$ *et soit* $b_2 \in X$ *ou* $\lambda(b_2) \leq b_1$,
- *pour tous* $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$ *vérifiant* $(b_1, b_2) \in \mathcal{B}$, *on a* $b_1 < (b_1, b_2)$.

Cette définition semble un peu mystérieuse à première vue, mais son utilité est centrale et elle réside dans le théorème suivant.

Théorème 1.6.12 (Viennot, [Kro87])**.** *Soit* $\mathcal{B} \subset \mathrm{Br}(X)$ *un ensemble de Hall. Alors* $\mathrm{E}(\mathcal{B})$ *est une base algébrique* $\mathcal{L}(X)$.

Étant en mesure de construire des bases algébriques de $\mathcal{L}(X)$, nous pouvons maintenant décomposer $\mathcal{Z}(t, u) \in \widehat{\mathcal{L}}(X)$ dans ces bases. Reste encore la question des coordonnées associées à cette décomposition. C'est l'objet de la section suivante.

1.6.2.2 Coordonnées de type pseudo-premier

Proposition 1.6.13. *Soit* $\mathcal{B} \subset \mathrm{Br}(X)$ *un ensemble de Hall. Il existe une unique famille de fonctionnelles* $(\eta_b : \mathbb{R}^+ \times L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})^r \to \mathbb{R})_{b \in \mathcal{B}}$ *telle que, pour tous* $t \geq 0$, $u \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})^r$,

$$\mathcal{Z}(t, u) = \sum_{b \in \mathcal{B}} \eta_b(t, u) \mathrm{E}(b).$$

Ce sont les coordonnées dites de type pseudo-premier (associées à l'ensemble de Hall $\mathcal{B}$*).*

Cette proposition est démontrée dans [BLBM23, Proposition 44]. Voici quelques propriétés vérifiées par les coordonnées de type pseudo-premier qui seront utiles dans ce travail.

Proposition 1.6.14 (Homogénéité)**.** *Soient* $\bar{u} := (\bar{u}^1, \cdots, \bar{u}^r) \in L^1(0,1)^r$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, $T > 0$ *et* $u^\ell : t \in (0, T) \mapsto \lambda_\ell \bar{u}^\ell(\frac{t}{T})$ *pour* $\ell \in [\![1, r]\!]$. *Alors, pour tout* $b \in \mathcal{B}$,

$$\eta_b(T, (u^1, \cdots, u^r)) = \left(\prod_{\ell=1}^{r} \lambda_\ell^{n_\ell(b)} \right) T^{|b|} \eta_b(1, \bar{u}). \tag{1.6.3}$$

Proposition 1.6.15. *Pour tout* $M \in \mathbb{N}^*$, *il existe* $C_M > 0$ *tel que, pour tous* $T > 0$, $u \in L^1((0, T), \mathbb{R})^r$, $b \in \mathcal{B}$ *avec* $n(b) \leq M$ *et* $t \in [0, T]$,

$$|\eta_b(t, u)| \leq \frac{C_M}{|b|!} t^{n_0(b)} \prod_{\ell=1}^{r} \left\| u^\ell \right\|_{L^1(0,t)}^{n_\ell(b)}. \tag{1.6.4}$$

Cette proposition est démontrée dans [BLBM23, Proposition 52].

1.6.2.3 Formule de représentation de l'état de type Magnus

L'enjeu maintenant est de pouvoir évaluer cette formule pour obtenir une expression de la solution de (1.1.1) en assurant sa convergence. Ce développement est bien adapté aux troncatures par rapport à $n(b)$. Afin de l'énoncer, on introduit la définition suivante.

Définition 1.6.16 (Couches homogène de $\mathcal{B}$)**.** *Soient* $\mathcal{B}$ *un ensemble de Hall et* $A \subset \mathbb{N}$. *On notera* $\mathcal{B}_A := \{b \in \mathcal{B};\ n(b) \in A\}$. *Pour* $i \in \mathbb{N}$, *on notera* $\mathcal{B}_i$ *au lieu de* $\mathcal{B}_{\{i\}}$.

Nous pouvons maintenant énoncer la formule de type Magnus de représentation de l'état.

Théorème 1.6.17 (Formule de représentation approchée de l'état de type Magnus)**.** *Soient $\mathcal{B} \subset \mathrm{Br}(X)$ un ensemble de Hall, $M \in \mathbb{N}^*$, $\delta, T > 0$ et $f_\ell : B(0, 5\delta) \to \mathbb{R}^d$ des champs de vecteurs analytiques pour $\ell \in [\![0, r]\!]$ vérifiant $T\|f_0\|_{\mathcal{C}^0} \leq \delta$. Il existe $\gamma, C > 0$ tels que, pour tous $u \in L^1((0,T), \mathbb{R}^d)^r$ vérifiant $\|u\|_{L^1} \leq \gamma$, $p \in \mathcal{B}(0, \delta)$, $t \in [0, \gamma]$,*

$$\left\| x(t; u, p, 0) - e^{\mathcal{Z}_M(t; f, u)} e^{t f_0} p \right\| \leq C \|u\|^{M+1}_{L^1(0,t)}, \tag{1.6.5}$$

avec

$$\mathcal{Z}_M(t; f, u)(0) := \sum_{b \in \mathcal{B}_{[\![1,M]\!]}} \eta_b(t, u) f_b(0), \tag{1.6.6}$$

où la série est absolument convergente.

L'estimation (1.6.4) est centrale pour assurer la convergence de la série considérée. De ce théorème, on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 1.6.18 (Formule de représentation approchée de l'état de type Magnus 2)**.** *Soient $M \in \mathbb{N}^*$, $\delta, T > 0$, $f_\ell : B(0, 2\delta) \to \mathbb{R}^d$ des champs de vecteurs analytiques pour $\ell \in [\![0, r]\!]$ vérifiant $f_0(0) = 0$ et $T \|f_0\|_\infty \leq \delta$. Pour $u \in L^1((0,T), \mathbb{R})^r$, lorsque $\|u\|_{L^1} \to 0$,*

$$x(t; u) = \mathcal{Z}_M(t; f, u)(0) + \mathcal{O}\left(\|u\|^{M+1}_{L^1(0,t)} + \|x(t; u)\|^{1+\frac{1}{M}} \right). \tag{1.6.7}$$

Ces représentations de l'état sont établies dans [BLBM23]. Les idées de preuve sont rappelées en Appendice A. Elles fournissent une première réponse à la question : comment faire le lien entre la contrôlabilité et les crochets de Lie ? C'est à ces deux énoncés que l'on fera référence dans ce document lorsque l'on parlera de formule de représentation de l'état de type Magnus.

1.6.2.4 Coordonnées de second type

Pour contourner la complexité de l'expression de $\mathcal{Z}(t, u)$, nous avons développé une troncature de ce terme sur une base algébrique de $\mathcal{L}(X)$. Nous devons néanmoins faire face à une dernière difficulté : aucune formule simple n'est connue pour le calcul des coordonnées de type pseudo-premier $(\eta_b)_{b \in \mathcal{B}}$. Dans [BLBM23], Beauchard et Marbach contournent cette difficulté en considérant une autre famille de coordonnées (celles associées au produit infini de Sussmann), $(\xi_b)_{b \in \mathcal{B}}$, dite de second type. Elles sont définies par récurrence ; leurs expressions sont donc beaucoup plus simples à calculer.

Définition 1.6.19 (Coordonnées de second type)**.** *Soit $\mathcal{B} \subset \mathrm{Br}(X)$ un ensemble de Hall. Les coordonnées de second type associées à $\mathcal{B}$ sont l'unique famille $(\xi_b : \mathbb{R}_+ \times L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})^r \to \mathbb{R})_{b \in \mathcal{B}}$ de fonctionnelles définies par récurrence comme suit : pour tous $t > 0$, $u \in L^1((0,t), \mathbb{R})^r$,*

- $\xi_{X_0}(t, u) := t$, $\xi_{X_\ell}(t, u) := \int_0^t u^\ell(s) \mathrm{d}s$ *pour* $\ell \in [\![1, r]\!]$,
- *pour tout $b \in \mathcal{B} \setminus X$, il existe un unique couple (b_1, b_2) d'éléments de $\mathcal{B}$ vérifiant $b_1 < b_2$ et un unique entier maximal $m \geq 1$ tels que $b = \mathrm{ad}^m_{b_1}(b_2)$ et ainsi*

$$\xi_b(t, u) := \frac{1}{m!} \int_0^t \xi^m_{b_1}(s, u) \xi'_{b_2}(s, u) \, \mathrm{d}s.$$

Dans le but de condenser les expressions à venir, on introduit la définition suivante.

Définition 1.6.20. *Pour $T > 0$ et $f \in L^1((0,T),\mathbb{R})$, on définit les primitives itérées f_n de f s'annulant en $t = 0$ par récurrence comme suit :*

$$f_0 := f \quad \textit{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,T], \quad f_{n+1}(t) := \int_0^t f_n(s)\mathrm{d}s.$$

Pour $u := (u^1, \cdots, u^r) \in L^1((0,T),\mathbb{R})^r$, on dénotera $u_n := (u_n^1, \cdots, u_n^r)$.

Il nous faut enfin faire le lien entre ces deux familles de coordonnées. Puisque nous nous intéresserons dans cette thèse à l'obtention de résultats quadratiques, on focalise la proposition suivante dans le cas de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

Proposition 1.6.21. *Soit $\mathcal{B} \subset \mathrm{Br}(X)$ un ensemble de Hall. Pour tous $t > 0$, $u \in L^1(0,t)^r$,*

- *si $b \in \mathcal{B}_1$, alors*
$$\eta_b(t,u) = \xi_b(t,u), \tag{1.6.8}$$
- *si $b \in \mathcal{B}_2$, alors il existe $\ell, L \in [\![1,r]\!]$ tels que $n_\ell(b) = n_L(b) = 1$ (quitte à avoir $\ell = L$) et $\beta_{j,k}^b \in \mathbb{R}$ vérifiant*
$$\eta_b(t,u) = \xi_b(t,u) + \sum_{j+k=n_0(b)} \beta_{j,k}^b u_{j+1}^\ell(t) u_{k+1}^L(t), \tag{1.6.9}$$

Cette proposition est démontrée dans une version très générale dans [BM24, Proposition 2.16]. L'élément clef de la démonstration est la formule de Campbell–Baker–Hausdorff–Dynkin.

1.6.3 Une nouvelle base de l'algèbre de Lie libre

Cette dernière section anticipe le travail de recherche entrepris durant cette thèse et présente la nouvelle base de Hall introduite dans mes articles. Pour cela, il nous faut donc expliquer comment construire un ensemble de Hall. La Définition 1.6.11 d'un ensemble de Hall fournit également un algorithme pour sa construction. En effet, les couches homogènes $\mathcal{B}_N$ d'un ensemble de Hall $\mathcal{B}$ peuvent être construites par récurrence sur N. Commençons par exemple par $\mathcal{B}_0 = \{X_0\}$ et $\mathcal{B}_1 = \{X_\ell 0^\nu;\ \ell \in [\![1,r]\!], \nu \in \mathbb{N}\}$ avec l'ordre suivant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad X_1 0^k < \cdots < X_r 0^k < X_1 0^{k+1} < \cdots < X_r 0^{k+1} < \cdots < X_0,$$

qui est compatible avec les trois axiomes énoncés en Définition 1.6.11. Soit $N \geq 2$. Nous souhaitons construire les éléments de $\mathcal{B}_N$ en supposant donné $\mathcal{B}_{[\![1,N-1]\!]}$.

- On ajoute premièrement tous les couples (a,b) avec $a \in \mathcal{B}_{N-1}$, $b \in X$ et $a < b$.
- Ensuite, pour chaque crochet $b = (b_1,b_2) \in \mathcal{B}_{[\![1,N-1]\!]}$, on ajoute tous les couples (a,b) avec $a \in \mathcal{B}_{N-n(b)}$ et $b_1 \leq a < b$.
- Finalement, on insère les nouveaux éléments générés de $\mathcal{B}_N$ dans un ordre qui maintient la condition $a < (a,b)$.

Nous mettons donc en œuvre cet algorithme afin d'obtenir les éléments de $\mathcal{B}_2$.

Notation. *Pour $b = (b_1,b_2) \in \mathrm{Br}(X)$, $j \in \mathbb{N}$, on notera* $(-1)^j b := \begin{cases} (b_2,b_1) & \textit{si } j \textit{ est impair} \\ (b_1,b_2) & \textit{si } j \textit{ est pair} \end{cases}.$

Proposition 1.6.22. *Il existe un ensemble de Hall $\mathcal{B} \subset \mathrm{Br}(X)$ tel que X_0 est maximal,*

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ M_j^\ell := X_\ell 0^j; \quad \ell \in [\![1, r]\!], \ j \in \mathbb{N} \right\}, \tag{1.6.10}$$

et $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_{2,good} \cup \mathcal{B}_{2,bad}$ avec

$$\mathcal{B}_{2,bad} = \left\{ W_{j,l}^\ell := (M_{j-1}^\ell, M_j^\ell)0^l; \quad \ell \in [\![1, r]\!], \ j \in \mathbb{N}^*, \ l \in \mathbb{N} \right\}, \tag{1.6.11}$$

$$\mathcal{B}_{2,good} = \left\{ C_{j,l}^{\ell,L} := (-1)^j \left(M^\ell_{\lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor}, M^L_{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \right) 0^l; \quad \ell, L \in [\![1, r]\!] \text{ tels que } \ell < L, \ j, l \in \mathbb{N} \right\}. \tag{1.6.12}$$

Remarque 1.6.23. *Lorsque $l = 0$, on notera $W_j^\ell, C_j^{\ell,L}$ au lieu de $W_{j,0}^\ell$ et $C_{j,0}^{\ell,L}$. Si $r = 2$, on notera $C_{j,l}$ au lieu de $C_{j,l}^{1,2}$.*

Remarque 1.6.24. *Pour ne pas surcharger les formules, on notera $b \in \mathcal{L}(X)$ au lieu de $\mathrm{E}(b)$.*

Cette proposition est utilisée de manière déterminante dans les Chapitres 3, 4, 6 et 7. Dans cet énoncé, l'ensemble $\mathcal{B}_2$ a été séparé en deux sous-ensembles : $\mathcal{B}_{2,good}$ et $\mathcal{B}_{2,bad}$. Intuitivement, les crochets de $\mathcal{B}_{2,good}$ sont de *bons* crochets, *i.e.* des crochets qui aident à la contrôlabilité. Notons que ce sont des crochets quadratiques b « croisés », *i.e.* qui vérifient $n_\ell(b) \leq 1$ pour $\ell \in [\![1, r]\!]$. Les crochets de $\mathcal{B}_{2,bad}$ sont de *mauvais* crochets qui peuvent causer des dérives et empêcher la contrôlabilité. Notons que ce sont des crochets quadratiques b « non croisés », *i.e.* qui vérifient $n_\ell(b) = 2$ pour un certain $\ell \in [\![1, r]\!]$. Une base analogue a été abondamment utilisée par Beauchard et Marbach dans [BM24] dans le cas des systèmes mono-contrôlés ($r = 1$). Dans ce cas, tous les crochets quadratiques sont *mauvais*.

Remarque 1.6.25. *Dans [Bro13], Brockett s'intéresse à des systèmes d'EDO linéaires et quadratiques particuliers, de la forme $\begin{cases} x' &= Ax + Bu, \\ w_i' &= {}^t x D_i x, \qquad 1 \leq i \leq r \end{cases}$, avec D_i, des matrices symétriques bien choisies. Il prouve un résultat de contrôlabilité globale en temps petit avec $r = 2$. Pour cela, Brockett montre que les matrices D_i sont associées à de bons crochets quadratiques – voir [Bro13, Théorème 3.4]. Les bons crochets quadratiques impliqués sont des éléments de la forme (M_ν^1, X_2), $\nu \in \mathbb{N}$. Ce sont des combinaisons linéaires d'éléments de $\mathcal{B}_{2,good}$.*

Nous sommes maintenant en mesure de donner l'expression des coordonnées de second type des éléments de l'ensemble de Hall introduit en Proposition 1.6.22.

Proposition 1.6.26. *Les égalités suivantes sont vérifiées.*

- *Pour $b \in \mathcal{B}$ et $\nu \in \mathbb{N}$,*
$$\xi_{b0^\nu}(t, u) = \int_0^t \frac{(t-s)^\nu}{\nu!} \xi_b'(s, u) \mathrm{d}s. \tag{1.6.13}$$
- *Pour tous $\ell \in [\![1, r]\!]$, $j \in \mathbb{N}$,*
$$\xi_{M_j^\ell}(t, u) = u_{j+1}^\ell(t). \tag{1.6.14}$$
- *Pour tous $\ell \in [\![1, r]\!]$, $j \in \mathbb{N}^*$, $l \in \mathbb{N}$,*
$$\xi_{W_{j,l}^\ell}(t, u) = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{(t-s)^l}{l!} u_j^\ell(s)^2 \mathrm{d}s. \tag{1.6.15}$$

- *Pour tous* $1 \leq \ell < L \leq r$, $j, l \in \mathbb{N}$,

$$\xi_{C_{j,l}^{\ell,L}}(t,u) = \int_0^t \frac{(t-s)^l}{l!} u^{\ell}_{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor + 1}(s) u^{L}_{\lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor}(s) \mathrm{d}s. \tag{1.6.16}$$

Démonstration. Les trois premiers points sont démontrés dans [BM24, Lemme 3.6, Proposition 3.7]. Prouvons le dernier : soient $\ell, L \in \mathbb{N}$ vérifiant $1 \leq \ell < L \leq r$, $j, l \in \mathbb{N}$. Par le premier point,

$$\xi_{C_{j,l}^{\ell,L}}(t,u) = \int_0^t \frac{(t-s)^l}{l!} \xi'_{C_j^{\ell,L}}(s,u) \mathrm{d}s.$$

Supposons que $j = 2j_0$ est pair. Alors, $C_j^{\ell,L} = \mathrm{ad}^1_{X_\ell 0^{j_0}}(X_L 0^{j_0})$. Ainsi, en utilisant la Définition 1.6.19 et (1.6.14), on obtient le résultat annoncé. La preuve est identique si j est impair. $\square$

CHAPITRE 2

ÉTAT DE L'ART DE LA STLC DE L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER BILINÉAIRE

RÉSUMÉ. Ce chapitre est un état de l'art sur le contrôle de l'équation de Schrödinger bilinéaire, en particulier la contrôlabilité exacte locale autour de l'état fondamental.

2.1 Une introduction à l'équation de Schrödinger bilinéaire

L'équation de Schrödinger, élaborée en 1925 par le physicien autrichien Erwin Schrödinger, est une équation essentielle de la mécanique quantique. Elle régit l'évolution temporelle d'une particule non relativiste, jouant un rôle analogue à celui de l'équation fondamentale de la dynamique en mécanique classique. Dans le cadre de la mécanique quantique, les particules ne sont plus représentées comme des objets ponctuels ayant des trajectoires bien définies, mais plutôt comme des entités décrites par une fonction d'onde ψ. Cette fonction d'onde contient toute l'information sur l'état du système et permet de calculer la probabilité de présence d'une particule en un point donné de l'espace. Dans les contextes où les caractéristiques physiques d'un système varient en fonction d'interventions extérieures – comme c'est fréquemment le cas en physique quantique – il est judicieux d'opter pour des modèles dits bilinéaires – voir *e.g.* [Dio+99, Équation (5)]. L'équation de Schrödinger bilinéaire en dimension 1 à r contrôles scalaires qui nous intéresse est la suivante :

$$\begin{cases} i\partial_t \psi(t,x) = -\partial_x^2 \psi(t,x) - u(t)\cdot\mu(x)\psi(t,x), & t\in(0,T), x\in(0,1), \\ \psi(t,0)=\psi(t,1)=0, & t\in(0,T), \\ \psi(0,x)=\psi_0(x), & x\in(0,1), \end{cases} \tag{2.1.1}$$

où $T>0$, $u := (u^1,\cdots,u^r) : (0,T)\to\mathbb{R}^r$, $\mu := (\mu_1,\cdots,\mu_r) : (0,1)\to\mathbb{R}^r$, $\psi : (0,T)\times(0,1)\to\mathbb{C}$, $\|\psi_0\|_{L^2}=1$ et $(x,y)\in\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^r\mapsto x\cdot y$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^r$.

Cette équation décrit l'évolution de la fonction d'onde ψ d'une particule quantique dans un puits de potentiel carré infini unidimensionnel $(0,1)$, soumis à r champs électriques d'amplitudes $u^1,\cdots,u^r$. Les fonctions $\mu_1,\cdots,\mu_r$, appelées « moments dipolaires », modélisent l'interaction entre la fonction d'onde ψ de la particule et les r champs électriques.

Il s'agit d'un système de contrôle non linéaire multi-commandé.

- *État :* la fonction d'onde $\psi : (0,T)\to\mathcal{S}$, où $\mathcal{S}$ désigne la sphère de $L^2(0,1)$. En effet, l'équation de Schrödinger conserve la norme $L^2(0,1)$ de la fonction d'onde (et donc la probabilité totale de présence).
- *Contrôles :* les fonctions $u^1,\cdots,u^r : (0,T)\to\mathbb{R}^r$. Elles agissent de manière bilinéaire sur l'état *via* le terme $u(t)\cdot\mu(x)\psi(t,x)$. C'est pourquoi on parle d'équation bilinéaire.

L'état fondamental est la trajectoire particulière $\psi_1(t,x) := \varphi_1(x)e^{-i\lambda_1 t}$, avec $u\equiv 0$, où $\varphi_1(x) := \sqrt{2}\sin(\pi x)$ et $\lambda_1 := \pi^2$. Nous nous intéressons à la contrôlabilité locale en temps petit autour de l'état fondamental, c'est-à-dire à la possibilité de réaliser, en un temps arbitraire $T>0$, de petits mouvements autour de l'état fondamental avec de petits contrôles. Cela correspond à la surjectivité locale autour de 0 de l'application point d'arrivée $\Theta_T : u\mapsto\psi(T;u,\varphi_1)$. Toute réponse positive au problème de contrôlabilité locale en temps petit peut être vue comme un théorème d'inversion locale non linéaire, ce qui souligne la profondeur et la complexité de ce problème, dans le cas où le théorème d'inversion locale classique (ou test linéaire) – voir [Cor07, Section 3.1] – ne peut pas être utilisé.

2.2 Un premier résultat négatif

Pendant de nombreuses années, les équations bilinéaires en dimension infinie ont été jugées non contrôlables en raison du résultat négatif obtenu par Ball, Marsden et Slemrod dans [BMS82] en 1982 que voici.

Théorème 2.2.1. *Soient X un espace de Banach de dimension infinie, $\mathcal{A}$ générateur d'un $\mathcal{C}^0$-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X et $B : X\to X$ un opérateur linéaire borné. Pour tous $w_0\in X$ et $u\in L^1_{\text{loc}}((0,+\infty),\mathbb{R})$, l'unique solution du système*

$$\begin{cases} w'(t) &= \mathcal{A}w(t)+u(t)B(w(t)) \\ w(0) &= w_0 \end{cases},$$

est notée $w(t; p, w_0)$. Alors, pour tout $w_0 \in X$, l'ensemble des états atteignables depuis w_0, défini par,

$$\mathcal{R}(w_0) := \{w(t; u, w_0);\ t \geq 0,\ u \in L^p_{\text{loc}}((0, +\infty), \mathbb{R}),\ p > 1\}$$

est contenu dans une union dénombrable de sous-ensembles compacts de X et, en particulier, est d'intérieur vide dans X.

Ceci signifie que, arbitrairement proche (pour la topologie de X) d'un état atteignable, il existe des cibles que l'on ne pourra pas atteindre. Le cas $p = 1$ des contrôles dans $L^1_{\text{loc}}((0, +\infty), \mathbb{R})$ a été ensuite traité dans [BCC20] par Boussaid, Caponigro et Chambrion en 2014. Ce résultat a été généralisé aux équations non linéaires par Chambrion et Thomann dans [CT19]. Pour l'équation de Schrödinger, Turinici montre en 2000 dans [Tur00] à partir du Théorème 2.2.1 que si les opérateurs de multiplication par μ_ℓ préservent l'espace considéré, alors la contrôlabilité dans cet espace est impossible. Ce résultat a ensuite été adapté aux équations de Schrödinger non linéaires par Illner, Lange et Teismann dans [ILT06] en 2005. Afin de contourner cette obstruction, différentes pistes ont été exploitées par les mathématiciens pour obtenir des résultats positifs de contrôlabilité des équations de Schrödinger bilinéaires.

- *La contrôlabilité exacte dans des espaces plus réguliers :* en effet, l'obstruction donnée dans le Théorème 2.2.1 assure que, si l'opérateur B est continu pour **la topologie de X**, alors, près de tout état atteignable pour **la norme X**, il existe des cibles non atteignables. Ceci n'empêche pas l'espace atteignable de contenir une boule pour **une norme plus fine**, à condition que l'opérateur B ne soit pas continu pour cette norme. Cette remarque a permis d'aboutir à de nombreux résultats positifs de contrôlabilité. C'est dans cette dynamique que s'inscrit cette thèse. Nous présentons certains de ces résultats dans les sections suivantes.
- *La contrôlabilité approchée :* on décide de changer la notion de contrôlabilité. On ne cherche plus à atteindre des cibles exactement, mais de manière approchée.

2.3 Caractère bien posé de (2.1.1)

Nous considérons, pour $k \in \mathbb{N}$, $H^k((0, T), \mathbb{R})$, l'espace de Sobolev réel, muni de sa norme usuelle et $H^k_0((0, T), \mathbb{R})$ l'adhérence de $\mathcal{C}^\infty_c(0, T)$ pour cette norme. Sauf précision explicite, nous travaillerons avec des fonctions à valeurs complexes. On munit l'espace $L^2(0, 1)$ du produit scalaire

$$\forall f, g \in L^2(0, 1), \quad \langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x.$$

On définit également l'opérateur

$$A := -\partial_x^2 \text{ avec domaine } D(A) := H^2(0, 1) \cap H^1_0(0, 1). \tag{2.3.1}$$

L'analyse spectrale de l'opérateur nous donne les expressions des valeurs propres et les vecteurs propres

$$\lambda_j := (j\pi)^2, \qquad \varphi_j := \sqrt{2}\sin(j\pi\cdot), \qquad j \geq 1. \tag{2.3.2}$$

De plus, la famille $(\varphi_j)_{j\geq 1}$ est une base hilbertienne de $L^2(0,1)$. Nous définissons aussi les fonctions

$$\psi_j(t,x) := \varphi_j(x)e^{-i\lambda_j t}, \qquad (t,x)\in(0,T)\times(0,1), \qquad j\geq 1. \tag{2.3.3}$$

Ce sont les solutions de l'équation de Schrödinger bilinéaire libre – *i.e.* de (2.1.1) avec $u\equiv 0$ – avec donnée initiale φ_j à l'instant $t=0$. Elles sont appelées états propres. Lorsque $j=1$, ψ_1 est appelé l'état fondamental. Enfin, nous définissons, pour $s\geq 0$, les espaces $H^s_{(0)}(0,1)=D(A^{\frac{s}{2}})$, munis de la norme

$$\|\varphi\|_{H^s_{(0)}} := \left(\sum_{j=1}^{+\infty}|j^s\langle\varphi,\varphi_j\rangle|^2\right)^{1/2}.$$

Remarquons que pour tout $\ell\in[\![1,r]\!]$, les opérateurs B_ℓ de multiplication par μ_ℓ dans $L^2(0,1)$ préservent $D(A)=H^2\cap H^1_0(0,1)$. Néanmoins, ce n'est pas le cas pour $H^3_{(0)}(0,1)$. En effet, par définition,

$$H^3_{(0)}(0,1)=\{\varphi\in H^3(0,1);\ \varphi(0)=\varphi(1)=\varphi''(0)=\varphi''(1)=0\}.$$

De plus, pour tout $\varphi\in H^3_{(0)}(0,1)$,

$$(\mu_\ell\varphi)''\,|_{\{0,1\}}=\mu_\ell\varphi''|_{\{0,1\}}+2\mu_\ell'\varphi'|_{\{0,1\}}+\mu_\ell''\varphi|_{\{0,1\}}=2\mu_\ell'\varphi'|_{\{0,1\}}.$$

A priori, ce terme n'est pas nul. On peut donc espérer atteindre des cibles proches de l'état fondamental en norme $H^3_{(0)}(0,1)$ bien que l'espace des cibles atteignables soit d'intérieur vide pour la topologie de $D(A)$. Néanmoins, ceci complexifie l'obtention du caractère bien posé de l'équation (2.1.1) dans cet espace. Beauchard et Laurent le démontrent en 2010 dans [BL10] pour $r=1$ en mettant en évidence un phénomène de régularisation. Ce théorème a ensuite été généralisé par Bournissou dans [Bou23a] en 2022 afin d'obtenir le caractère bien posé de (2.1.1) pour $r=1$ dans un cadre plus général, faisant intervenir deux paramètres : le premier, m, est lié à la régularité des contrôles et le second, p, au nombre d'annulations au bord des dérivées impaires de la fonction μ_1. Voici une généralisation au cas de l'équation avec plusieurs contrôles scalaires.

Théorème 2.3.1 (Caractère bien posé)**.** *Soient $T>0$, $(p,m)\in\mathbb{N}^2$, $\mu_\ell\in H^{2(p+m)+3}((0,1),\mathbb{R})$ tel que $\mu_\ell^{(2k+1)}|_{\{0,1\}}=0$ pour $k\in[\![0,p-1]\!]$ et $\ell\in[\![1,r]\!]$, $u\in H^m_0((0,T),\mathbb{R})^r$, $\psi_0\in H^{2(p+m)+3}_{(0)}(0,1)$ et $f\in H^m_0\left((0,T),H^{2p+3}\cap H^{2p+1}_{(0)}(0,1)\right)$. Il existe une unique solution douce à l'équation (2.1.1) i.e. une fonction $\psi\in\mathcal{C}^m\left([0,T],H^{2p+3}_{(0)}(0,1)\right)$ telle que l'égalité suivante soit vérifiée dans $H^{2p+3}_{(0)}$ pour tout $t\in[0,T]$*

$$\psi(t)=e^{-iAt}\psi_0+i\int_0^t e^{-iA(t-s)}\left(\left(\sum_{\ell=1}^r u^\ell(s)\mu_\ell\right)\psi(s)+f(s)\right)\mathrm{d}s.$$

Les fonctions μ_ℓ seront supposées au minimum $H^3((0,1),\mathbb{R})$ dans tout le document.

2.4 Test linéaire

Commençons par définir précisément la notion de contrôlabilité qui va nous intéresser tout au long de cette thèse pour l'équation de Schrödinger. Il s'agit d'une adaptation à la dimension infinie de la Définition 1.1.2 introduite pour les systèmes de contrôle affine (1.1.1).

Définition 2.4.1. *Soient E_T une famille d'espaces vectoriels normés de fonctions définies sur $[0,T]$ pour $T>0$ et H un espace de Hilbert. L'équation de Schrödinger (2.1.1) est E-STLC dans H autour de l'état fondamental si pour tous $T, \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\psi_f \in \mathcal{S} \cap H$ vérifiant $\|\psi_f - \psi_1(T)\|_H < \delta$, il existe $u \in (E_T)^r \cap L^2((0,T),\mathbb{R})^r$ tel que $\|u\|_{E_T} \leq \varepsilon$ et $\psi(T; u, \varphi_1) = \psi_f$.*

Définition 2.4.2. *Avec les notations de la Définition 2.4.1, l'équation (2.1.1) est E-STLC autour de l'état fondamental s'il existe un espace de Hilbert H tel que (2.1.1) soit E-STLC dans H autour de l'état fondamental.*

Remarque 2.4.3. *Cette définition semble s'éloigner de la Définition 1.1.2. En effet, on n'étudie plus la E-STLC autour d'un équilibre mais d'une trajectoire. Quitte à remplacer l'opérateur A par $-\partial_x^2 - \lambda_1$, alors φ_1 est une solution libre (i.e. avec $u \equiv 0$) stationnaire de l'équation de Schrödinger $i\partial_t\psi(t,x) = -\partial_x^2\psi(t,x) - \lambda_1\psi(t,x) - u(t)\cdot\mu(x)\psi(t,x)$. On est donc ramené au cadre d'étude du Chapitre 1 (puisque l'équilibre ne dépend plus du temps).*

Dans [BL10], Beauchard et Laurent ont montré un résultat de L^2-STLC de l'équation de Schrödinger bilinéaire mono-contrôlée ($r=1$). Il a ensuite été étendu par Bournissou dans [Bou23a] selon le même modèle que celui présenté précédemment. Elle montre en particulier le résultat suivant, dont on énonce la généralisation au cas de r contrôles scalaires.

Théorème 2.4.4 (Test linéaire)**.** *Soient $(p,m) \in \mathbb{N}^2$ et $\mu_\ell \in H^{2(p+m)+3}((0,1),\mathbb{R})$ tels que $\mu_\ell^{(2k+1)}\big|_{\{0,1\}} = 0$ pour $k \in [\![0, p-1]\!]$ et $\ell \in [\![1, r]\!]$. Supposons que*

$$\exists C > 0,\ \forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{\ell=1}^{r} |\langle \mu_\ell \varphi_1, \varphi_j \rangle| \geq \frac{C}{j^{2p+3}}. \tag{2.4.1}$$

Alors, l'équation (2.1.1) est H_0^m-STLC dans $H_{(0)}^{2(p+m)+3}(0,1)$ autour de l'état fondamental.

La propriété

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{\ell=1}^{r} |\langle \mu_\ell \varphi_1, \varphi_j \rangle| > 0 \tag{2.4.2}$$

est une condition nécessaire à la contrôlabilité du système linéarisé autour de l'état fondamental. L'hypothèse plus forte (2.4.1) garantit que le système linéarisé est H_0^m-globalement contrôlable en temps petit dans $H_{(0)}^{2(p+m)+3}(0,1)$. On peut en effet résoudre le problème de moments associé à la contrôlabilité du système linéarisé. Une ouverture aux problèmes de moments est proposée en Appendice E. Ensuite, un phénomène de régularisation permet de montrer que l'application point-d'arrivée est de classe $\mathcal{C}^1$ entre les espaces suivants

$$\Theta_T : u \in H_0^m((0,T),\mathbb{R})^r \mapsto \psi(T; u, \varphi_1) \in H_{(0)}^{2(m+p)+3}(0,1) \cap \mathcal{S}.$$

Ainsi, en appliquant le théorème d'inversion locale, on obtient la contrôlabilité locale du système non linéaire (2.1.1). Le choix des espaces fonctionnels est déterminé par la contrôlabilité du système linéarisé : une fois que p et m sont fixés et que (2.4.1) est vérifiée, on doit alors travailler avec $\psi(T) \in H^{2(p+m)+3}_{(0)}(0,1)$. Il s'agit d'une généralisation à la dimension infinie du Théorème 1.4.9.

Remarque 2.4.5. *Si μ_ℓ satisfait les hypothèses du Théorème 2.4.4, alors des intégrations par parties donnent : pour tous $j,k \in \mathbb{N}^*$ distincts, pour tout $\ell \in [\![1,r]\!]$,*

$$\langle \mu_\ell \varphi_k, \varphi_j \rangle = \frac{4(-1)^p(p+1)k}{j^{2p+3}\pi^{2p+2}} \left((-1)^{j+k} \mu_\ell^{(2p+1)}(1) - \mu_\ell^{(2p+1)}(0) \right) + \underset{j\to+\infty}{o} \left(\frac{1}{j^{2p+3}} \right).$$

Ainsi, l'hypothèse (2.4.1) empêche $\mu_\ell^{(2p+1)}$ de s'annuler au bord. Ceci assure donc que l'opérateur B_ℓ de multiplication par μ_ℓ dans $L^2(0,1)$ ne stabilise pas $H^{2p+3}_{(0)}(0,1)$. On contourne ainsi l'obstruction à la contrôlabilité soulevée par le Théorème 2.2.1.

Remarque 2.4.6. *L'utilisation de ces techniques pour la dimension supérieure semble compromise. En effet, la résolution du problème de moments associé à la contrôlabilité du système linéarisé est possible sous une condition de gap asymptotique des valeurs propres de l'opérateur $(A, D(A))$. Celui-ci n'est pas vérifié en dimension $d \geq 3$.*

Cette stratégie a également été utilisée pour obtenir des résultats de contrôlabilité locale pour les équations de Schrödinger non linéaires, comme dans [DN25], ou pour les équations de Schrödinger couplées, comme dans [Mor14]. En greffant d'autres ingrédients à cette stratégie de base, la contrôlabilité exacte globale dans des espaces réguliers a été démontrée pour différents modèles dans [MN13 ; NN12]. Le test linéaire a également été utilisé pour montrer la contrôlabilité locale en temps petit d'autres EDP, par exemple dans [Ros97] pour l'équation de Korteweg–de Vries (KdV) sous certaines hypothèses.

2.5 Utilisation d'une « power series expansion »

Si le système linéarisé n'est pas contrôlable, on peut s'intéresser aux termes d'ordre quadratique, cubique, *etc* du développement de la solution. Cette méthode, appelée « power series expansion », est présentée dans [Cor07, Chapitre 8] pour des systèmes en dimension finie.

2.5.1 L'exemple historique de l'équation de KdV

Historiquement, la première adaptation d'une « power series expansion » à la dimension infinie répond à l'étude de la contrôlabilité d'une équation de KdV. Dans [Ros97], Rosier étudie l'équation posée sur un intervalle $(0, L)$ avec des conditions de Dirichlet et un contrôle agissant sur la dérivée de la solution en $x = L$. Il prouve que, si L n'appartient pas à l'ensemble de longueurs critiques $\mathcal{N} := \left\{ 2\pi\sqrt{\frac{k^2+l^2+kl}{3}};\ k,l \in \mathbb{N}^* \right\}$, le système linéarisé autour de zéro est contrôlable. Il obtient ainsi la contrôlabilité locale du système non linéaire. Au contraire, si $L \in \mathcal{N}$, Rosier prouve que le système linéarisé n'est pas contrôlable ; il existe un espace de dimension finie de cibles $\mathcal{M}$ non atteignables au niveau linéaire. Par la suite, l'étude de l'équation non linéaire dans le cadre des longueurs critiques a fait l'objet de nombreuses contributions faisant intervenir une « power series expansion ».

- Coron et Crépeau utilisent une « power series expansion » à l'ordre 3 (l'ordre 2 étant nul) dans [CC04] afin d'obtenir la STLC de l'équation lorsque $k = l$.

- Cerpa obtient dans [Cer07] la contrôlabilité de l'équation en **temps long**, pour des longueurs critiques vérifiant $\dim(\mathcal{M}) = 2$, grâce à une « power series expansion » de la solution à l'ordre 2.
- Cerpa et Crépeau obtiennent la contrôlabilité en **temps long** de toutes les longueurs critiques dans [CC09] à l'aide de techniques similaires.

On pourra consulter l'article de synthèse [Cer14] de Cerpa pour plus de précisions sur ces résultats.

- Coron, Koenig et Nguyen prouvent dans [CKN22] une obstruction à la STLC pour les longueurs critiques vérifiant $2k + l \notin 3\mathbb{N}^*$, à l'aide d'une « power series expansion » à l'ordre 2.
- Finalement, Niu et Xiang ont récemment montré dans [NX25] une obstruction à la STLC pour les longueurs critiques restantes, *i.e.* vérifiant $2k + l \in 3\mathbb{N}^*$ et $k \neq l$, en utilisant à nouveau un développement quadratique de la solution.

Cette méthode a également été utilisée pour l'étude de la STLC de l'équation de Schrödinger bilinéaire, dans le cas où $r = 1$. Décrivons en détails les différentes contributions.

2.5.2 Développement à l'ordre 2 de l'équation de Schrödinger bilinéaire

2.5.2.1 En temps long

Discutons en premier lieu des résultats utilisant un développement à l'ordre 2 de la solution en temps long. L'hypothèse (2.4.1) est centrale dans l'étude de la STLC du système linéarisé. Néanmoins, la contrôlabilité en temps long de l'équation a été démontrée sous des hypothèses plus faibles. En effet, Beauchard et Morancey ont montré dans [BM14] la contrôlabilité locale en temps long de l'équation de Schrödinger bilinéaire mono-contrôlée – *i.e.* (2.1.1) avec $r = 1$ – en supposant $\mu_1'(0) \pm \mu_1'(1) \neq 0$. Le développement de Taylor à l'ordre 2 de $u \mapsto \psi(T; u, \varphi_1)$ permet donc de montrer un résultat positif de contrôlabilité de l'équation de Schrödinger bilinéaire mono-contrôlée mais en temps long.

Remarque 2.5.1. *Cette condition n'est même pas nécessaire. En effet, Beauchard montre dans [Bea05] la contrôlabilité locale en temps long de la même équation dans le cas particulier du moment dipolaire $\mu_1(x) = x$.*

2.5.2.2 En temps petit

L'étude du terme d'ordre 2 met en évidence une obstruction à la STLC. Elle repose sur une inégalité de coercivité reliant la solution à une norme de Sobolev négative du contrôle, ce qui permet d'établir plusieurs résultats. Dans [Cor06], Coron montre une obstruction à la L^∞-STLC pour l'équation (2.1.1) avec $r = 1$ et $\mu_1(x) = x - \frac{1}{2}$ grâce au terme quadratique. Il nie la contrôlabilité simultanée de la fonction d'onde de la particule, de la vitesse et de la position du puits de potentiel pour des contrôles petits en norme L^∞ en montrant une inégalité de coercivité faisant intervenir la norme H^{-1} du contrôle. Par la suite, Beauchard et Morancey généralisent cette obstruction dans [BM14] en donnant des conditions générales sur μ_1 permettant de créer une dérive dans le cas mono-contrôlé, avec un puits de potentiel fixe. Ils montrent une inégalité similaire pour nier la L^2-STLC. Voici l'énoncé précis.

Théorème 2.5.2. *Soient $K \in \mathbb{N}^*$ et $\mu_1 \in H^3((0,1),\mathbb{R})$ tels que*

$$\langle \mu_1\varphi_1, \varphi_K\rangle = 0 \quad et \quad A_K := \left\langle (\mu_1')^2 \varphi_1, \varphi_K \right\rangle \neq 0. \tag{2.5.1}$$

Alors, l'équation de Schrödinger mono-contrôlée (2.1.1) (avec $r = 1$) n'est pas L^2-STLC.

Remarque 2.5.3. *À la différence du Théorème 2.2.1, cette obstruction n'est pas de nature topologique puisqu'elle se visualise géométriquement : les trajectoires évoluent d'un côté d'une hypersurface.*

Cet énoncé peut être interprété comme une généralisation à une EDP de la condition nécessaire de L^∞-STLC de Sussmann – voir Théorème 1.5.7. En effet, si on identifie formellement (2.1.1) à un système affine de la forme (1.1.1) avec $r = 1$ (où les fonctions f_ℓ ne sont désormais plus des champs de vecteurs mais des opérateurs), alors, les conditions (2.5.1) se réécrivent $\varphi_K \notin S_1(f)(0)$ et $[f_1,[f_1,f_0]](\varphi_1) \notin S_1(f)(0)$. Lorsque cette obstruction n'a pas lieu *i.e.* si $[f_1,[f_1,f_0]](0) \in S_1(f)(0)$, on peut s'intéresser à l'obstruction quadratique suivante – voir Chapitre 1. Dans [Bou23b], Bournissou s'intéresse à l'ensemble des dérives quadratiques entières de l'équation de Schrödinger bilinéaire à un contrôle scalaire – (2.1.1) avec $r = 1$ – et montre, sous un jeu d'hypothèses sur le moment dipolaire, une inégalité de coercivité impliquant la norme H^{-n} du contrôle, permettant d'obtenir une obstruction à la H^{2n-3}-STLC. Il s'agit d'une adaptation à une EDP du Théorème 1.5.10 dans le cas où $m = 2k - 3$. Dans [BMP25], Beauchard, Marbach et Perrin montrent un résultat d'obstruction pour l'équation de Schrödinger bilinéaire mono-contrôlée avec condition au bord de Neumann. Pour obtenir l'inégalité de coercivité en norme H^{-1} du contrôle et nier la L^2-STLC, ils pallient un manque de régularité du noyau par des manipulations sur sa transformée de Fourier.

Remarque 2.5.4. *Des obstructions quadratiques liées à une inégalité de coercivité ont aussi été prouvées sur d'autres EDP. En voici quelques exemples.*

- *Dans [Mar18], Marbach étudie une équation de Burgers et obtient une propriété de coercivité impliquant la norme $H^{-\frac{5}{4}}$ du contrôle, ce qui lui permet de nier la L^2-STLC. C'est la première fois qu'une obstruction quadratique est quantifiée par une norme de Sobolev non entière.*
- *Beauchard et Marbach montrent dans [BM20] des inégalités de coercivité faisant intervenir la norme H^{-s} du contrôle avec $s > 0$ non nécessairement entier pour des équations paraboliques avec des non linéarités spécifiques.*
- *Pour KdV – voir Section 2.5.1.*

2.5.3 Développement à l'ordre 3 de l'équation de Schrödinger bilinéaire

Dans [Bou24], Bournissou s'intéresse à une compétition non linéaire entre les termes d'ordre 2 et 3. Elle propose un cadre fonctionnel permettant de tirer profit du terme cubique malgré la présence du terme quadratique. Ceci conduit à un résultat positif de STLC pour l'équation de Schrödinger bilinéaire mono-contrôlée. Il s'agit d'une généralisation à une EDP d'un cas particulier de la condition $\mathcal{S}(\theta)$ de Sussmann – voir Théorème 1.5.5.

2.6 Contrôle approché

Les premiers résultats de contrôlabilité approchée globale des équations de Schrödinger bilinéaires ont été obtenus en temps long – voir par exemple [MS10 ; Ner10]. Dans [Cha+08 ; EP09 ; Bos+12], les auteurs établissent la contrôlabilité approchée globale en s'appuyant sur une méthode propre à la dimension finie. En effet, leur preuve repose sur l'application de méthodes de la théorie du contrôle des EDO aux approximations de Galerkin – c'est-à-dire à des projections du système sur des sous-espaces de dimension finie – et sur une estimation de l'erreur entre ces approximations et la solution de l'EDP.

Pour certains systèmes, un temps grand est en effet nécessaire pour assurer la contrôlabilité approchée – voir [BCT14 ; BCT18]. La contrôlabilité approchée en temps petit entre états propres pour les équations de Schrödinger sur le tore a été démontrée par Duca et Nersesyan dans [DN21], au moyen d'un argument de saturation. Des résultats connexes ont ensuite été établis dans [CP23 ; BLBS24 ; DP24]. En 2024, Beauchard et Pozzoli ont fourni les premiers exemples d'équations de Schrödinger bilinéaires globalement approximativement contrôlables en temps petit dans [BP24] – un exemple d'EDP conservative globalement approximativement contrôlable en temps petit a été proposé dans [BCC12] en 2012. Il convient de noter que dans les travaux [CP23 ; BP24 ; DP24], les crochets de Lie sont un outil central.

Deuxième partie

Présentation des résultats obtenus

CHAPITRE 3

RÉSULTAT POSITIF DE STLC DE L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER GRÂCE À UN TERME QUADRATIQUE

RÉSUMÉ. Le but de ce chapitre est de présenter le résultat principal de [Ghe25b] et des heuristiques de preuve. Nous insisterons sur son lien avec la dimension finie.

Dans ce chapitre, on se focalise sur le cas des systèmes à deux contrôles scalaires – $r = 2$ – tant pour l'équation de Schrödinger bilinéaire que pour les systèmes affines. Pour la dimension finie, on notera

$$x'(t) = f_0(x(t)) + u(t)f_1(x(t)) + v(t)f_2(x(t)). \tag{3.0.1}$$

Pour des systèmes affines de la forme (3.0.1), des conditions nécessaires et des conditions suffisantes de E-STLC sont connues – voir Chapitre 1. Néanmoins, les démonstrations de ces résultats semblent souvent propres à la dimension finie et difficiles à transposer sur des EDP. On aimerait trouver des techniques de preuve qui s'adaptent plus facilement au cadre de la dimension infinie des EDP. Nous verrons que la formule de représentation de l'état d'une EDO de type Magnus présentée dans le Chapitre 1, Théorème 1.6.17 et Corollaire 1.6.18, fournit une première réponse à cette question.

3.1 Résultat principal de [Ghe25b]

On étudie l'équation de Schrödinger bilinéaire à deux contrôles scalaires – *i.e.* l'équation (2.1.1) avec $r = 2$ – suivante

$$\begin{cases} i\partial_t \psi(t,x) = -\partial_x^2 \psi(t,x) - (u(t)\mu_1(x) + v(t)\mu_2(x))\,\psi(t,x), & t \in (0,T), x \in (0,1), \\ \psi(t,0) = \psi(t,1) = 0, & t \in (0,T), \\ \psi(0,x) = \psi_0(x), & x \in (0,1). \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Nous nous intéressons au cas où le système linéarisé autour de l'état fondamental – voir (3.3.2) – n'est pas contrôlable. Ainsi on considère $K \geq 2$ un entier et on suppose

$$(\mathbf{H})_{\mathbf{lin,K,1}} : \quad \langle \mu_1 \varphi_1, \varphi_K \rangle = \langle \mu_2 \varphi_1, \varphi_K \rangle = 0.$$

Le système linéarisé perd alors une direction complexe $\langle \psi(t;(u,v),\varphi_1), \varphi_K \rangle \in \mathbb{C}$. Autrement dit, le terme d'ordre 1 du développement de Taylor en $(0,0)$ de $(u,v) \mapsto \langle \psi(t;(u,v),\varphi_1), \varphi_K \rangle$ est nul. Soient $p, m \in \mathbb{N}$ des entiers. Nous supposons également que les autres directions sont contrôlables au niveau linéaire selon le cadre fonctionnel habituel, *i.e.*

$$(\mathbf{H})_{\mathbf{reg}} : \quad \mu_\ell \in H^{2(p+m)+3}((0,1),\mathbb{R}) \text{ et } \mu_\ell^{(2k+1)}\big|_{\{0,1\}} = 0 \text{ pour } 0 \leq k \leq p-1,\ \ell \in \{1,2\},$$

$$(\mathbf{H})_{\mathbf{lin,K,2}} : \quad \text{il existe } C > 0 \text{ tel que } \forall j \in \mathbb{N}^* \setminus \{K\},\ \left\| (\langle \mu_\ell \varphi_1, \varphi_j \rangle)_{1 \leq \ell \leq 2} \right\| \geq \frac{C}{j^{2p+3}}.$$

Ces hypothèses sont dictées par l'étude du système linéarisé – voir Théorème 2.4.4. Pour contrôler la solution de (3.1.1) dans la direction perdue au linéaire, on utilise une « power series expansion » à l'ordre 2, *i.e.* le terme d'ordre 2 du développement de Taylor en $(0,0)$ de $(u,v) \mapsto \langle \psi(t;(u,v),\varphi_1), \varphi_K \rangle$. Donnons à présent les hypothèses liées aux termes quadratiques. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que les égalités suivantes sont vérifiées :

$(\mathbf{H})_{\mathbf{quad,K,1}}$: $\forall k \in [\![1, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor]\!]$,

$$A_k^1 := (-1)^{k-1} \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\lambda_j - \frac{\lambda_1 + \lambda_K}{2} \right) (\lambda_K - \lambda_j)^{k-1} (\lambda_j - \lambda_1)^{k-1} c_j = 0,$$

$(\mathbf{H})_{\mathbf{quad,K,2}}$: $\forall k \in [\![1, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor]\!]$,

$$A_k^2 := (-1)^{k-1} \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\lambda_j - \frac{\lambda_1 + \lambda_K}{2} \right) (\lambda_K - \lambda_j)^{k-1} (\lambda_j - \lambda_1)^{k-1} \tilde{c_j} = 0,$$

$(\mathbf{H})_{\mathbf{quad,K,3}}$: $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\gamma_k := \sum_{j=1}^{+\infty} \left((\lambda_K - \lambda_j)^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} (\lambda_j - \lambda_1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} d_j - (\lambda_K - \lambda_j)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (\lambda_j - \lambda_1)^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} \tilde{d_j} \right) = 0,$$

$(\mathbf{H})_{\mathbf{quad,K,4}}$:

$$\gamma_n := \sum_{j=1}^{+\infty} \left((\lambda_K - \lambda_j)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (\lambda_j - \lambda_1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} d_j - (\lambda_K - \lambda_j)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (\lambda_j - \lambda_1)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \tilde{d_j} \right) \neq 0,$$

où, pour tout $j \geq 1$,

$$c_j := \langle \mu_1 \varphi_1, \varphi_j \rangle \langle \mu_1 \varphi_j, \varphi_K \rangle, \qquad d_j := \langle \mu_2 \varphi_1, \varphi_j \rangle \langle \mu_1 \varphi_j, \varphi_K \rangle,$$
$$\tilde{c_j} := \langle \mu_2 \varphi_1, \varphi_j \rangle \langle \mu_2 \varphi_j, \varphi_K \rangle, \qquad \tilde{d_j} := \langle \mu_1 \varphi_1, \varphi_j \rangle \langle \mu_2 \varphi_j, \varphi_K \rangle.$$

En utilisant $(\mathbf{H})_{\mathbf{reg}}$ et des intégrations par parties, on montre l'estimation suivante : pour tous $j, k \in \mathbb{N}^*$ distincts, pour tout $\ell \in \{1, 2\}$,

$$\langle \mu_\ell \varphi_k, \varphi_j \rangle = \frac{4(-1)^p (p+1) k}{j^{2p+3} \pi^{2p+2}} \left((-1)^{j+k} \mu_\ell^{(2p+1)}(1) - \mu_\ell^{(2p+1)}(0) \right) + \underset{j \to +\infty}{o} \left(\frac{1}{j^{2p+3}} \right). \tag{3.1.2}$$

Remarque 3.1.1. *L'hypothèse $(\mathbf{H})_{\mathbf{lin,K,2}}$ et l'estimation (3.1.2) assurent qu'au moins une des deux fonction $\mu_1^{(2p+1)}$, $\mu_2^{(2p+1)}$ ne s'annule pas au bord. On contourne ainsi l'obstruction de Ball, Marsden et Slemrod – voir Théorème 2.2.1.*

Remarque 3.1.2. *L'estimation asymptotique (3.1.2) et l'hypothèse $n \leq 2p+2$ garantissent que toutes les séries écrites dans $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad,K,1}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad,K,2}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad,K,3}}$ et $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad,K,4}}$ sont absolument convergentes. En effet, pour tout $\eta \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left(|c_j| + |\tilde{c_j}| + |d_j| + |\tilde{d_j}| \right) j^{4\eta} \leq C \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^{4p+6-4\eta}},$$

qui converge si $p+1 \geq \eta$. En particulier, si $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq p$, toutes les séries définies précédemment et $A^1_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$, $A^2_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$ et γ_{n+1} sont également convergentes (hypothèse technique).

Remarque 3.1.3. *L'entier m est associé à la régularité des contrôles, l'entier p à l'annulation au bord des dérivées d'ordre impair de μ_1, μ_2 et l'entier n au terme quadratique γ_n utilisé.*

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de [Ghe25b].

Théorème 3.1.4. *Soient $p, m, K \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$ avec $K \geq 2$ et $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq p$. Supposons que μ_1, μ_2 satisfont les hypothèses $(\mathbf{H})_{\mathbf{reg}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{lin,K,1}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{lin,K,2}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad,K,1}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad,K,2}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad,K,3}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad,K,4}}$ et $\langle \mu_1 \varphi_1, \varphi_1 \rangle \neq 0$. Alors, l'équation de Schrödinger bilinéaire (3.1.1) est H^m_0-STLC dans $H^{2(p+m)+3}_{(0)}(0,1)$ autour de l'état fondamental.*

L'existence de fonctions μ_1, μ_2 satisfaisant les hypothèses $(\mathbf{H})_{\mathbf{reg}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{lin,K,1}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{lin,K,2}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad,K,1}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad,K,2}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad,K,3}}$ et $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad,K,4}}$ est démontrée en Section 6.4.1.

Remarque 3.1.5. *En particulier, si $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$, alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'équation de Schrödinger bilinéaire (3.1.1) est H^m_0-STLC dans $H^{2(p+m)+3}_{(0)}(0,1)$ autour de l'état fondamental lorsque $(\mathbf{H})_{\mathbf{reg}}$ est vérifiée.*

À la différence de l'équation mono-contrôlée traitée par Bournissou dans [Bou23b], le terme quadratique seul permet de retrouver la direction perdue au niveau linéaire, en temps petit.

Remarque 3.1.6. *Afin de garantir la comptabilité des hypothèses, il est nécessaire de supposer $K \geq 2$. En effet, l'hypothèse $\mathbf{(H)_{lin,K=1,2}}$ assure que $\max(A_k^1, A_k^2) > 0$ pour tout $k \in [\![1, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor]\!]$. Ainsi, au moins une des deux hypothèses $\mathbf{(H)_{quad,K=1,1}}$, $\mathbf{(H)_{quad,K=1,2}}$ n'est pas vérifiée.*

3.2 Comparaison avec la dimension finie et heuristique

3.2.1 Interprétation des hypothèses en termes de crochet de Lie

Commençons par généraliser la Définition 1.3.3 aux crochets de Lie itérés d'opérateurs.

Définition 3.2.1. *Soient A et B des opérateurs. On définit par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ (sous réserve de compatibilité des domaines) l'opérateur $\underline{\mathrm{ad}}_A^k(B)$ comme suit :*

$$\underline{\mathrm{ad}}_A^0(B) := B \quad \textit{et} \quad \underline{\mathrm{ad}}_A^{k+1}(B) := \underline{\mathrm{ad}}_A^k(B)A - A\underline{\mathrm{ad}}_A^k(B).$$

Sous des relations appropriées entre les paramètres n et p, les hypothèses $\mathbf{(H)_{quad,K,1}}$, $\mathbf{(H)_{quad,K,2}}$, $\mathbf{(H)_{quad,K,3}}$ et $\mathbf{(H)_{quad,K,4}}$ peuvent être interprétées en termes de crochet de Lie. Plus précisément,

$$\forall k = 1, \cdots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \qquad 2A_k^1 = (-1)^k \left\langle [\underline{\mathrm{ad}}_A^{k-1}(B_1), \underline{\mathrm{ad}}_A^k(B_1)]\varphi_1, \varphi_K \right\rangle, \tag{3.2.1}$$

$$\forall k = 1, \cdots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \qquad 2A_k^2 = (-1)^k \left\langle [\underline{\mathrm{ad}}_A^{k-1}(B_2), \underline{\mathrm{ad}}_A^k(B_2)]\varphi_1, \varphi_K \right\rangle, \tag{3.2.2}$$

$$\forall k = 0, \cdots, n, \qquad \gamma_k = (-1)^k \left\langle [\underline{\mathrm{ad}}_A^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}(B_1), \underline{\mathrm{ad}}_A^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}(B_2)]\varphi_1, \varphi_K \right\rangle, \tag{3.2.3}$$

où A est défini en (2.3.1) et B_ℓ et l'opérateur de multiplication par μ_ℓ dans $L^2(0,1)$, pour $\ell \in \{1, 2\}$. On renvoie le lecteur intéressé aux Propositions B.1.2, B.1.3, B.2.2 et B.2.3, en Appendice B, pour une preuve.

Pour l'équation de Schrödinger bilinéaire mono-contrôlée, le crochet de Lie $2A_k^\ell$ est connu pour être une obstruction à la contrôlabilité locale en temps petit, dans un cadre fonctionnel approprié – voir [Bou23b]. Les crochets de Lie $(\gamma_k)_{0 \leq k \leq n}$ sont spécifiques à l'équation multi-contrôlée (3.1.1), notre résultat positif repose sur l'utilisation de γ_n.

3.2.2 Lien avec la condition suffisante de L^∞-STLC $\mathcal{S}(\theta)$ de Sussmann

On renvoie le lecteur au Chapitre 1 pour les notations et définitions liées à l'étude de la STLC des systèmes affines utilisées dans cette section. Notre but est à présent d'interpréter le Théorème 3.1.4 comme une extension à la dimension infinie du théorème suivant.

Théorème 3.2.2. *Soient $d, L \in \mathbb{N}^*$ et f_0, f_1, f_2 des champs de vecteurs analytiques sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$ tels que $f_0(0) = 0$. Supposons que $r := \dim(S_1(f)(0)) < d$ et qu'il existe $b_{r+1}, \cdots, b_d \in \mathcal{B}_{2,good}$ tels que $\max_{i \in [\![r+1,d]\!]} |b_i| = L$ et*

$$S_1(f)(0) \oplus \mathit{Span}(f_{b_{r+1}}(0), \cdots, f_{b_d}(0)) = \mathbb{R}^d. \tag{3.2.4}$$

Supposons que

$$\text{pour tout } b \in \mathcal{B}_{2,bad} \text{ tel que } |b| \leq L, \quad f_b(0) \in S_1(f)(0). \tag{3.2.5}$$

Alors, le système de contrôle affine (3.0.1) *est* $W_0^{m,\infty}$*-STLC, pour tout* $m \in \mathbb{N}$.

Remarque 3.2.3. *Le cas* $r = d$ *correspond au test linéaire – voir Théorème* 1.4.9.

Remarque 3.2.4. *L'hypothèse* (3.2.4) *correspond à la LARC – voir Théorème* 1.3.6 *– mais uniquement avec de « bons » crochets.*

Le Théorème 3.2.2 est un corollaire de la condition $\mathcal{S}(\theta)$ de Sussmann – voir Théorème 1.5.5 et Section 6.4.2. Nous en proposons une autre démonstration reposant sur la formule de représentation de l'état de type Magnus. L'avantage de cette stratégie alternative de preuve est qu'elle peut s'adapter aux EDP, en dimension infinie.

Exemple 3.2.5. *On considère le système suivant*

$$\begin{cases} x_1' &= u \\ x_2' &= x_1 v \end{cases}.$$

On a $f_{M_0^1}(0) = e_1$ *et* $f_{C_0}(0) = e_2$. *Ainsi, la LARC* (3.2.4) *est vérifiée avec* $r = 1$, $d = 2$ *et* $b_2 = C_0$. *Puisque* $\{b \in \mathcal{B}_{2,bad},\ |b| \leq |C_0|\} = \emptyset$, *le système est* $W_0^{m,\infty}$*-STLC, pour tout* $m \in \mathbb{N}$.

Contre-exemple 3.2.6. *Le Théorème* 3.2.2 *donne une condition suffisante pour la contrôlabilité locale en temps petit. Elle n'est cependant pas nécessaire. Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Considérons le système*

$$\begin{cases} x_1' &= u \\ x_2' &= v \\ x_3' &= x_1^2 + x_2^2 + \alpha x_1 x_2 \end{cases}. \tag{3.2.6}$$

On a $S_1(f)(0) = Span(e_1, e_2)$ *et* $f_{C_1}(0) = \alpha e_3$. *En conséquence, la LARC* (3.2.4) *est vérifiée. De plus,* $f_{W_1^1}(0) = 2e_3 \notin S_1(f)(0)$ *et* $|W_1^1| = |C_1|$. *Ainsi, l'hypothèse* (3.2.5) *n'est pas satisfaite. Cependant, si* $|\alpha| > 2$, *on peut montrer que le système est* $W_0^{m,\infty}$*-STLC, pour tout entier* $m \in \mathbb{N}$. *Ce théorème étudie la direction des crochets de Lie mais pas leur amplitude.*

On peut interpréter (3.1.1) comme un système affine de la forme (3.0.1) avec $f_0 = A$, où l'opérateur A est défini en (2.3.1) et $f_\ell = B_\ell$ pour $\ell \in \{1, 2\}$, où B_ℓ est l'opérateur de multiplication par μ_ℓ dans $L^2(0,1)$. L'équilibre du système n'est plus 0 mais la trajectoire libre $\psi(\cdot; 0, \varphi_1)$. Nous pouvons observer une forte similitude entre les hypothèses des Théorèmes 3.1.4 et 3.2.2.

- L'hypothèse $(\mathbf{H})_{\mathbf{lin,K,2}}$ assure – voir Théorèmes 2.4.4 et 6.2.8 – que le système linéarisé de (3.1.1) est H_0^m-STLC dans $H_{(0)}^{2(p+m)+3}(0,1)$ autour de l'état fondamental en projection sur

$$\mathcal{H} := \overline{\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left(\varphi_j,\ j \in \mathbb{N}^* \setminus \{K\}\right)}. \tag{3.2.7}$$

  L'espace $\mathcal{H}$ est l'équivalent de $S_1(f)(0)$ en dimension finie. Puisque $(\varphi_j)_{j\geq 1}$ est une base hilbertienne de $L^2(0,1)$, la direction complexe φ_K engendre un supplémentaire de $\mathcal{H}$. De plus, l'interprétation de $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad,K,4}}$ en termes de crochet de Lie (3.2.3) assure que φ_K est « associée » au crochet $\mathfrak{b} := (-1)^n \left[\underline{\mathrm{ad}}_A^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}(B_1), \underline{\mathrm{ad}}_A^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(B_2)\right]$. C'est l'équivalent du crochet

$C_n \in \mathcal{B}_{2,good}$. Par conséquent, la LARC (3.2.4) est vérifiée. L'hypothèse $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad},\mathbf{K},\mathbf{3}}$ correspond à la recherche du crochet de longueur minimale ayant une composante non nulle dans la direction perdue φ_K.

- De plus, $\{b \in \mathcal{B}_{2,bad},\ |b| \leq |\mathfrak{b}|\} = \left\{W_k^\ell;\ k \in [\![1, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor]\!],\ \ell \in \{1,2\}\right\}$. L'hypothèse (3.2.5) requiert donc que ces crochets soient dans $S_1(f)(0)$. En utilisant (3.2.1), (3.2.2) et en remarquant que $\mathcal{H} = \mathrm{Vect}(\varphi_k)^\perp$, on reconnaît les hypothèses $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad},\mathbf{K},\mathbf{1}}$ et $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad},\mathbf{K},\mathbf{2}}$.

Les hypothèses $(\mathbf{H})_{\mathbf{reg}}$ et $(\mathbf{H})_{\mathbf{lin},\mathbf{K},\mathbf{1}}$ sont respectivement liées au caractère bien posé de (3.1.1) et inhérent au cadre fixé.

3.2.3 Heuristique de preuve

Le Théorème 3.2.2 repose sur la formule de représentation de l'état de type Magnus donnée par le Corollaire 1.6.18. Même si celle-ci n'est pas vérifiée dans sa généralité par l'état de l'équation de Schrödinger, on peut extraire les mêmes termes dominants de la dynamique – voir Proposition 6.3.1 – et obtenir le développement quadratique dans la direction perdue φ_K suivant

$$-i \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} A_k^1 \int_0^T u_k^2(t)\mathrm{d}t - i \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} A_k^2 \int_0^T v_k^2(t)\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n} i^k \gamma_k \int_0^T u_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}(t) v_{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}(t)\mathrm{d}t. \tag{3.2.8}$$

Rappelons que les fonctions u_k désignent les primitives itérées de u s'annulant en 0 – voir Définition 1.6.20. Les expressions des coordonnées de type pseudo-premier (1.6.15), (1.6.16) et les égalités (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3) soulignent cette analogie. Les hypothèses d'annulation $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad},\mathbf{K},\mathbf{1}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad},\mathbf{K},\mathbf{2}}$ et $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad},\mathbf{K},\mathbf{3}}$ mènent à l'expression suivante :

$$i^n \gamma_n \int_0^T u_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}(t) v_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}(t)\mathrm{d}t. \tag{3.2.9}$$

Finalement, l'hypothèse $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad},\mathbf{K},\mathbf{4}}$ permet de tirer profit du terme non signé (3.2.9).

3.3 Stratégie de preuve

Le but de cette section est de présenter une esquisse de la preuve du Théorème 3.1.4. Elle est entièrement rédigée dans le Chapitre 6.

3.3.1 Caractère bien posé de l'équation de Schrödinger bilinéaire (3.1.1)

Lorsque μ_1, μ_2 vérifient la condition $(\mathbf{H})_{\mathbf{reg}}$, le caractère bien posé de l'équation (3.1.1) est connu – voir Théorème 2.3.1. Le cadre fonctionnel est le suivant : $u, v \in H_0^m(0,T)$, $\psi_0 \in H_{(0)}^{2(p+m)+3}(0,1)$ et $\psi \in \mathcal{C}^m\left([0,T], H_{(0)}^{2p+3}(0,1)\right)$.

3.3.2 Méthode des vecteurs tangents

Pour démontrer ce résultat, nous utilisons une méthode de type « vecteur tangent », présentée par Kawski dans [Kaw00]. En voici les grandes étapes :

- on montre que les directions perdues au niveau linéaire sont des « vecteurs tangents » grâce à des contrôles oscillants,

- on conclut à l'aide d'un processus itératif à la contrôlabilité du système.

Néanmoins, à cause du coût de contrôlabilité, la deuxième étape de cette stratégie s'adapte difficilement aux EDP. Bournissou a alors développé dans [Bou24] une nouvelle notion de vecteur tangent, qui permet de réaliser la seconde étape à l'aide du théorème du point fixe de Brouwer. Ce contournement permet une meilleure adaptation aux EDP. L'utilisation du théorème du point fixe de Brouwer fait néanmoins apparaître une première limitation : ce théorème ne s'applique que pour un nombre fini de directions perdues au niveau linéaire. Cette stratégie est résumée dans un énoncé qui sera utilisé comme « boîte noire » dans ce travail. Rappelons-le ici.

Définition 3.3.1 (Concaténation)**.** *Soient* $0 < T_1 < T_2$, $u : [0,T_1] \to \mathbb{R}$ *et* $\tilde{u} : [0,T_2] \to \mathbb{R}$. *On définit la fonction* $u\#\tilde{u} : [0,T_1+T_2] \to \mathbb{R}$ *par*

$$u\#\tilde{u} := u\mathbb{1}_{(0,T_1)} + \tilde{u}(\cdot - T_1)\mathbb{1}_{(T_1,T_1+T_2)}.$$

Soient X un espace de Banach réel, E_T une famille d'espaces vectoriels normés de fonctions sur $[0,T]$ pour $T>0$. Supposons que, pour tous $T_1, T_2 > 0$, pour tous $u \in E_{T_1}$, $\tilde{u} \in E_{T_2}$, on a $u\#\tilde{u} \in E_{T_1+T_2}$ et l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\|u\#\tilde{u}\|_{E_{T_1+T_2}} \leq \|u\|_{E_{T_1}} + \|\tilde{u}\|_{E_{T_2}}.$$

Finalement, considérons $(\mathcal{F}_T)_{T>0} : X \times E_T \to X$, une famille de fonctions. On peut penser à $\mathcal{F}_T$ comme l'application point d'arrivée d'une équation donnée, avec pour argument la condition initiale et les contrôles scalaires ; l'espace E_T est ici un espace produit. Le but est de démontrer que $\mathcal{F}_T$ est localement surjective à partir de 0, ce qui correspond exactement à la définition de E-STLC. Pour ce faire, nous utilisons la définition de vecteur tangent suivante.

Définition 3.3.2. *[Vecteur approximativement continûment atteignable en temps petit] Un vecteur* $\xi \in X$ *est dit approximativement continûment atteignable en temps petit s'il existe une fonction continue* $\Xi : [0,+\infty[\to X$ *vérifiant* $\Xi(0) = \xi$ *telle que, pour tout* $T > 0$, *il existe* $C, \rho, s > 0$ *et une application continue* $z \in (-\rho,\rho) \mapsto u_z \in E_T$ *tels que*

$$\forall z \in (-\rho,\rho), \qquad \|\mathcal{F}_T(0,u_z) - z\Xi(T)\|_X \leq C|z|^{1+s} \qquad \text{avec} \qquad \|u_z\|_{E_T} \leq C|z|^s.$$

Remarque 3.3.3. *Cette définition requiert de la continuité : cela provient de l'utilisation du théorème du point fixe de Brouwer. La notion de vecteur tangent utilisée en dimension finie dans [Kaw00] est la suivante :* $\xi \in X$ *est un vecteur tangent d'ordre* m *s'il existe une famille* $(u_T)_{T>0}$ *de contrôles vérifiant* $x(T;u_T) = T^m\xi + \underset{T\to 0}{o}(T^m)$. *Cette définition est moins adaptée aux EDP.*

Le théorème suivant est une adaptation de [Kaw00, Corollary 2.5] au cadre donné. Il permet d'obtenir un résultat plus général (la version de Kawski se limite à la L^∞-STLC).

Théorème 3.3.4. *Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées.*

(A_1) *Pour tout* $T > 0$, $\mathcal{F}_T : X \times E_T \to X$ *est une fonction de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur un voisinage de* $(0,0)$ *avec* $\mathcal{F}_T(0,0) = 0$.

(A_2) *Pour tout* $x \in X$, $T \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mathrm{d}\mathcal{F}_T(0,0)\cdot(x,0) \in X$ *peut être continûment étendue à 0 avec* $\mathrm{d}\mathcal{F}_0(0,0)\cdot(x,0) = x$.

(A_3) *Pour tous* $T_1, T_2 > 0$, *pour tout* $x \in X$, *pour tous* $u \in E_{T_1}$ *et* $v \in E_{T_2}$,

$$\mathcal{F}_{T_1+T_2}(x, u\#v) = \mathcal{F}_{T_2}(\mathcal{F}_{T_1}(x,u), v).$$

(A_4) *L'espace* $H := \mathrm{Im}(\mathrm{d}\mathcal{F}_T(0,0)\cdot(0,\cdot))$ *ne dépend pas du temps, est fermé et de codimension finie* n.

(A_5) *Il existe* $\mathcal{M}$, *un supplémentaire de* H *qui admet une base* $(\xi_i)_{1\leq i\leq n}$ *de vecteurs approximativement continûment atteignables en temps petit.*

Alors, pour tout $T > 0$, $\mathcal{F}_T$ *est localement surjective en* 0 *: pour tout* $\eta > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que, pour tout* $x_f \in X$ *avec* $\|x_f\|_X < \delta$, *il existe* $u \in E_T$ *vérifiant* $\|u\|_{E_T} < \eta$ *tel que*

$$\mathcal{F}_T(0,u) = x_f.$$

Ce théorème sera utilisé en boîte noire et peut être interprété de la manière suivante : si le système **perd un nombre fini de directions au linéaire** ((A_4) : l'espace H contrôlable au niveau linéaire est de codimension finie) et que **l'on sait faire bouger le système dans ces directions de manière « sympathique »** ((A_5) : H admet un supplémentaire $\mathcal{M}$ ayant pour base une famille de vecteurs $(\xi_i)_{1\leq i\leq n}$ approximativement continûment atteignables en temps petit), alors, en les combinant, on peut faire bouger le système localement dans toutes les directions d'une base de X et atteindre une boule : c'est la STLC. Cela étant possible avec des contrôles petits dans l'espace E_T, on obtient la E-STLC. Les hypothèses (A_1), (A_2) et (A_3) sont liées aux propriétés de régularité et de semi-groupe de l'équation.

Remarque 3.3.5. *Dans la démonstration du Théorème 3.2.2, on prouve en fait plus précisément le résultat suivant : soient* $d, L \in \mathbb{N}^*$ *et* f_0, f_1, f_2 *des champs de vecteurs analytiques sur un voisinage de* 0 *dans* $\mathbb{R}^d$ *tels que* $f_0(0) = 0$. *Supposons que* $r := \dim(S_1(f)(0)) < d$ *et qu'il existe* $b_{r+1}, \cdots, b_d \in \mathcal{B}_{2,good}$ *tels que* $\max_{i\in[\![r+1,d]\!]} |b_i| = L$. *Soit* $j \in [\![r+1, d]\!]$. *Supposons que* (3.2.4) *soit vérifiée et que*

$$\text{pour tout } b \in \mathcal{B}_{2,bad} \text{ tel que } |b| \leq |b_j|, \quad f_b(0) \in S_1(f)(0). \tag{3.3.1}$$

Alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$, *le vecteur* $f_{b_j}(0)$ *est* $W_0^{m,\infty}-$*approximativement continûment atteignable en temps petit.*

3.3.3 Développements linéaire et quadratique de la solution

La stratégie repose sur l'utilisation d'une « power series expansion » d'ordre 2, *i.e.* un développement de Taylor à l'ordre 2 en $(0,0)$ de l'application $(u,v) \mapsto \psi(T; (u,v), \varphi_1)$. Soient $u, v \in H_0^m(0,T)$ deux contrôles.

- Le terme du premier ordre $\Psi \in \mathcal{C}^m\left([0,T], H^{2p+3}_{(0)}(0,1)\right)$ est la solution du système linéarisé de l'équation (3.1.1) autour de la trajectoire libre $(\psi_1, (u,v) \equiv 0)$, *i.e.*

$$\begin{cases} i\partial_t \Psi(t,x) = -\partial_x^2 \Psi(t,x) - (u(t)\mu_1(x) + v(t)\mu_2(x))\psi_1(t,x), & t \in (0,T), x \in (0,1), \\ \Psi(t,0) = \Psi(t,1) = 0, & t \in (0,T), \\ \Psi(0,x) = 0, & x \in (0,1). \end{cases} \tag{3.3.2}$$

En utilisant la formule de Duhamel, la solution est donnée par : $\forall t \in [0,T]$,

$$\Psi(t) = i\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\langle \mu_1\varphi_1, \varphi_j\rangle \int_0^t u(s)e^{i\omega_j s}\mathrm{d}s + \langle \mu_2\varphi_1, \varphi_j\rangle \int_0^t v(s)e^{i\omega_j s}\mathrm{d}s\right)\psi_j(t). \tag{3.3.3}$$

Ainsi, l'hypothèse $(\mathbf{H})_{\mathbf{lin,K,1}}$ affirme que le premier terme du développement de Taylor est nul dans la direction φ_K, *i.e.* $\langle \Psi(T), \varphi_K\rangle = 0$.

- Le terme d'ordre 2, noté $\xi \in \mathcal{C}^m\left([0,T], H^{2p+3}_{(0)}(0,1)\right)$, est la solution du système suivant

$$\begin{cases} i\partial_t \xi(t,x) = -\partial_x^2\xi(t,x) - (u(t)\mu_1(x) + v(t)\mu_2(x))\Psi(t,x), & t\in(0,T), x\in(0,1),\\ \xi(t,0) = \xi(t,1) = 0, & t \in (0,T),\\ \xi(0,x) = 0, & x\in(0,1). \end{cases}$$

L'idée sous-jacente est que $\psi(T;(u,v),\varphi_1) \simeq \psi_1(T) + \Psi(T) + \xi(T)$. Afin de légitimer cette approximation, on montre l'estimation suivante dans le Lemme 6.2.7 : lorsque $\|(u,v)\|_{L^2} \to 0$,

$$\|\psi(\cdot;(u,v),\varphi_1) - \psi_1 - \Psi - \xi\|_{L^\infty\left((0,T),H^{2p+3}_{(0)}\right)} = \mathcal{O}\left(\|(u,v)\|^3_{L^2(0,T)}\right). \tag{3.3.4}$$

Ainsi, par orthogonalité, (3.3.3), (3.3.4) et $(\mathbf{H})_{\mathbf{lin,K,1}}$, on obtient, lorsque $\|(u,v)\|_{L^2} \to 0$,

$$\langle \psi(T;(u,v),\varphi_1), \psi_K(T)\rangle = 0 + 0 + \langle \xi(T), \psi_K(T)\rangle + \mathcal{O}\left(\|(u,v)\|^3_{L^2(0,T)}\right). \tag{3.3.5}$$

Finalement, on montre avec des manipulations sur les formules qui donnent l'expression de $\xi(T)$ que l'heuristique présentée en section précédente est conforme – voir Proposition 6.3.1 – *i.e.*

$$\langle \xi(T), \psi_K(T)\rangle \simeq i^n\gamma_n \int_0^T u_{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor+1}(t)v_{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}(t)e^{i\omega_K t}\mathrm{d}t. \tag{3.3.6}$$

3.3.4 Application du Théorème 3.3.4 de STLC

Il suffit de montrer que les directions φ_K et $i\varphi_K$ sont approximativement continûment atteignables en temps petit. On pourra alors appliquer le Théorème 3.3.4. La stratégie de preuve est répartie en trois étapes.

Étape 1 - mouvement selon $i^n\varphi_K$: on montre plus précisément en Proposition 6.3.8 l'existence d'une fonction $z \in \mathbb{R} \mapsto (U_z, V_z) \in H^m_0(0,T)^2$ et de réels $s_n, \rho > 0$ tels que

$$\forall z \in (-\rho,\rho), \qquad \|\psi(T;(U_z,V_z),\varphi_1) - \psi_1(T) - i^n z\psi_K(T)\|_{H^{2(p+m)+3}_{(0)}} \leq C|z|^{1+\frac{1}{5}s_n}. \tag{3.3.7}$$

Pour cela, on reprend la méthode utilisée par Bournissou dans [Bou24] et on montre l'estimation souhaitée en deux étapes. Soient $0 < T_1 < T$.

a) Dans la première étape, on commence par construire une application $z \in \mathbb{R} \mapsto (u_z, v_z) \in H^m_0(0,T_1)^2$ vérifiant

$$\forall z \in (-\rho,\rho), \qquad |\langle \psi(T_1;(u_z,v_z),\varphi_1), \psi_K(T_1)\rangle - i^n z| \leq C|z|^{1+s_n}.$$

Pour cela, on considère des contrôles de la forme

$$u_z, v_z : t \in [0, T_1] \mapsto \operatorname{sgn}(z)|z|^{\alpha_n} \bar{u}^{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)} \left(\frac{t}{|z|^{s_n}} \right), |z|^{\alpha_n} \bar{v}^{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)} \left(\frac{t}{|z|^{s_n}} \right),$$

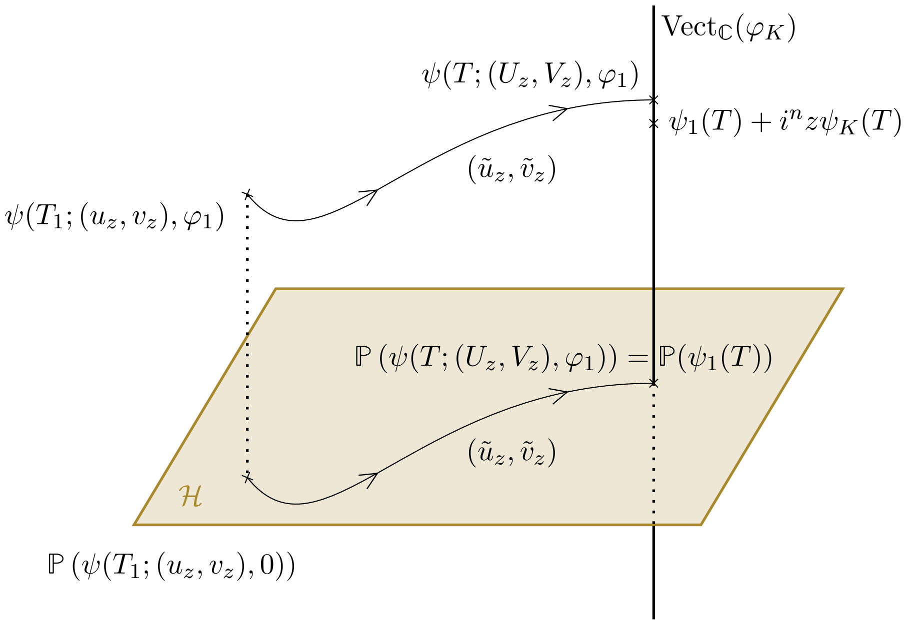
avec $\bar{u}, \bar{v} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $\operatorname{Supp}(\bar{u}), \operatorname{Supp}(\bar{v}) \subset (0,1)$, $\displaystyle\int_0^1 \bar{u}\bar{v}^{(2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 - n)} = \frac{1}{\gamma_n}$ et α_n, s_n des réels bien choisis. Le développement donné par (3.3.5) et (3.3.6) conduit au résultat. Le support compact des fonctions permet d'annuler les termes de bord des intégrations par parties. Durant cette première étape, les composantes linéaires ont évolué, *a priori* de manière arbitraire. Il faut donc les corriger. C'est le but de l'étape suivante.

b) On utilise le théorème de contrôle en projection démontrée dans [Bou23a] – voir Théorème 6.2.8 – pour prescrire les composantes de la solution selon $\mathcal{H}$, en l'instant T. Notons $\mathbb{P}$ la projection orthogonale sur $\mathcal{H}$. On obtient alors, au moyen de contrôles $(\tilde{u}_z, \tilde{v}_z)$, la relation suivante : $\mathbb{P}\left(\psi(T; (U_z, V_z), \varphi_1)\right) = \mathbb{P}(\psi_1(T))$ avec $U_z := u_z \# \tilde{u}_z$ et $V_z := v_z \# \tilde{v}_z$.

   Afin d'obtenir la relation annoncée en (3.3.7), il suffit de s'intéresser à l'impact de cette manipulation sur le travail effectué en étape a), *i.e.* $|\langle \psi(T; (U_z, V_z), \varphi_1), \psi_K(T) \rangle - i^n z|$. Par inégalité triangulaire, on a immédiatement :

$$\begin{aligned} |\langle \psi(T; (U_z, V_z), \varphi_1), \psi_K(T) \rangle - i^n z| &\leq |\langle \psi(T_1; (u_z, v_z), \varphi_1), \psi_K(T_1) \rangle - i^n z| \\ &+ |\langle \psi(T; (U_z, V_z), \varphi_1), \psi_K(T) \rangle - \langle \psi(T_1; (u_z, v_z), \varphi_1), \psi_K(T_1) \rangle| . \end{aligned}$$

   Le premier terme est estimé par l'étape a). Le lemme 6.3.6 estime le second. Ainsi, $i^n \varphi_K$ est un vecteur approximativement continûment atteignable en temps petit.



Étape 2 - mouvement selon $i^{n+1}\varphi_K$ ***:*** on montre plus précisément en Proposition 6.3.9 l'existence d'une fonction $z \in \mathbb{R} \mapsto (U_z, V_z) \in H_0^m(0,T)^2$ et de réels $s_n, \rho > 0$ tels que

$$\forall z \in (-\rho, \rho), \qquad \|\psi(T; (U_z, V_z), \varphi_1) - \psi_1(T) - i^n z \psi_K(T)\|_{H_{(0)}^{2(p+m)+3}} \leq C|z|^{1+\frac{1}{5}s_n}.$$

Le mouvement selon $i^{n+1}\varphi_K$ se déduit de celui selon $i^n\varphi_K$. Pour cela, on utilise une astuce introduite par Kawski dans [HH87], mise en œuvre sur l'équation de Schrödinger dans [Bou24] et expliquée en détail en Appendice D. Si $(u_\alpha, v_\alpha)_\alpha$ est la famille de contrôles associée au caractère approximativement continûment atteignable en temps petit du vecteur $i^n\varphi_K$, on montre l'existence de $C > 0$ tel que, pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, assez petits,

$$\left\|\psi(3T; (u_{\alpha,\beta}, v_{\alpha,\beta}), \varphi_1) - \psi_1(3T) - i^n\left(\beta e^{2i\omega_K T} + \alpha\right)\psi_K(3T)\right\|_{H^{2(p+m)+3}_{(0)}} \leq C|(\alpha, \beta)|^{1+\frac{1}{5}s_n},$$

avec $u_{\alpha,\beta} = u_\alpha \# 0_{[0,T]} \# u_\beta$ et $v_{\alpha,\beta} = v_\alpha \# 0_{[0,T]} \# v_\beta$. Ainsi, pour $T \in \left(0, \frac{\pi}{2\omega_K}\right)$ et $z \in (-\rho, \rho)$, en prenant $\beta = \frac{z}{\sin(2\omega_K T)}$ et $\alpha = -\beta\cos(2\omega_k T)$, on obtient l'estimation souhaitée.

Étape 3 - application du Théorème 3.3.4 : on montre que l'équation (3.1.1) vérifie les hypothèses du Théorème 3.3.4 avec $X = H^{2(p+m)+3}_{(0)}(0,1)$ et $E_T = H^m_0(0,T)^2$. On obtient alors le résultat : (3.1.1) est H^m_0-STLC dans $H^{2(p+m)+3}_{(0)}(0,1)$ autour de l'état fondamental souhaité.

3.4 Perspectives et problèmes ouverts

3.4.1 Raffiner l'hypothèse du Théorème 3.2.2

Reprenons le Théorème 3.2.2. Cet énoncé donne une condition suffisante de STLC pour des systèmes affines. Il requiert la compensation de tous les « *mauvais* » crochets « courts » par des crochets de $\mathcal{B}_1$ – voir (3.2.5). On pourrait se demander si l'on peut relaxer cette hypothèse en

$$\text{pour tout } b \in \mathcal{B}_{2,bad} \text{ tel que } |b| \leq L, \quad f_b(0) \in S_1(f)(0) + \mathcal{B}_{2,good}(f)(0).$$

Contre-exemple 3.4.1. *La réponse est non. En effet, considérons le système suivant :*

$$\begin{cases} x_1' &= u \\ x_2' &= v \\ x_3' &= x_1^2 + 2x_2^2 + \dfrac{3}{2}x_1x_2 \end{cases}.$$

On a les égalités suivantes $S_1(f)(0) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, $f_{C_1}(0) = \frac{3}{2}e_3$, $f_{W_1^1}(0) = 2e_3$ *et* $f_{W_1^2}(0) = 4e_3$. *Ainsi, la LARC (3.2.4) est vérifiée. De plus,* $\{b \in \mathcal{B}_{2,bad},\ |b| \leq |C_1|\} = \{W_1^1, W_1^2\}$. *Ces crochets sont compensés dans* $\mathcal{B}_{2,good}$ *car* $f_{W_1^1}(0) = \frac{4}{3}f_{C_1}(0)$ *et* $f_{W_1^2}(0) = \frac{8}{3}f_{C_1}(0)$. *Néanmoins, puisque* $x_3' = \left(x_1 + \dfrac{3}{4}x_2\right)^2 + \dfrac{23}{16}x_2^2 \geq 0$, *ce système n'est pas* L^∞*-STLC.*

Comme on le verra dans le chapitre suivant, si l'on souhaite raffiner ce résultat, il ne faut non plus seulement s'intéresser à la direction des vecteurs, mais également à leur **amplitude**. De manière plus générale, on suppose que la LARC suivante est vérifiée :

$$\mathrm{Vect}(f_{b_1}(0), \cdots, f_{b_r}(0), f_{b_{r+1}}(0), f_{b_d}(0)) = \mathbb{R}^d, \tag{3.4.1}$$

avec $b_1, \cdots, b_r \in \mathcal{B}_1$, $b_{r+1}, \ldots, b_d \in \mathcal{B}_{2,good}$ et $L := \max_{i \in [\![r+1,d]\!]} |b_i|$. En utilisant (3.4.1), pour tout

$b \in \mathcal{B}_{2,bad}$ vérifiant $|b| \leq L$, il existe $\alpha_1^b, \cdots, \alpha_d^b \in \mathbb{R}$ tels que $f_b(0) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i^b f_{b_i}(0)$. Soit $\mathbb{P}$ la projection sur $S_1(f)(0)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\,(f_{b_i}(0))_{i \in [\![r+1,d]\!]}$. On a

$$\mathbb{P}\mathcal{Z}_2(T; f, (u,v))(0) = \sum_{i=r+1}^{d} \left(\eta_{b_i}(T,(u,v)) + \sum_{b \in \mathcal{B}_{2,bad},\ |b| \leq L} \alpha_i^b \eta_b(T,(u,v)) \right) f_{b_i}(0)$$
$$+ \sum_{\substack{b \in \mathcal{B}_{2,good}, |b| \leq L, \\ b \notin \{b_{r+1}, \cdots, b_d\}}} \eta_b(T,(u,v)) f_b(0) + \sum_{b \in \mathcal{B}_2,\ |b| > L} \eta_b(T,(u,v)) f_b(0).$$

La dernière somme ne pose pas de problème grâce à l'information sur la longueur du crochet – voir Proposition 6.1.3. Si l'on souhaite mimer la preuve de [Ghe25b], il faut réussir à résoudre le problème de moments suivants : soit $j \in [\![r+1, d]\!]$, il existe $\bar{u}, \bar{v} \in \mathcal{C}_c^\infty(0,1)$ tels que

$$\forall i \in [\![r+1, d]\!], \quad \eta_{b_i}(1,(\bar{u},\bar{v})) + \sum_{b \in \mathcal{B}_{2,bad},\ |b| \leq L} \alpha_i^b \eta_b(1,(\bar{u},\bar{v})) = \delta_{i,j},$$

$$\forall b \in \mathcal{B}_{2,good} \setminus \{b_{r+1}, \cdots, b_d\} \text{ tel que } |b| \leq L, \quad \eta_b(1,(\bar{u},\bar{v})) = 0.$$

Le terme en ocre est gênant. On aimerait l'interpréter comme une perturbation de $\eta_{b_i}(1,(\bar{u},\bar{v}))$, ce qui n'est pas le cas en général. Le cas où $\alpha_i^b = 0$ est traité en Proposition 6.1.1.

3.4.2 Adapter cette stratégie à d'autres équations

Beauchard et Marbach démontrent dans [BM20] des obstructions quadratiques à la H^{2n+2}-STLC pour l'équation de la chaleur mono-contrôlée, avec une non linéarité particulière. Ils utilisent le développement quadratique de la solution et montrent que ce dernier induit une dérive quantifiée en norme H^{-n} du contrôle. Leur approche repose sur une adaptation aux EDP d'un résultat d'obstruction bien connu pour les EDO, basé sur l'étude des crochets de Lie. Dans l'esprit de leur travail et de celui présenté dans ce chapitre, il est naturel de se demander si une extension similaire pourrait être envisagée pour une équation de la chaleur non linéaire avec plusieurs contrôles.

3.4.3 Récupérer une infinité de directions perdues au linéaire

Pour des systèmes de réaction-diffusion ou pour l'équation de KdV, une infinité de directions sont perdues au linéaire dans certains régimes. Dans l'objectif d'obtenir un résultat positif de contrôlabilité, il faudrait être en mesure de généraliser le Théorème 3.3.4 introduit par Bournissou. En effet, l'hypothèse (A_4) est restrictive, puisqu'elle exige que l'ensemble des directions perdues au niveau linéaire soit de codimension finie. Dans la démonstration, cette limitation se manifeste par l'utilisation du Théorème de point fixe de Brouwer. Peut-on généraliser le Théorème 3.3.4 lorsque l'espace des cibles atteignables au linéaire n'est pas de codimension finie ?

CHAPITRE 4

OBSTRUCTIONS QUADRATIQUES À LA STLC DES SYSTÈMES AFFINES À DEUX CONTRÔLES

RÉSUMÉ. Le but de ce chapitre est de présenter le résultat principal de [Ghe24], ainsi que des heuristiques de preuve.

L'étude des obstructions à la contrôlabilité locale en temps petit des systèmes affines (1.1.1) en dimension finie est riche dans la littérature dans le cas des systèmes mono-contrôlés, *i.e.* vérifiant $r = 1$. La plupart de ces résultats reposent sur une inégalité de coercivité. Nous renvoyons le lecteur intéressé au Chapitre 1 pour la présentation de quelques-uns de ces énoncés et des définitions algébriques liées à l'étude des systèmes affines. Dans ce chapitre, on se focalise sur le cas des systèmes affines (3.0.1) à deux contrôles – $r = 2$ – et on propose une nouvelle condition nécessaire de STLC. Une généralisation du résultat principal de ce chapitre au cas des systèmes à r contrôles est donnée en Appendice F.

4.1 Étude de systèmes jouets

Le but de cette première section est d'étudier deux exemples de systèmes affines à deux contrôles. Ce sont des prototypes qui contiennent l'essence des théorèmes principaux de ce chapitre. Ils serviront ensuite de modèle pour l'étude générale des obstructions à la STLC de (3.0.1) qui sera menée dans les sections suivantes.

Exemple 4.1.1. *On revient sur le Contre-exemple 3.2.6. Rappelons que $S_1(f)(0) = Vect(e_1, e_2)$, $f_{W_1^1}(0) = f_{W_1^2}(0) = 2e_3$ et $f_{C_1}(0) = \alpha e_3$. La troisième coordonnée est donc associée à une compétition entre différents crochets : W_1^1, W_1^2 et C_1. On identifie alors deux « mauvais » crochets ($W_1^1, W_1^2 \in \mathcal{B}_{2,bad}$) et un « bon » crochet ($C_1 \in \mathcal{B}_{2,good}$). Le but étant d'obtenir un résultat négatif de STLC, on définit alors un cadre dans lequel les « mauvais crochets gagnent sur le bon crochet ». Remarquons premièrement que, si $|\alpha| \leq 2$, i.e. si les « mauvais » crochets ont une amplitude assez forte, on obtient*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \qquad x_1^2 + \alpha x_1 x_2 + x_2^2 \geq \frac{2-|\alpha|}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) \geq 0.$$

Ainsi, $x_3' \geq 0$ et le système (3.2.6) n'est pas L^∞-STLC puisque toute cible de $\{x \in \mathbb{R}^3;\ x_3 < 0\}$ n'est pas atteignable. A contrario, on peut montrer que si $|\alpha| > 2$, i.e. si le « bon » crochet C_1 a une amplitude assez forte, le système est $W_0^{m,\infty}$-STLC, quel que soit $m \in \mathbb{N}$. En effet, on peut considérer $u : s \in (0,t) \mapsto \varphi'(\frac{s}{t})$ et $v : s \in (0,t) \mapsto \psi'(\frac{s}{t})$ avec $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c^\infty((0,1), \mathbb{R})$. Si $\psi \equiv 0$, l'état du système « bouge » selon $+e_3$. Si $\varphi = -\frac{\alpha}{2}\psi$, l'état du système « bouge » selon $-e_3$, puisque

$$z(t) = -\frac{\alpha^2-4}{4}t^3\int_0^1 \psi^2.$$

*Contrairement à l'étude menée dans les Chapitres 3 et 6, on ne s'intéresse désormais plus seulement à la direction des crochets mais également à **leur amplitude**.*

Exemple 4.1.2. *On considère maintenant le système suivant*

$$\begin{cases} x_1' &=& u \\ x_2' &=& x_1 \\ x_3' &=& v \\ x_4' &=& \left(x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_3 + 2x_3^2\right) - 2vx_3 - x_2^2 - vx_1^2 \end{cases}. \tag{4.1.1}$$

Soit $T > 0$. Remarquons que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^2$, pour tous $u, v \in L^1(0,T)$,

$$x^2 + \frac{1}{2}xy + 2y^2 \geq \frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{4}y^2 \geq \frac{3}{4}\left(x^2 + y^2\right), \tag{4.1.2}$$

$$\left|\int_0^T \left(\int_0^t u_1\right)^2 \mathrm{d}t\right| \leq \int_0^T \|u_1\|_{L^2(0,t)}^2 t\mathrm{d}t \leq \frac{T^2}{2}\|u_1\|_{L^2(0,T)}^2, \tag{4.1.3}$$

$$\left|\int_0^T vu_1^2\right| \leq \|v\|_{L^\infty(0,T)}\|u_1\|_{L^2(0,T)}^2 \leq \|(u,v)\|_{L^\infty(0,T)}\|(u_1,v_1)\|_{L^2(0,T)}^2. \tag{4.1.4}$$

En utilisant (4.1.2), (4.1.3) et (4.1.4), une intégration explicite de la solution issue de 0 *amène à*

$$\begin{aligned} x_4(T) &= \int_0^T \left(u_1^2 + \frac{1}{2}u_1v_1 + 2v_1^2\right) - v_1(T)^2 - \int_0^T \left(\int_0^t u_1\right)^2 \mathrm{d}t - \int_0^T vu_1^2 \\ &\geq \left(\frac{3}{4} - \frac{T^2}{2} - \|(u,v)\|_{L^\infty(0,T)}\right) \|(u_1,v_1)\|_{L^2(0,T)}^2 - v_1(T)^2 \\ &\geq C \|(u_1,v_1)\|_{L^2(0,T)}^2 - v_1(T)^2, \end{aligned}$$

pour tout $C \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$, pour des temps T petits et des contrôles petits dans L^∞. À première vue, le terme $-v_1(T)^2$ peut être gênant : il empêche d'obtenir une quantité signée et n'est pas négligeable devant $\|(u_1,v_1)\|_{L^2(0,T)}^2$ en général. Néanmoins, il faut se rappeler que c'est un terme qui est issu de la dynamique ; en effet $x_3(T) = v_1(T)$. Par conséquent, toute cible de $\{x \in \mathbb{R}^4;\ x_4 + x_3^2 < 0\}$ n'est pas atteignable, donc le système (4.1.1) n'est pas L^∞-STLC.

4.2 Résultat principal de [Ghe24]

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 4.2.1. *Soient f_0, f_1, f_2 des champs de vecteurs analytiques sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$ tels que $f_0(0) = 0$. Soient $k, m \in \mathbb{N}^*$. On définit l'entier*

$$\pi(k,m) := 1 + \left\lceil \frac{2k}{m} \right\rceil, \tag{4.2.1}$$

et l'ensemble

$$\mathcal{N}_k^m := S_{[\![1,\pi(k,m)]\!]\setminus\{2\}}(X) \cup \{C_{j,l};\ j \in [\![0, 2k-2]\!], l \in \mathbb{N}\} \cup \left\{W_{j,l}^1, W_{j,l}^2;\ j \in [\![1, k-1]\!], l \in \mathbb{N}\right\},$$

où le dernier ensemble du membre de droite est vide si $k = 1$. Soient $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d / \mathcal{N}_k^m(f)(0)$ la surjection canonique, $\tilde{e_1} := \sigma\left(f_{W_k^1}(0)\right)$, $\tilde{e_2} := \sigma\left(f_{W_k^2}(0)\right)$ et $\tilde{e_3} := \sigma\left(f_{C_{2k-1}}(0)\right)$. Si le système (3.0.1) est $W^{m,1}$-STLC, alors, une des conditions suivantes est vérifiée :

- *$\tilde{e_1} = 0$ ou $\tilde{e_2} = 0$,*
- *$(\tilde{e_1}, \tilde{e_2})$ est une famille libre et $\tilde{e_3} = a\tilde{e_1} + b\tilde{e_2}$ avec $ab \geq \frac{1}{4}$,*
- *$\tilde{e_2} \in \mathbb{R}_-^* \tilde{e_1}$,*
- *$\tilde{e_2} = \beta\tilde{e_1}$, $\tilde{e_3} = \gamma\tilde{e_1}$ avec $\beta \leq \gamma^2$ et $\beta \neq 0$.* [1]

Remarque 4.2.2. *Le paramètre k est associé à l'ordre de la dérive – voir Définition 4.3.1 – et m à la régularité des contrôles.*

Remarque 4.2.3. *Pour tous $m \in \mathbb{N}^*$, $p \in [1, +\infty]$, $t \in (0,1)$ et $u \in W^{m,p}(0,t)$, on a $\|u\|_{W^{m,1}} \leq \|u\|_{W^{m,p}}$. Nous avons donc plus généralement établi une condition nécessaire de $W^{m,p}$-STLC.*

4.2.1 Quelques exemples et contre-exemples

Exemple 4.2.4. *Dans un premier temps, reprenons l'étude de l'Exemple 4.1.1 via l'utilisation du Théorème 4.2.1. Rappelons qu'il s'agit d'un système de contrôle affine de la forme (3.0.1) qui*

1. Ce théorème est généralisé au cas de $r > 2$ contrôles scalaires en Appendice F, Théorème F.0.1.

satisfait $\mathcal{N}_1^m(f)(0) = Vect(e_1, e_2)$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f_{W_1^1}(0) = f_{W_1^2}(0) = 2e_3$ et $f_{C_1}(0) = \alpha e_3$. Soient $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3/\mathcal{N}_1^m(f)(0)$ la surjection canonique, $\tilde{e_1} := \sigma\left(f_{W_1^1}(0)\right)$, $\tilde{e_2} := \sigma\left(f_{W_1^2}(0)\right)$ et $\tilde{e_3} := \sigma\left(f_{C_1}(0)\right)$. Ainsi, $\tilde{e_1} = \tilde{e_2} = 2$ et $\tilde{e_3} = \alpha$. Les trois premiers points du Théorème 4.2.1 ne sont pas satisfaits. Le dernier point n'est pas vérifié si et seulement si $|\alpha| < 2$. Dans ce cas, la contraposée du Théorème 4.2.1 prouve que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, (3.2.6) n'est pas $W^{m,1}$-STLC.

Remarque 4.2.5. *L'utilisation des crochets de Lie formalise le fait qu'un sous-système de la forme (3.2.6) est caché, dans un certain sens, dans le système (3.0.1).*

Contre-exemple 4.2.6. *On fixe $k = 1$. Considérons le système*

$$\begin{cases} x_1' &= u \\ x_2' &= v \\ x_3' &= x_1 v + 1134 x_1^2 + 4876 x_2^2 \end{cases}.$$

Il vérifie $f_{W_1^1}(0) = 2268$, $f_{W_1^2}(0) = 9752$ et $f_{C_0}(0) = 1$. Il rentre dans le cadre d'étude du Chapitre 3. Le Théorème 3.2.2 assure que ce système est $W_0^{m,\infty}-$STLC, pour tout $m \in \mathbb{N}$. Le « mauvais » crochet W_1^1 n'empêche pas la contrôlabilité du système, c'est le « bon » crochet C_0 qui, malgré une amplitude plus faible, conclut à la $W_0^{m,\infty}-$STLC. Cet exemple accentue le fait qu'il est nécessaire de mettre C_0 dans l'ensemble $\mathcal{N}_1^m$. Considérons à présent le système suivant

$$\begin{cases} x_1' &= u \\ x_2' &= v \\ x_3' &= x_1 v \\ x_4' &= x_3 \\ x_5' &= \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_4 \end{cases}. \tag{4.2.2}$$

On a $S_1(f)(0) = Vect(e_1, e_2)$, $f_{C_0}(0) = e_3$, $f_{C_{0,1}}(0) = e_4$ et $f_{C_{0,2}}(0) = e_5$. Nous fixons $m \in \mathbb{N}$. Le but est de montrer que (4.2.2) est $W_0^{m,\infty}$-STLC.

- *Premièrement, $S_1(f)(0) \oplus Vect(f_{C_0}(0), f_{C_{0,1}}(0), f_{C_{0,2}}(0)) = \mathbb{R}^5$, avec $C_0, C_{0,1}, C_{0,2} \in \mathcal{B}_{2,good}$. Ainsi, la LARC (3.2.4) est vérifiée.*
- *De plus, $\{b \in \mathcal{B}_{2,bad},\ |b| \leq |C_0|\} = \emptyset$ donc (3.3.1) est vérifiée. Par la Remarque 3.3.5, $f_{C_0}(0)$ est $W_0^{m,\infty}-$approximativement continûment atteignable en temps petit.*
- *Puisque $f_{C_{0,1}}(0) = [f_{C_0}, f_0](0)$, on applique la Proposition D.0.1 pour en déduire que $f_{C_{0,1}}(0)$ est $W_0^{m,\infty}-$approximativement continûment atteignable en temps petit.*
- *De la même façon, on déduit que $f_{C_{0,2}}(0) = [f_{C_{0,1}}, f_0](0)$ est $W_0^{m,\infty}-$approximativement continûment atteignable en temps petit.*

On peut désormais appliquer le Théorème 3.3.4 pour en déduire que le système (4.2.2) est $W_0^{m,\infty}$-STLC. Cet exemple assure qu'il est nécessaire de mettre non seulement le crochet C_0 mais bien tous les crochets $C_{0,\nu}$ dans l'ensemble $\mathcal{N}_k^m$.

Contre-exemple 4.2.7. *La condition nécessaire de STLC donnée par le Théorème 4.2.1 n'est pas suffisante, i.e. il existe des systèmes qui ne sont pas $W^{m,1}$-STLC, mais qui vérifient au* *moins un des quatre points, pour un entier fixé $m \in \mathbb{N}^*$. Considérons e.g. le système suivant*

$$\begin{cases} x_1' &= u \\ x_2' &= v \\ x_3' &= x_1^4 + x_2^4 \end{cases}. \tag{4.2.3}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f_{W_k^1}(0) = 0$. Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, le système satisfait le premier point du Théorème 4.2.1. Cependant, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, ce système n'est pas $W^{m,1}$-STLC puisque $x_3' \geq 0$. Le Théorème 4.2.1 ne permet pas de conclure sur cet exemple puisque l'obstruction à la contrôlabilité est créée par des termes quartiques et non des termes quadratiques.

4.2.2 Une généralisation

Contre-exemple 4.2.8. *Un autre contre-exemple est donné par le système suivant*

$$\begin{cases} x_1' &= u \\ x_2' &= x_1 \\ x_3' &= v \\ x_4' &= x_2^2 + x_3^2 \end{cases}. \tag{4.2.4}$$

On a $f_{W_1^1}(0) = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $f_{W_k^2}(0) = 0$. Par conséquent, pour tous $k, m \in \mathbb{N}^*$, le premier point du Théorème 4.2.1 est vérifié. Néanmoins, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, le système n'est pas $W^{m,1}$-STLC puisque $x_4' \geq 0$. Ici, l'obstacle à la contrôlabilité est créé par les crochets W_2^1 et W_1^2. En effet, le Théorème 4.2.1 est modelé pour étudier des compétitions entre des crochets quadratiques associés à des contrôles de la même homogénéité en temps. Pour cette raison, nous prouvons une généralisation du Théorème 4.2.1 qui permet de s'intéresser à ce type de système.

Théorème 4.2.9. *Soient f_0, f_1, f_2 des champs de vecteurs analytiques sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$ tels que $f_0(0) = 0$. Soient $k, k', m, m' \in \mathbb{N}^*$ tels que $k' \leq k$. On rappelle que l'entier π est précisé en (4.2.1). On définit*

$$\begin{gathered} \mathcal{N}_{k,k'}^{m,m'} := S_{[\![1,\pi(k,m)]\!]\setminus\{2\}}(X) \cap S_{[\![0,\pi(k,m)]\!],[\![0,\pi(k',m')]\!]}(X) \\ \cup \{C_{j,l};\ j \in [\![0, k+k'-2]\!], l \in \mathbb{N}\} \cup \left\{W_{i,l}^1, W_{j,l}^2;\ (i,j) \in [\![1, k-1]\!] \times [\![1, k'-1]\!], l \in \mathbb{N}\right\}, \end{gathered}$$

où le dernier ensemble du membre de droite est vide si $k = 1$ ou $k' = 1$. Soient $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d / \mathcal{N}_{k,k'}^{m,m'}(f)(0)$ la surjection canonique et les vecteurs $\tilde{e_1} := \sigma\left(f_{W_k^1}(0)\right)$, $\tilde{e_2} := \sigma\left(f_{W_{k'}^2}(0)\right)$ et $\tilde{e_3} := \sigma\left(f_{C_{k+k'-1}}(0)\right)$. Si le système (3.0.1) is $W^{m,1} \times W^{m',1}$-STLC, alors, une des conditions suivantes est vérifiée :

- *$\tilde{e_1} = 0$ ou $\tilde{e_2} = 0$,*
- *$(\tilde{e_1}, \tilde{e_2})$ est une famille libre et $\tilde{e_3} = a\tilde{e_1} + b\tilde{e_2}$ avec $ab \geq \frac{1}{4}$,*
- *$\tilde{e_2} \in \mathbb{R}_-^* \tilde{e_1}$,*
- *$\tilde{e_2} = \beta\tilde{e_1}$, $\tilde{e_3} = \gamma\tilde{e_1}$ avec $\beta \leq \gamma^2$ et $\beta \neq 0$.*

Remarque 4.2.10. *Plus généralement, comme observé en Remarque 4.2.3, ce théorème donne une condition nécessaire de $W^{m,p} \times W^{m,p'}$-STLC, pour tous $p, p' \in [1, +\infty]$.*

Remarque 4.2.11. *Le cas où $k \leq k'$ peut être établi similairement. Avec $k = k'$, on retrouve le Théorème 4.2.1.*

Remarque 4.2.12. *Le Théorème 4.2.9 peut être utilisé pour étudier la STLC du système asymétrique (4.2.4) avec $k = 2$, $k' = 1$, $m, m' \in \mathbb{N}^*$. En effet, on a $\mathcal{N}_{k,k'}^{m,m'}(f)(0) = Span(e_1, e_2, e_3)$, $f_{W_2^1}(0) = f_{W_1^2}(0) = 2e_4$ et $f_{C_2}(0) = 0$. Ainsi, les quatre conditions données par le Théorème 4.2.9 ne sont pas vérifiées. Par contraposée, le système (4.2.4) n'est pas $W^{1,m} \times W^{1,m'}$–STLC.*

4.3 Stratégie de preuve

4.3.1 Notion de dérive

Afin d'exposer la stratégie de démonstration des Théorèmes 4.2.1 et 4.2.9 adoptée dans [Ghe24], nous avons besoin de définir la notion de dérive.

Définition 4.3.1 (Dérive)**.** *Soient $e \in \mathbb{R}^d$, $N \subset \mathbb{R}^d$ un sous-espace vectoriel, $m, m' \in \mathbb{N}^*$, $p, p' \in [1, +\infty]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\Delta : L^1((0,1), \mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}^+$. On dit que le système (3.0.1) admet une dérive selon e parallèlement à N avec force Δ lorsque $\left(t, t^\alpha \|(u,v)\|_{W^{m,p} \times W^{m',p'}}\right) \to 0$ s'il existe $C > 0$, $\beta > 1$ et $0 < \rho < 1$ tels que, pour tous $t \in (0, \rho)$ et $(u,v) \in W^{m,p}((0,t), \mathbb{R}) \times W^{m',p'}((0,t), \mathbb{R})$ avec $t^\alpha \|(u,v)\|_{W^{m,p} \times W^{m',p'}} \leq \rho$,*

$$\mathbb{P}x(t; (u,v)) \geq C\Delta(u,v) - C \|x(t; (u,v))\|^\beta, \tag{4.3.1}$$

où $\mathbb{P}$ est une forme linéaire satisfaisant $\mathbb{P}(e) > 0$ et $\mathbb{P}_{|N} \equiv 0$.

Lemme 4.3.2. *Avec les notations introduites en Définition 4.3.1, si le système (3.0.1) a une dérive selon e parallèlement à N avec force Δ lorsque $\left(t, t^\alpha \|(u,v)\|_{W^{m,p} \times W^{m',p'}}\right) \to 0$, alors, le système (3.0.1) n'est pas $W^{m,p} \times W^{m',p'}$-STLC.*

Démonstration. La solution $x(t; (u,v))$ ne peut pas atteindre des cibles de la forme $x_f = -ae$ avec $a > 0$ petit puisque ceci entraînerait l'inégalité suivante

$$-a\mathbb{P}(e) \geq C\Delta(u,v) - C \|x_f\|^\beta \geq -C \|e\|^\beta a^\beta,$$

ce qui est impossible pour a assez petit, car $\beta > 1$ et $\mathbb{P}(e) > 0$. □

4.3.2 Lien entre les conditions de crochets et la dérive

Le but de cette sous-section est de mieux comprendre les hypothèses des Théorèmes 4.2.1 et 4.2.9. Pour cela, nous avons besoin d'introduire la définition suivante.

Définition 4.3.3 (BC)**.** *Soient $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^d$ trois vecteurs et $N \subset \mathbb{R}^d$ un sous-espace vectoriel. On dit que e_1, e_2, e_3, N satisfont (BC) s'il existe une forme linéaire $\mathbb{P} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{P}_{|N} \equiv 0$ et $\mathbb{P}(e_3)^2 < \mathbb{P}(e_1)\mathbb{P}(e_2)$.*

Remarque 4.3.4. *Le nom (BC) est une abréviation et fait référence à « bracket condition ».*

Remarque 4.3.5. *L'hypothèse $\mathbb{P}(e_3)^2 < \mathbb{P}(e_1)\mathbb{P}(e_2)$ assure que $\mathbb{P}(e_1)$ et $\mathbb{P}(e_2)$ ont le même signe. Quitte à remplacer $\mathbb{P}$ par $-\mathbb{P}$, on peut supposer que $\mathbb{P}(e_1) > 0$ et $\mathbb{P}(e_2) > 0$. Ce sera implicitement le cas dans la suite lorsque l'on fera référence à la condition (BC).*

Lemme 4.3.6. *Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ et $q : (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{2}\alpha a_1^2 + \frac{1}{2}\beta a_2^2 + \gamma a_1 a_2 \in \mathbb{R}^d$. Alors, q est une forme quadratique définie positive ssi $\alpha > 0$ et $\gamma^2 < \alpha\beta$.*

Démonstration. Si q est définie positive, alors $q(1,0) = \frac{\alpha}{2} > 0$. De plus, $q(\cdot, 1)$ est un polynôme du second degré à valeurs strictement positives. Il vérifie donc $\Delta = \gamma^2 - \alpha\beta < 0$. Réciproquement, le résultat découle directement de l'égalité suivante : pour tous $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$,

$$q(a_1, a_2) = \frac{1}{2}\alpha \left(\left(a_1 + \frac{\gamma}{\alpha} a_2 \right)^2 + \frac{\alpha\beta - \gamma^2}{\alpha^2} a_2^2 \right).$$

□

Corollaire 4.3.7. *Soient $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^d$ trois vecteurs et $N \subset \mathbb{R}^d$ un sous-espace vectoriel. Soient $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d/N$ la surjection canonique et $q : (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{2}a_1^2 e_1 + \frac{1}{2}a_2^2 e_2 + a_1 a_2 e_3 \in \mathbb{R}^d$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

a) e_1, e_2, e_3, N satisfont (BC),

b) il existe une forme linéaire $\mathbb{P} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ telle que $N \subset \ker(\mathbb{P})$ et $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{P}(q(a_1, a_2)) \in \mathbb{R}$ est une forme quadratique définie positive,

c) il existe une forme linéaire $\tilde{\mathbb{P}} : \mathbb{R}^d/N \to \mathbb{R}$ telle que $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \tilde{\mathbb{P}}(\sigma(q(a_1, a_2))) \in \mathbb{R}$ est une forme quadratique définie positive.

Démonstration. $a) \Rightarrow b)$ Par le Lemme 4.3.6, la forme linéaire $\mathbb{P}$ donnée par (BC) convient. $b) \Rightarrow c)$ Soit $\mathbb{P}$ la forme linéaire donnée par $b)$. Par le lemme de factorisation des applications linéaires, il existe une unique forme linéaire $\tilde{\mathbb{P}} : \mathbb{R}^d/N \to \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{P} = \tilde{\mathbb{P}} \circ \sigma$. Celle-ci convient. $c) \Rightarrow a)$ Soit $\tilde{\mathbb{P}}$ la forme linéaire donnée par $c)$. Alors, par le Lemme 4.3.6, la forme linéaire $\mathbb{P} := \tilde{\mathbb{P}} \circ \sigma$ vérifie (BC). □

La proposition suivante fait le lien entre la condition (BC) et les hypothèses des Théorèmes 4.2.1 et 4.2.9 et est démontrée en Section 7.4.1. Dans cette section, on donne également des caractérisations équivalentes sur les vecteurs e_1, e_2, e_3 (géométrie affine) et non plus sur leur image dans le quotient $\mathbb{R}^2/N$.

Proposition 4.3.8. *Soient $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^d$ trois vecteurs et $N \subset \mathbb{R}^d$ un sous-espace vectoriel. Soient $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d/N$ la surjection canonique et $\tilde{e_i} := \sigma(e_i)$ pour $i \in [\![1, 3]\!]$. Alors, e_1, e_2, e_3, N ne satisfont pas (BC) ssi une des conditions suivantes est satisfaite*

- *$\tilde{e_1} = 0$ ou $\tilde{e_2} = 0$,*
- *$(\tilde{e_1}, \tilde{e_2})$ est une famille libre et $\tilde{e_3} = a\tilde{e_1} + b\tilde{e_2}$ avec $ab \geq \frac{1}{4}$,*
- *$\tilde{e_2} \in \mathbb{R}_-^* \tilde{e_1}$,*
- *$\tilde{e_2} = \beta\tilde{e_1}$, $\tilde{e_3} = \gamma\tilde{e_1}$ avec $\beta \leq \gamma^2$ et $\beta \neq 0$.*

4.3.3 Stratégie pour montrer une dérive

Nous démontrons les Théorèmes 4.2.1 et 4.2.9 par **contraposée** : on suppose que les quatre points du Théorème 4.2.1 ne sont pas vérifiés. Par la Proposition 4.3.8,

$$f_{W_k^1}(0), \quad f_{W_k^2}(0), \quad f_{C_{2k-1}}(0), \quad \mathcal{N}_k^m(f)(0) \quad \text{satisfont} \quad \text{(BC)}. \tag{4.3.2}$$

On montre que le système (3.0.1) n'est pas $W^{m,p} \times W^{m',p'}$-STLC. Le but est de démontrer le Théorème 4.2.1, comme conséquence de l'énoncé plus précis suivant.

Théorème 4.3.9. *Soient $k, m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [1, +\infty]$. Supposons que (4.3.2) est vérifiée. Alors, le système (3.0.1) admet une dérive selon $f_{W_k^1}(0)+f_{W_k^2}(0)$ parallèlement à $\mathcal{N}_k^m(f)(0)$ avec force Δ : $(u,v) \in L^1((0,1),\mathbb{R})^2 \mapsto \int_0^t \left(u_k^2 + v_k^2\right) \in \mathbb{R}^+$ quand $(t, t^\alpha \|(u,v)\|_{W^{m,p}}) \to 0$ où $\alpha = \frac{\pi(k,m)-2k}{\pi(k,m)-1}$.*

Remarque 4.3.10. *Par exemple, si $k \in \mathbb{N}^*$ et $m = 1$, $\alpha = \frac{1}{2k} > 0$. Ainsi, les contrôles u, v n'ont besoin que d'être bornés dans $W^{1,p}$.*

Remarque 4.3.11. *Les hypothèses ne dépendent pas de $p \in [1, +\infty]$.*

Si le Théorème 4.3.9 est prouvé, on obtient le Théorème 4.2.1 au moyen du Lemme 4.3.2. Une méthode générale pour montrer des dérives a été développée par Beauchard et Marbach dans [BM24] pour les systèmes mono-contrôlés. Elle repose sur la formule de représentation de l'état de type Magnus rappelée en Corollaire 1.6.18. Cette stratégie leur a notamment permis d'obtenir le Théorème 1.5.10 d'obstructions quadratiques à la STLC. Nous présentons ici une adaptation de cette méthode au cas des systèmes multi-contrôlés : fixons $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [1, +\infty]$. Soit $M \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $\mathfrak{b}_1 := W_k^1$, $\mathfrak{b}_2 := W_k^2$ et $\mathfrak{b}_3 := C_{2k-1}$, les crochets qui interviennent dans la compétition quadratique. On détermine l'ensemble $\mathcal{N}_k^m \subset \mathcal{B}_{[\![1,M]\!]} \setminus \{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3\}$ comme suit :

$$\forall b \in \mathcal{B}_{[\![1,M]\!]} \setminus \{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3\}, \quad (\forall i \in [\![1,3]\!],\ \xi_b \neq o(\xi_{\mathfrak{b}_i}) \text{ lorsque } (t, \|(u,v)\|_{W^{m,p}}) \to 0) \Rightarrow b \in \mathcal{N}_k^m.$$

Étape 1 - extraction de la partie dominante de $\mathcal{Z}_M(t; f, (u,v))(0)$: le Corollaire 1.6.18 donne une formule de représentation de l'état donc la partie principale est $\mathcal{Z}_M(t; f, (u,v))(0)$. Le but de cette étape est d'en extraire les termes dominants. Les éléments de $\mathcal{N}_k^m$ sont les crochets dont les fonctionnelles de second type ne sont pas négligeables en comparaison à celles de $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ et $\mathfrak{b}_3$. Puisqu'elles sont *a priori* « grandes », on décide de mettre ces éléments de côté. L'égalité $\mathbb{P}|_{\mathcal{N}_k^m(f)(0)} \equiv 0$, vérifiée par définition de (BC), répond à cette fonction. Dans le Lemme 7.2.1, on montre la relation suivante :

$$\mathbb{P}\mathcal{Z}_{\pi(k,m)}(t; f, (u,v))(0) = \sum_{r=1}^{3} \mathbb{P}\left(f_{\mathfrak{b}_r}(0)\right) \xi_{\mathfrak{b}_r}(t, (u,v)) + \mathcal{O}\left(t \|(u_k, v_k)\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{k} |u_i(t)|^2 + |v_i(t)|^2\right). \tag{4.3.3}$$

Pour ce faire, on utilise des estimations analytiques et on contrôle la série génératrice associée aux termes dits de « pollution », *i.e.* les $(\eta_b - \xi_b)_{b \in \mathcal{B}_{[\![1,M]\!]} \setminus \mathcal{N}_k^m}$. Nous y parvenons au moyen des Propositions 7.1.8 et 7.1.9. Cette étape est réalisée sur le système jouet (4.1.1) à travers l'équation (4.1.3).

Étape 2 - coercivité de la forme quadratique : on s'intéresse au premier terme du membre de droite de l'équation (4.3.3). On veut assurer sa coercivité. En utilisant les expressions des coordonnées de type pseudo-premier données par (1.6.15) et (1.6.16), on a

$$\Delta(u,v) := \sum_{i=1}^{3} \xi_{\mathfrak{b}_i}(t,(u,v))\mathbb{P}\left(f_{\mathfrak{b}_i}(0)\right) = \int_0^t \left(\frac{1}{2}\mathbb{P}\left(f_{\mathfrak{b}_1}(0)\right)u_k^2 + \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(f_{\mathfrak{b}_2}(0)\right)v_k^2 + \mathbb{P}\left(f_{\mathfrak{b}_3}(0)\right)u_k v_k\right).$$

En utilisant (BC) et le Corollaire 4.3.7, on obtient la propriété de coercivité puisque la forme quadratique est définie positive. Cette étape est réalisée sur l'exemple du système (4.1.1) par l'estimation (4.1.2).

Étape 3 - estimation des termes de bord $|(u_1,\cdots,u_k,v_1,\cdots,v_k)(t)|^2$ ***:*** on utilise le fait que ces termes sont issus de la dynamique pour les estimer. Rappelons que par (1.6.14), ce sont les coordonnées de second type associées aux crochets M_j^i, $j \in [\![0,k-1]\!]$, $i \in \{1,2\}$. On utilise alors à nouveau la formule de représentation de l'état de type Magnus avec $M' \in \mathbb{N}^*$ bien choisi pour les estimer **un à un** après avoir montré leur **indépendance linéaire**. Cette étape constitue un passage technique bien que central dans l'adaptation de la stratégie de Beauchard et Marbach au cas de deux contrôles. On renvoie le lecteur intéressé aux Lemmes 7.2.2, 7.2.3, 7.2.4 et 7.2.5. On obtient finalement

$$|\left(u_1,\cdots,u_k,v_1,\cdots,v_k\right)(t)|^2 = \mathcal{O}\left(t\left\|(u_k,v_k)\right\|_{L^2}^2 + \left\|(u,v)\right\|_{L^1}^{2M'+2} + \left\|x(t;(u,v))\right\|^2\right). \tag{4.3.4}$$

Pour le système (4.1.3), cette étape est implémentée en utilisant le fait que $v_1(T)^2 = x_3(T)^2$.

Étape 4 - estimation du terme d'erreur et conclusion : par la formule de représentation de l'état de type Magnus, (4.3.3) et (4.3.4), on a, pour $\|(u,v)\|_{L^1} \to 0$,

$$\mathbb{P}\left(x(t;(u,v))\right) = \Delta(u,v) + \mathcal{O}\left(t\left\|(u_k,v_k)\right\|_{L^2}^2 + \left\|(u,v)\right\|_{L^1}^{M+1} + \left\|x(t;(u,v))\right\|^{1+\frac{1}{M}}\right).$$

Pour cela, on a choisi M' tel que $2M'+2 \geq M+1$. Il nous reste à relier le terme d'erreur $\mathcal{O}\left(\|(u,v)\|_{L^1}^{M+1}\right)$ à la dérive initiée par $\Delta(u,v)$ et à l'information donnée par le régime $(t, \|(u,v)\|_{W^{m,p}}) \to 0$ au moyen des inégalités d'interpolation de Gagliardo–Nirenberg pour obtenir

$$\|(u,v)\|_{L^1}^{M+1} \leq C\,\|(u,v)\|_{W^{m,p}}^a\,\|(u_k,v_k)\|_{L^2}^2\,,$$

pour $a, C > 0$. C'est lors de cette étape que l'indice de coupure M est fixé en fonction de k, m, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ et $\mathfrak{b}_3$ afin d'obtenir l'inégalité souhaitée. Elle est effectuée dans le système jouet (4.1.3) au moyen de l'estimation (4.1.4). On obtient finalement

$$\mathbb{P}\left(x(t;(u,v))\right) = \Delta(u,v) + \mathcal{O}\left(\left(t + \|(u,v)\|_{W^{m,p}}^a\right)\|(u_k,v_k)\|_{L^2}^2 + \|x(t;(u,v))\|^{1+\frac{1}{M}}\right).$$

Puisque le deuxième terme est négligeable devant $\Delta(u,v)$ lorsque $(t,\|(u,v)\|_{W^{m,p}}) \to 0$ et que le dernier terme fait partie de la définition de dérive – voir Définition 4.3.1 – on obtient l'inégalité (4.3.1) attendue.

Dans le cas asymétrique – Théorème 4.2.9 – on utilise la même stratégie, avec une autre troncature dans la formule de représentation de l'état de type Magnus – voir Proposition 7.3.1.

4.3.4 Comparaison avec la littérature

La classe de systèmes à laquelle on s'intéresse est différente de celle des Théorèmes 1.5.14 et 1.5.15 puisque nos hypothèses impliquent en particulier $f_2(0) \neq 0$ – voir le Lemme 7.2.4. De plus, leur dérive n'est pas composée des deux crochets $f_{W_1^1}(0)$ et $f_{W_1^2}(0)$ – puisque dans leur cas, $f_{W_1^2}(0) = 0$ – comme c'est le cas pour notre obstruction.

La structure du Théorème 1.5.15 est similaire à celle de notre théorème. En effet, on « cache » dans le sous-espace vectoriel $\mathcal{N}_k^m(f)(0)$ les crochets *a priori* non négligeables, comme Giraldi, Lissy, Moreau et Pomet le font avec $S_{1,\mathbb{N}}(f)(0)$ (puisque leur forme linéaire φ s'annule sur $S_{1,\mathbb{N}}(f)(0)$, ces termes disparaissent). Dans le Théorème 1.5.15, les termes dominants extraits de la dynamique sont ceux qui composent une forme quadratique définie positive, comme dans notre théorème – voir Corollaire 4.3.7. Les jeux d'hypothèses sont donc de même nature.

Finalement, l'énoncé du Théorème 1.5.16 possède la même structure que celui établi dans [Ghe24]. Il fait également intervenir une compétition entre les trois mêmes crochets quadratiques que ceux qui centrent notre étude. À noter les subtilités suivantes : dans [HL02], les auteurs se concentrent sur le cas $k = 1$, tandis que nous traitons le cas où $k \in \mathbb{N}^*$. Ils démontrent plus généralement une condition nécessaire de L^∞-STLC sans aucune hypothèse de petitesse sur les contrôles. Dans [Ghe24], nous nions la $W^{m,p}$-STLC, avec $m \in \mathbb{N}^*$. Lewis et Hirschorn exigent la compensation de tous les éléments de $\text{Vect}\{f_b(0);\ b \in \mathcal{L}(X_1, X_2)\}$, tandis que nous pouvons utiliser la petitesse des contrôles pour en négliger une partie. Cependant, dans notre régime de faible régularité $k = m = 1$, nous exigeons la compensation de tous les crochets de $S_3(f)(0)$, ce qui n'est pas le cas dans le Théorème 1.5.16. Éclairé par [HL02], il est peut-être possible de raffiner notre résultat.

4.4 Perspectives et problèmes ouverts

4.4.1 Une généralisation du théorème de Stéfani

Le Théorème 1.5.12 de Stéfani donne une condition nécessaire de L^∞-STLC qui étudie les crochets dominants d'ordre pair. On aimerait généraliser ce résultat au cas des systèmes avec deux contrôles, quitte à travailler dans des espaces plus réguliers – voir Section 4.4.2. Notons que le cas où $l = 1$ est traité par le Théorème 4.2.1 avec $k = 1$. On propose de s'intéresser au cas où $l = 2$ des dérives quartiques. Ceci permettrait d'inclure l'Exemple 4.2.7. On étudie alors une compétition entre les 5 crochets $\mathfrak{b}_i := \text{ad}^i_{X_2}\left(\text{ad}^{4-i}_{X_1}(X_0)\right)$ où $i \in [\![0, 4]\!]$. Les fonctionnelles de second type associées à ces crochets sont

$$\forall i \in [\![0, 4]\!], \quad \xi_{\mathfrak{b}_i}(t, (u, v)) = \frac{1}{i!(4-i)!} \int_0^t u_1^{4-i}(s) v_1^i(s) \mathrm{d}s.$$

On choisit $\mathcal{N}$, un ensemble de crochets, de sorte que les termes dominants de $\mathcal{Z}_4$ soient constitués des crochets $(\mathfrak{b}_i)_{i \in [\![0,4]\!]}$. On obtient alors

$$\mathbb{P}\mathcal{Z}_4(t; f, (u,v))(0) \simeq \sum_{i=0}^{4} \frac{\mathbb{P}(e_{i+1})}{i!(4-i)!} \int_0^t u_1^{4-i}(s) v_1^i(s) \mathrm{d}s, \tag{4.4.1}$$

où $e_{i+1} := f_{\mathfrak{b}_i}(0)$ pour $i \in [\![0,4]\!]$ et $\mathbb{P}$ est une forme linéaire vérifiant $\mathbb{P}|_{\mathcal{N}(f)(0)} \equiv 0$. En utilisant l'inégalité de Young dans (4.4.1), on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\mathcal{Z}_4(t; f, (u,v))(0) \gtrsim & \left(\frac{\mathbb{P}(e_1)}{24} - \frac{|\mathbb{P}(e_2)|}{8} - \frac{|\mathbb{P}(e_4)|}{24}\right) \|u_1\|_{L^4}^4 + \frac{\mathbb{P}(e_3)}{4} \int_0^t u_1^2 v_1^2 \\ & + \left(\frac{\mathbb{P}(e_5)}{24} - \frac{|\mathbb{P}(e_4)|}{8} - \frac{|\mathbb{P}(e_2)|}{24}\right) \|v_1\|_{L^4}^4 ,\end{aligned}$$

Ainsi, la condition (BC) peut être adaptée dans ce cas comme suit : soient $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \in \mathbb{R}^d$ cinq vecteurs et $N \subset \mathbb{R}^d$ un sous-espace vectoriel. On dit que $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, N$ vérifient (BC) s'il existe $\mathbb{P} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que :

$$3\,|\mathbb{P}(e_2)| + |\mathbb{P}(e_4)| < \mathbb{P}(e_1), \qquad |\mathbb{P}(e_2)| + 3\,|\mathbb{P}(e_4)| < \mathbb{P}(e_5), \qquad \mathbb{P}(e_3) \geq 0, \qquad \mathbb{P}|_N \equiv 0.$$

Avec cette condition et un bon choix de $\mathcal{N}$, on prouve que $(f_1(0), f_2(0))$ est une famille libre. Ainsi, les closed-loop estimates décrites en Étape 3 s'adaptent à ce cadre. De plus, le terme de reste dans la formule de représentation de type Magnus peut être estimé similairement (*via* les inégalités d'interpolation de Gagliardo–Nirenberg). La difficulté majeure réside dans l'extraction de la partie dominante de $\mathcal{Z}_4(t; f, (u,v))(0)$. Pour ce faire, il faut pouvoir estimer les coordonnées de second type. Cependant, cela est très fastidieux : $\mathcal{B}_2$ est constitué de 3 familles, $\mathcal{B}_3$ de 8 familles et $\mathcal{B}_4$ est constitué de 36 familles différentes ! Ainsi, l'extension de la Proposition 7.1.3 au cas de $\mathcal{B}_4$ semble compromise (du moins très pénible à mettre en œuvre). Afin de contourner cette difficulté, on pourrait essayer de généraliser [BM24, Proposition 3.9] au cas des systèmes multi-contrôlés après exclusion d'une famille – à déterminer – de crochets.

4.4.2 Améliorer l'estimation d'erreur dans la formule de Magnus

Dans [BLBM23], Beauchard et Marbach établissent une formule de représentation de l'état de type Magnus de la solution de (1.1.1). Cette dernière est rappelée dans les Théorème 1.6.17 et Corollaire 1.6.18. En particulier, si l'on développe la solution jusqu'à l'ordre $M \in \mathbb{N}^*$, le terme de reste est quantifié en $\mathcal{O}\left(\|u\|_{L^1}^{M+1}\right)$. Dans le cas des systèmes mono-contrôlés – *i.e.* lorsque $r = 1$ – ils montrent à l'aide d'un système auxiliaire que ce reste peut être en fait quantifié en norme $\mathcal{O}\left(\|u_1\|_{L^{M+1}}^{M+1}\right)$ dans [BLBM23, Proposition 161, item 3]. Ils utilisent cette formule dans [BM24] pour étendre des conditions nécessaires de L^∞-STLC à la notion plus faible de $W^{-1,\infty}$-STLC. Cette méthode a d'ailleurs été mise en œuvre dans [Bou23b ; Bou24] sur l'équation de Schrödinger bilinéaire mono-contrôlée afin d'obtenir une estimation de reste similaire. Beauchard et Marbach démontrent également dans [BLBM23] que, dans le cas multi-contrôlé, la formule ne peut être vérifiée avec un reste quantifié en $\mathcal{O}\left(\|u_1\|_{L^{M+1}}^{M+1}\right)$. En effet, en [BLBM23, Section 7.5] ils proposent le contre-exemple suivant

$$\begin{cases} x_1' &= u \\ x_2' &= v x_1 \end{cases} .$$

On considère $u^n(t) := n\cos(n^2t)$ et $v^n(t) := n\sin(n^2t)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, $u_1^n(t) = \frac{1}{n}\sin(n^2t)$ et $v_1^n(t) = \frac{1}{n}\Big(1-\cos(n^2t)\Big)$. Pour tout $p \in [1, +\infty]$,

$$\|u_1^n\|_{L^p} + \|v_1^n\|_{L^p} \leq \frac{2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Néanmoins,

$$x_2(T) = \int_0^T v^n(t)u_1^n(t)\mathrm{d}t = \int_0^T \sin^2(n^2t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{T}{2}.$$

La recherche d'une formule optimale pour quantifier le reste est un problème ouvert. On conjecture que celui-ci pourrait être de la forme : $\mathcal{O}\left(\|u\|_{H^{-\frac{1}{2}}}^{M+1}\right)$. Une estimation de cette nature permettrait de diminuer l'indice de coupe $\pi(k,m)$ et de lever la limitation $m \in \mathbb{N}^*$ et d'obtenir des résultats pour $m = 0$.

CHAPITRE 5

Obstructions quadratiques à la STLC de l'équation de Schrödinger bilinéaire multi-contrôlée

Résumé. Le but de ce chapitre est de présenter le résultat principal de [Ghe25a], ainsi que des heuristiques de preuve. Nous insisterons également sur son lien fort avec le Chapitre 4.

Dans ce chapitre, on travaille avec un nombre $r \in \mathbb{N}^*$ arbitraire de contrôles scalaires. Nous alertons le lecteur sur le fait que certaines hypothèses introduites dans les Chapitres 3 et 5 portent le même nom bien qu'elles soient différentes. Les hypothèses définies dans le Chapitre 3 permettent d'obtenir un *résultat positif* de STLC dont la preuve complète est écrite en Chapitre 6. Les hypothèses formulées ci-après donnent naissance à un *résultat négatif* de STLC dont la preuve est détaillée en Chapitre 8.

5.1 Résultat principal de [Ghe25a]

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Commençons par donner les hypothèses sur les moments dipolaires μ_ℓ permettant d'obtenir l'obstruction quadratique à la contrôlabilité. Afin d'assurer le caractère bien posé de (2.1.1) dans $H^3_{(0)}(0,1)$ – voir Théorème 2.3.1 – on suppose que

$$(\mathbf{H})_{\mathbf{reg}}: \quad \mu \in H^3((0,1),\mathbb{R})^r.$$

Nous nous intéressons au cas où le système linéarisé autour de l'état fondamental – voir (5.3.1) – n'est pas contrôlable. Soit $K \in \mathbb{N}^*$ un entier. On suppose que

$$(\mathbf{H})_{\mathbf{lin}}: \quad \langle \mu_\ell \varphi_1, \varphi_K \rangle = 0, \qquad 1 \leq \ell \leq r.$$

Dans ce cas, le système linéarisé autour de l'état fondamental perd une direction complexe $\langle \psi(t;u,\varphi_1), \varphi_K\rangle \in \mathbb{C}$. Pour démontrer une obstruction quadratique à la STLC, on utilise une « power series expansion » à l'ordre 2, *i.e.* le terme d'ordre 2 du développement de Taylor en 0 de l'application $u \mapsto \langle \psi(t;u,\varphi_1), \varphi_K\rangle$. Afin de formuler les hypothèses liées à ce développement, on considère $k \in \mathbb{N}^*$ et on introduit les quantités suivantes.

Définition 5.1.1. *Pour $1 \leq \ell, L \leq r$, on définit les suites*

$$c^{\ell,L} := \left(c_j^{\ell,L}\right)_{j\geq 1} := \left(\langle \mu_\ell \varphi_K, \varphi_j\rangle \langle \mu_L \varphi_1, \varphi_j\rangle\right)_{j \geq 1}.$$

On notera $c^{\ell,\ell} = c^\ell$ et $c_j^{\ell,\ell} = c_j^\ell$ pour $j \geq 1$.

Ces notations sont sensiblement différentes de celles adoptées en Chapitre 3. Les hypothèses quadratiques font intervenir des séries. Pour assurer leur convergence, on suppose

$$(\mathbf{H})_{\mathbf{conv}}: \quad \sum_{j=1}^{+\infty} \left| c_j^{\ell,L} \right| j^{4k} < +\infty, \quad 1 \leq \ell, L \leq r.$$

Remarque 5.1.2. *Soient $p \in \mathbb{N}$ et $\mu_\ell, \mu_L \in H^{2p+3}((0,1),\mathbb{R})$ t.q. $\mu_\ell^{(2k+1)}\big|_{\{0,1\}} = \mu_L^{(2k+1)}\big|_{\{0,1\}} = 0$ pour $0 \leq k \leq p-1$ et $1 \leq \ell, L \leq r$. Avec des intégrations par parties, on obtient pour tous $j, q \in \mathbb{N}^*$, distincts,*

$$\langle \mu_\xi \varphi_q, \varphi_j \rangle = \frac{4(-1)^p(p+1)q}{j^{2p+3}\pi^{2p+2}} \left((-1)^{j+q} \mu_\xi^{(2p+1)}(1) - \mu_\xi^{(2p+1)}(0) \right) + \underset{j \to +\infty}{o} \left(\frac{1}{j^{2p+3}} \right), \quad \xi \in \{\ell, L\}.$$

Ainsi, si $p \geq k-1$, ce comportement asymptotique assure que $c^{\ell,L}$ satisfait l'hypothèse $(\mathbf{H})_{\mathbf{conv}}$. C'est en particulier le cas si $\mu_\ell, \mu_L \in \mathcal{C}_c^\infty(0,1)$.

Définition 5.1.3 (Crochets quadratiques)**.** *Supposons que $(\mathbf{H})_{\mathbf{conv}}$ est vérifiée. Ceci permet d'assurer la convergence des séries suivantes, pour $0 \leq p \leq 2k-1$, $1 \leq \ell \leq L \leq r$*

$$\gamma_p^{\ell,L} := \sum_{j=1}^{+\infty} \left((\lambda_K - \lambda_j)^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} (\lambda_j - \lambda_1)^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} c_j^{\ell,L} - (\lambda_K - \lambda_j)^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} (\lambda_j - \lambda_1)^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} c_j^{L,\ell} \right).$$

Lorsque $\ell = L$, on notera $\gamma_p^\ell = \gamma_p^{\ell,\ell}$. Si $r=2$, on note γ_p au lieu de $\gamma_p^{1,2}$.

Nous sommes maintenant en mesure de donner les hypothèses concernant les termes quadratiques :

$$(\mathbf{H})_{\mathbf{null}}: \quad \forall 1 \leq \ell \leq L \leq r, \ 0 \leq p \leq 2k-2, \quad \gamma_p^{\ell,L} = 0,$$

$$(\mathbf{H})_{\mathbf{pos}} : \quad q : a \in \mathbb{R}^r \mapsto \sum_{\ell=1}^{r} \gamma_{2k-1}^{\ell} \frac{a_\ell^2}{2} + \sum_{1 \leq \ell < L \leq r} \gamma_{2k-1}^{\ell,L} a_\ell a_L \in \mathbb{R} \text{ est une forme quadratique}$$
$$\text{définie (positive ou négative) sur } \mathbb{R}^r.$$

Remarque 5.1.4. *Si $(\mathbf{H})_{\mathbf{pos}}$ est vérifiée, $sgn(\gamma_{2k-1}^1)q$ est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^r$.*

Remarque 5.1.5. *Dans le cas où $r = 2$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{pos}} \Leftrightarrow (\gamma_{2k-1})^2 < \gamma_{2k-1}^1 \gamma_{2k-1}^2$. On retrouve la condition exhibée dans l'Exemple 4.1.1 en dimension finie.*

Le résultat principal du chapitre est le suivant.

Théorème 5.1.6. *Soient $k, K, r \in \mathbb{N}^*$, $\mu_1, \cdots, \mu_r$ vérifiant $(\mathbf{H})_{\mathbf{reg}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{lin}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{conv}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{null}}$ et $(\mathbf{H})_{\mathbf{pos}}$. Si $k \geq 2$ (resp. si $k = 1$), l'équation de Schrödinger bilinéaire (2.1.1) n'est pas H^{2k-3}-STLC (resp. $W^{-1,\infty}$-STLC) autour de l'état fondamental. Plus précisément, il existe $C, T^* > 0$ tels que, pour tout $T \in (0, T^*)$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $u \in H^{2k-3}((0,T),\mathbb{R})^r$ (resp. $u \in L^2((0,T),\mathbb{R})^r$) avec $\|u\|_{H^{2k-3}} \leq \eta$ (resp. $\|u\|_{W^{-1,\infty}} \leq \eta$), la solution $\psi(\cdot; u, \varphi_1)$ de (2.1.1) satisfait*

$$(-1)^{k+1} sgn(\gamma_{2k-1}^1) \Im \left\langle \psi(T; u, \varphi_1), \varphi_K e^{-i\lambda_1 T} \right\rangle \geq C \|u_k\|_{L^2}^2 - C \|\psi(T; u, \varphi_1) - \psi_1(T)\|_{L^2}^2 . \quad (5.1.1)$$

Des idées de preuve de l'existence de fonctions $\mu_1, \cdots, \mu_r$ vérifiant ces hypothèses sont données en Section 8.2.1.

Remarque 5.1.7. *L'estimation (5.1.1) montre l'existence de $0 < R < 1$ tel que les cibles suivantes ne sont pas atteignables par la solution de (2.1.1)*

$$\forall \delta \in (0, R), \qquad \psi_f := \left(\sqrt{1 - \delta^2} \varphi_1 + i(-1)^k sgn(\gamma_{2k-1}^1) \delta \varphi_K \right) e^{-i\lambda_1 T}.$$

En effet, s'il existe $u \in H^{2k-3}(0,T)^r$ (resp. $u \in L^2(0,T)^r$) tel que $\psi(T; u, \varphi_1) = \psi_f$, l'équation (5.1.1) mène à

$$-\delta \geq K \|u_k\|_{L^2}^2 - 2K(1 - \sqrt{1 - \delta^2}) \geq -2K\delta^2.$$

Ceci est impossible lorsque $\delta \to 0$.

Remarque 5.1.8. *Lorsque $r = 1$, l'hypothèse $(\mathbf{H})_{\mathbf{pos}}$ est équivalente à $\gamma_{2k-1}^1 \neq 0$. On retrouve le résultat principal de [Bou23b, Théorème 1.3].*

5.2 Comparaison avec la dimension finie et heuristique

5.2.1 Interprétation des hypothèses en termes de crochet de Lie

À première vue, les hypothèses formulées dans la section précédente semblent un peu mystérieuses et techniques. Néanmoins, elles peuvent être interprétées en termes de crochet de Lie. Sous des hypothèses appropriées pour la compatibilité des domaines (l'annulation au bord d'un nombre fini de dérivées d'ordre impair des fonctions μ_ℓ), on a l'égalité suivante :

$$\forall 0 \leq p \leq 2k-1,\ 1 \leq \ell \leq L \leq r, \quad \gamma_p^{\ell,L} = (-1)^p \left\langle [\underline{\mathrm{ad}}_A^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor}(B_\ell), \underline{\mathrm{ad}}_A^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}(B_L)]\varphi_1, \varphi_K \right\rangle, \quad (5.2.1)$$

où A est défini en (2.3.1) et B_ℓ est l'opérateur de multiplication par μ_ℓ dans $L^2(0,1)$ – voir Définition 3.2.1. On renvoie le lecteur intéressé aux Propositions B.1.2, B.1.3, B.2.2 et B.2.3 en Appendice B pour une preuve précise.

Pour $\ell < L$, les crochets de Lie $\gamma_p^{\ell,L}$ sont spécifiques à l'équation de Schrödinger bilinéaire à plusieurs contrôles scalaires (2.1.1), *i.e.* lorsque $r > 1$. Ils peuvent être utilisés pour récupérer une direction complexe perdue au linéaire – voir Chapitres 3, 6. Ils peuvent être considérés comme « *bons* » d'un point de vue de la STLC. *A contrario*, les crochets de Lie γ_k^ℓ sont connus pour être des obstructions potentielles à la STLC pour l'équation bilinéaire de Schrödinger mono-contrôlée, dans un cadre fonctionnel approprié – voir [Bou23b] et peuvent être perçus comme « *mauvais* ». Notre but est d'étendre ce résultat d'obstruction dans le cas de l'équation multi-contrôlée (2.1.1), malgré la présence des $\gamma_p^{\ell,L}$.

5.2.2 Lien avec le Théorème F.0.1

Interprétons à présent le Théorème 5.1.6 comme une extension à la dimension infinie du Théorème F.0.1, généralisation à $r > 2$ du Théorème 4.2.1, résultat principal de [Ghe24] présenté en Chapitre 4. Nous renvoyons le lecteur au Chapitre 1 pour les notations et définitions liées à l'étude de la STLC des systèmes affines qui sont utilisées dans cette section.

Supposons $\mu_1, \cdots, \mu_r \in \mathcal{C}_c^\infty(0,1)$ (ceci nous permet d'assurer la compatibilité des domaines des opérateurs mis en jeu). On peut penser à (2.1.1) comme un système affine de la forme (1.1.1) avec $f_0 = A$, où l'opérateur A est défini en (2.3.1) et $f_\ell = B_\ell$ pour $\ell \in [\![1, r]\!]$, où B_ℓ est l'opérateur de multiplication par μ_ℓ dans $L^2(0,1)$. L'équilibre du système n'est plus 0 mais la trajectoire libre $\psi(\cdot; 0, \varphi_1)$. Dans cette situation, la forme linéaire est donnée par $\mathbb{P} := \langle \cdot, \varphi_K \rangle$. Les hypothèses des Théorèmes 5.1.6 et F.0.1 (avec $m = 2k$) sont heuristiquement les mêmes.

- L'égalité (5.2.1), le Lemme B.2.1 et les hypothèses $(\mathbf{H})_{\mathbf{lin}}$ et $(\mathbf{H})_{\mathbf{null}}$ assurent que

  $\forall (\ell, p) \in [\![1, r]\!] \times \mathbb{N}$,
  $$\mathbb{P}\left(\underline{\mathrm{ad}}_A^p(B_\ell)\varphi_1\right) = \langle \underline{\mathrm{ad}}_A^p(B_\ell)\varphi_1, \varphi_K \rangle = (\lambda_1 - \lambda_K)^p \langle \mu_\ell \varphi_1, \varphi_K \rangle = 0,$$
  $\forall (\ell, p, l) \in [\![1, r]\!] \times [\![1, k-1]\!] \times \mathbb{N}$,
  $$\mathbb{P}\left(\underline{\mathrm{ad}}_A^l\left([\underline{\mathrm{ad}}_A^{p-1}(B_\ell), \underline{\mathrm{ad}}_A^p(B_\ell)]\right)\varphi_1\right) = 2(\lambda_1 - \lambda_K)^l \gamma_{2p-1}^\ell = 0,$$
  $\forall (\ell, L) \in [\![1, r]\!]^2$ tels que $\ell < L$, $\forall (p, l) \in [\![0, 2k-2]\!] \times \mathbb{N}$,
  $$\mathbb{P}\left(\underline{\mathrm{ad}}_A^l\left([\underline{\mathrm{ad}}_A^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor}(B_\ell), \underline{\mathrm{ad}}_A^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}(B_L)]\right)\varphi_1\right) = (\lambda_1 - \lambda_K)^l (-1)^p \gamma_p^{\ell,L} = 0.$$
  C'est un équivalent de la condition $\mathbb{P}_{|\mathcal{N}_k(f)(0)} \equiv 0$.
- L'égalité (5.2.1) et $(\mathbf{H})_{\mathbf{pos}}$ assurent que les hypothèses sur les formes quadratiques sont les mêmes.

Remarque 5.2.1. *Le cadre fonctionnel est différent. Dans le Théorème F.0.1, nous réfutons la H^{2k}-STLC, tandis que dans le Théorème 5.1.6, nous nions la H^{2k-3}-STLC. Pour* (2.1.1)*,* *un argument supplémentaire intervient : nous utilisons un système auxiliaire, qui fournit une estimation plus précise du terme d'erreur dans le développement quadratique de la solution – voir étape 5 de la Section 5.3.3. Une telle estimation de l'erreur est fausse en général pour les EDO – voir Contre-exemple 4.4.2. Déterminer la norme optimale pour estimer le terme de reste cubique dans les systèmes à entrées multiples est déjà une question difficile en dimension finie. L'idée clef est que, pour (2.1.1), les opérateurs B_ℓ commutent. Nous exploitons ainsi la structure de l'équation pour appliquer cette méthode.*

5.2.3 Heuristique de preuve

Comme dans le Chapitre 3, on peut extraire les termes dominants de la formule de représentation de l'état de Magnus et obtenir heuristiquement le développement quadratique dans la direction perdue φ_K suivant

$$\sum_{\ell=1}^{r}\sum_{p=1}^{k} i^{2p-1}\gamma_{2p-1}^{\ell}\int_0^T \frac{u_p^\ell(t)^2}{2}\mathrm{d}t + \sum_{1\leq \ell<L\leq r}\sum_{p=1}^{2k-1} i^p\gamma_p^{\ell,L}\int_0^T u^\ell_{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor+1}(t)u^L_{\lfloor\frac{p+1}{2}\rfloor}(t)\mathrm{d}t.$$

L'hypothèse d'annulation $(\mathbf{H})_{\mathbf{null}}$ réduit cette expression à

$$i(-1)^{k+1}\sum_{\ell=1}^{r}\gamma_{2k-1}^{\ell}\int_0^T \frac{u_k^\ell(t)^2}{2}\mathrm{d}t + i(-1)^{k+1}\sum_{1\leq \ell<L\leq r}\gamma_{2k-1}^{\ell,L}\int_0^T u_k^\ell(t)u_k^L(t)\mathrm{d}t, \tag{5.2.2}$$

et l'hypothèse $(\mathbf{H})_{\mathbf{pos}}$ permet de tirer profit du caractère défini positif de la forme quadratique $\mathrm{sgn}(\gamma_{2k-1}^1)q$ puisque (5.2.2) et $(\mathbf{H})_{\mathbf{lin}}$ mènent à

$$(-1)^{k+1}\mathrm{sgn}(\gamma_{2k-1}^1)\Im\left\langle \psi(T;u,\varphi_1),\varphi_K e^{-i\lambda_1 T}\right\rangle \simeq \mathrm{sgn}(\gamma_{2k-1}^1)\int_0^T q(u_k(t))\mathrm{d}t \geq 0.$$

5.3 Stratégie de preuve

Le but de cette section est de présenter une esquisse de la preuve du Théorème 5.1.6. La preuve complète se trouve dans le Chapitre 8.

5.3.1 Caractère bien posé de l'équation de Schrödinger bilinéaire (2.1.1)

Si μ vérifie $(\mathbf{H})_{\mathbf{reg}}$, le caractère bien posé de l'équation (2.1.1) est connu – voir Théorème 2.3.1. Le cadre fonctionnel est : $u \in L^2(0,T)^r$, $\psi_0 \in H^3_{(0)}(0,1)$ et $\psi \in \mathcal{C}^0\left([0,T], H^3_{(0)}(0,1)\right)$.

5.3.2 Développements linéaire et quadratique de la solution

La stratégie repose sur l'utilisation d'une « power series expansion » d'ordre 2, *i.e.* un développement de Taylor à l'ordre 2 en 0 de l'application $u \mapsto \psi(T;u,\varphi_1)$. On rappelle les expressions des termes du développement exposés en Chapitre 3. Soit $u \in L^2(0,T)^r$.

- Le terme du premier ordre $\Psi \in \mathcal{C}^0\left([0,T], H^3_{(0)}(0,1)\right)$ est la solution du système linéarisé de l'équation (2.1.1) autour de la trajectoire libre $(\psi_1, u \equiv 0)$, *i.e.*

$$\begin{cases} i\partial_t \Psi(t,x) = -\partial_x^2 \Psi(t,x) - u(t)\cdot\mu(x)\psi_1(t,x), & t\in(0,T), x\in(0,1),\\ \Psi(t,0)=\Psi(t,1)=0, & t\in(0,T),\\ \Psi(0,x)=0, & x\in(0,1). \end{cases} \tag{5.3.1}$$

En utilisant la formule de Duhamel, la solution est donnée par : $\forall t\in[0,T]$,

$$\Psi(t) = i\sum_{\ell=1}^{r}\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\langle \mu_\ell\varphi_1,\varphi_j\rangle \int_0^t u^\ell(s)e^{i\omega_j s}\mathrm{d}s\right)\psi_j(t). \tag{5.3.2}$$

L'hypothèse $(\mathbf{H})_{\mathbf{lin}}$ affirme que $\langle \Psi(T),\varphi_K\rangle = 0$.

- Le terme d'ordre 2, noté $\xi\in\mathcal{C}^0\left([0,T],H^3_{(0)}(0,1)\right)$, est la solution du système suivant

$$\begin{cases} i\partial_t \xi(t,x) = -\partial_x^2 \xi(t,x) - u(t)\cdot\mu(x)\Psi(t,x), & t\in(0,T), x\in(0,1),\\ \xi(t,0)=\xi(t,1)=0, & t\in(0,T),\\ \xi(0,x)=0, & x\in(0,1). \end{cases}$$

Heuristiquement, on peut penser que $\psi(t;u,\varphi_1)\simeq\psi_1(t)+\Psi(t)+\xi(t)$. Rappelons que dans le Chapitre 3, on on a présenté une formule d'erreur – voir (3.3.4) et Lemme 6.2.7 – qui fait intervenir la norme L^2 des contrôles scalaires. Dans ce chapitre, on montrera une formule d'erreur plus fine : elle fera intervenir la norme L^2 de u_1.

5.3.3 Coercivité de la forme quadratique et conclusion

La stratégie est développée en six étapes.

Étape 1 - expression du développement quadratique : l'utilisation de la formule de Duhamel (5.3.2) permet de développer le terme quadratique sous la forme

$$\left\langle \xi(T),\varphi_K e^{-i\lambda_1 T}\right\rangle = \sum_{\ell=1}^{r}\mathcal{F}_T^{\ell,\ell}(u^\ell) + \sum_{1\le\ell<L\le r}\left(\mathcal{F}_T^{\ell,L}(u^\ell,u^L)+\mathcal{F}_T^{L,\ell}(u^L,u^\ell)\right), \tag{5.3.3}$$

$$\mathcal{F}_T^{\ell,L}(f,g) := \int_0^T f(t)\left(\int_0^t H_{\ell,L}(t,\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}t, \qquad f,g\in L^2((0,T),\mathbb{R}), \quad \ell,L\in[\![1,r]\!],$$

où $H_{\ell,L}$ sont des noyaux explicites, définis sous forme de séries. Leur convergence est assurée par l'hypothèse $(\mathbf{H})_{\mathbf{conv}}$.

Étape 2 - manipulation des expressions de $\mathcal{F}_T^{\ell,L}$: l'hypothèse $(\mathbf{H})_{\mathbf{conv}}$ induit des propriétés de régularité sur les noyaux $H_{\ell,L}$, lesquelles permettent de faire des intégrations par parties. Bournissou démontre ainsi dans [Bou23b] la coercivité des termes $\mathcal{F}_T^{\ell,\ell}$. On effectue des manipulations similaires sur les termes extra-diagonaux, *i.e.* sur les $\mathcal{F}_T^{\ell,L}$ avec $\ell\neq L$. On montre ainsi l'estimation suivante – voir Proposition 8.1.6 – pour $T > 0,\ f, g \in L^2((0,T), \mathbb{R})$,

$$\mathcal{F}_T^{\ell,L}(f,g) + \mathcal{F}_T^{L,\ell}(g,f) = \sum_{p=0}^{k-1}(-1)^p \int_0^T f_{p+1}(t)\left(\gamma_{2p}^{\ell,L} g_p(t) + i\gamma_{2p+1}^{\ell,L} g_{p+1}(t)\right) e^{i\omega_K(t-T)}\mathrm{d}t$$
$$+\mathcal{O}\left(\sum_{p=1}^{k}\left(|f_p(T)|^2 + |g_p(T)|^2\right) + T\|f_k\|^2_{L^2(0,T)} + T\|g_k\|^2_{L^2(0,T)}\right).$$

C'est au cours de cette étape qu'on extrait les termes dominants de la formule de représentation de l'état de type Magnus.

Étape 3 - utilisation des hypothèses sur les crochets quadratiques : l'hypothèse $(\mathbf{H})_{\mathbf{null}}$ permet de simplifier cette expression et on obtient finalement par (5.3.3)

$$\Im\left\langle \xi(T), \varphi_K e^{-i\lambda_1 T}\right\rangle = \mathcal{O}\left(\sum_{p\in[\![1,k]\!]}\sum_{\ell\in[\![1,r]\!]}\left|u_p^\ell(T)\right|^2 + T\|u_k\|^2_{L^2(0,T)}\right)$$
$$+(-1)^{k+1}\int_0^T\left(\sum_{\ell=1}^{r}\gamma_{2k-1}^{\ell}\frac{u_k^\ell(t)^2}{2} + \sum_{1\leq\ell<L\leq r}\gamma_{2k-1}^{\ell,L}u_k^\ell(t)u_k^L(t)\right)\cos(\omega_K(t-T))\mathrm{d}t. \tag{5.3.4}$$

Le travail effectué durant ces trois premières étapes correspond à l'étape 1 de la stratégie introduite en Section 4.3.3 pour l'établissement du résultat similaire en dimension finie.

Étape 4 - estimation des termes de bord : on montre maintenant que les termes de bord $u_p^\ell(T)$ peuvent être négligés devant la dérive $\|u_k\|^2_{L^2(0,T)}$. Pour cela, on adapte en dimension infinie la stratégie mise en place pour les EDOs dans le Chapitre 7, mais avec des formules d'erreur plus précises. On obtient ainsi

$$\sum_{p\in[\![1,k]\!]}\sum_{\ell\in[\![1,r]\!]}|u_p^\ell(T)| = \mathcal{O}\left(\|u_1\|^2_{L^2(0,T)} + \sqrt{T}\|u_k\|_{L^2(0,T)} + \|\psi(T;u,\varphi_1) - \psi_1(T)\|_{L^2(0,1)}\right). \tag{5.3.5}$$

Cette étape correspond à l'étape 3 de la stratégie décrite dans le Chapitre 4.

Étape 5 - raffinement de l'estimation du terme d'erreur : on souhaite obtenir une formule d'erreur plus fine dans le développement de la solution de (2.1.1). Dans [BM14], Beauchard et Morancey ont utilisé un système auxiliaire dans cette optique dans le cas où $r = 1$. Cette méthode a ensuite été généralisée par Bournissou dans [Bou23b ; Bou24], toujours dans le cas de l'équation à entrée unique. On adapte cette méthode au cas de l'équation (2.1.1). On introduit alors l'état suivant $\widetilde{\psi}(t,x) := \psi(t,x)e^{-iu_1(t)\cdot\mu(x)}$. Cette fonction est solution faible de l'EDP suivante

$$\begin{cases} i\partial_t\widetilde{\psi} = -\partial_x^2\widetilde{\psi} - i\left[u_1(t)\cdot\mu''(x) + 2\left(u_1(t)\cdot\mu'(x)\right)\partial_x\right]\widetilde{\psi} + \left(u_1(t)\cdot\mu'(x)\right)^2\widetilde{\psi}, \\ \widetilde{\psi}(t,0) = \widetilde{\psi}(t,1) = 0, \\ \widetilde{\psi}(0,x) = \varphi_1(x). \end{cases}$$

En introduisant $\widetilde{\Psi}$ (resp. $\widetilde{\xi}$), le terme d'ordre 1 (resp. d'ordre 2) dans le développement de $\widetilde{\psi}$, on montre comme dans [Bou23b] l'estimation suivante pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, lorsque $\|u\|_{W^{-1,\infty}} \to 0$,

$$\left\langle e^{iu_1(T)\cdot\mu} \left(\widetilde{\psi}(\cdot; u, \varphi_1) - \psi_1 - \widetilde{\Psi} - \widetilde{\xi}\right)(T), \varphi_p \right\rangle = \mathcal{O}\left(\|u_1\|^3_{L^2(0,T)}\right).$$

En utilisant le lien entre $\widetilde{\psi}$ et ψ, on prouve la formule d'erreur suivante pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, lorsque $\|u\|_{W^{-1,\infty}} \to 0$,

$$\langle (\psi(\cdot; u, \varphi_1) - \psi_1 - \Psi - \xi)(T), \varphi_p \rangle = \mathcal{O}\left(\|u_1\|^3_{L^2(0,T)} + |u_1(T)|^3\right).$$

Les termes de bord $(u_1^1(T), \cdots, u_1^r(T))$ sont gérés grâce à l'estimation (5.3.5). On obtient donc finalement, lorsque $\|u\|_{W^{-1,\infty}} \to 0$,

$$\langle (\psi(\cdot; u, \varphi_1) - \psi_1 - \Psi - \xi)(T), \varphi_p \rangle = \mathcal{O}\left(\|u_1\|^3_{L^2(0,T)}\right). \tag{5.3.6}$$

C'est cette estimation raffinée qui sera utilisée dans la suite pour légitimer le développement $\psi(t) \simeq \psi_1(t) + \Psi(t) + \xi(t)$.

Étape 6 - conclusion : on combine les égalités (5.3.4), (5.3.5) et l'estimation de reste (5.3.6) pour finalement obtenir

$$\begin{aligned}(-1)^{k+1}\mathrm{sgn}(\gamma^1_{2k-1})\Im\left\langle \psi(T; u, \varphi_1), \varphi_K e^{-i\lambda_1 T}\right\rangle &= \mathrm{sgn}(\gamma^1_{2k-1})\int_0^T q(u_k(t))\mathrm{d}t \\ +\mathcal{O}\left(\|u_1\|^3_{L^2(0,T)} + T\|u_k\|^2_{L^2(0,T)} + \|\psi(T; u, \varphi_1) - \psi_1(T)\|^2_{L^2(0,1)}\right).\end{aligned}$$

On utilise les inégalités d'interpolation de Gagliardo–Nirenberg pour faire un lien entre la taille du terme de reste $\mathcal{O}\left(\|u_1\|^3_{L^2(0,T)}\right)$ et la taille de la dérive $\|u_k\|^2_{L^2(0,T)}$. On obtient

$$\begin{aligned}(-1)^{k+1}\mathrm{sgn}(\gamma^1_{2k-1})\Im\left\langle \psi(T; u, \varphi_1), \varphi_K e^{-i\lambda_1 T}\right\rangle &= \mathrm{sgn}(\gamma^1_{2k-1})\int_0^T q(u_k(t))\mathrm{d}t \\ +\mathcal{O}\left(\left(T + (1 + T^{-2k+3}\|u\|_{H^{2k-3}}\right)\|u_k\|^2_{L^2(0,T)} + \|\psi(T; u, \varphi_1) - \psi_1(T)\|^2_{L^2(0,1)}\right).\end{aligned}$$

Le temps et les contrôles étant petits dans H^{2k-3} et comme le terme $\|\psi(T; u, \varphi_1) - \psi_1(T)\|^2_{L^2(0,1)}$ fait partie de l'inégalité (5.1.1) souhaitée, on obtient le résultat grâce à l'hypothèse $(\mathbf{H})_{\mathbf{pos}}$ sur la forme quadratique q. Cette dernière étape est à mettre en parallèle avec l'étape 4 de la stratégie présentée dans le Chapitre 4 pour l'obtention du Théorème 4.2.1.

5.4 Perspectives et problèmes ouverts

Une question intéressante serait de généraliser cette méthode à d'autres équations, comme expliqué dans le Chapitre 3.

Part III

Démonstration des résultats obtenus

CHAPTER 6

STLC OF THE SCHRODINGER EQUATION THANKS TO A QUADRATIC TERM

SUMMARY. The purpose of this chapter is to give the complete proofs of Theorems 3.1.4 and 3.2.2, introduced in Chapter 3. This result is proved in [Ghe25b]. The chapter is organized in the following way: in Section 6.1, we present a proof of Theorem 3.2.2 of STLC thanks to quadratic terms for control-affine system in the finite-dimensional case, as a toy-model for the bilinear Schrödinger equation. In Section 6.2, we present classical properties about the bilinear Schrödinger equation. Finally, in Section 6.3, we give the proof of Theorem 3.1.4. Some elements of proof are developed in Section 6.4.

6.1 The finite-dimensional case

6.1.1 A quadratic moment problem

To prove Theorem 3.2.2, we solve quadratic moment problems.

Proposition 6.1.1 (Moment problems). *Let B be a finite subset of $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_{2,good}$ and $b_0 \in B \cap \mathcal{B}_{2,good}$. There exist $u, v \in \mathcal{C}_c^\infty((0,1),\mathbb{R})$ such that,*

$$\textit{for every } b \in B, \qquad \eta_b(1,(u,v)) = \delta_{b,b_0}. \tag{6.1.1}$$

Proof. One may assume that $B = \{M_\nu^1,\ M_\nu^2,\ C_{\mu,\nu},\ (\mu,\nu) \in [\![0,\mu^*]\!] \times [\![0,\nu^*]\!]\}$. Let $N := \mu^* + \nu^* + 1$. We are looking for u and v in the form of $u = \phi^{(N)}$ and $v = \psi^{(N)}$, with $\phi, \psi \in \mathcal{C}_c^\infty((0,1),\mathbb{R})$. One recalls that for $b \in \mathcal{B}_1$, $\eta_b = \xi_b$. Then, for every $\mu \in [\![0,\mu^*]\!]$, $\eta_{M_\mu^1}(1,(u,v)) = u_{\mu+1}(1) = 0$ and $\eta_{M_\mu^2}(1,(u,v)) = v_{\mu+1}(1) = 0$, using (1.6.14). Thus, (6.1.1) is verified for $b \in B \cap \mathcal{B}_1$.

Thanks to the choice of N, (1.6.16) and (1.6.9) give: for all $(\mu,\nu) \in [\![0,\mu^*]\!] \times [\![0,\nu^*]\!]$,

$$\eta_{C_{\mu,\nu}}(1,(u,v)) = \xi_{C_{\mu,\nu}}(1,(u,v)) = \int_0^1 \frac{(1-t)^\nu}{\nu!} u_{\lfloor \frac{\mu}{2} \rfloor + 1}(t) v_{\lfloor \frac{\mu+1}{2} \rfloor}(t) \mathrm{d}t.$$

Using integrations by parts, one has

$$\eta_{C_{\mu,\nu}}(1,(u,v)) = (-1)^{N - \lfloor \frac{\mu+1}{2} \rfloor} \int_0^1 \psi(t) \left(\frac{(1-\cdot)^\nu}{\nu!} \phi^{(N - \lfloor \frac{\mu}{2} \rfloor - 1)} \right)^{(N - \lfloor \frac{\mu+1}{2} \rfloor)} (t) \mathrm{d}t.$$

Using the Leibniz formula, one gets: $\eta_{C_{\mu,\nu}}(1,(u,v)) = \displaystyle\int_0^1 \psi(t) f_{\mu,\nu}(t) \mathrm{d}t$, with

$$f_{\mu,\nu} : t \in (0,1) \mapsto \sum_{k=0}^{\min(N - \lfloor \frac{\mu+1}{2} \rfloor, \nu)} \binom{N - \lfloor \frac{\mu+1}{2} \rfloor}{k} \frac{(-1)^{k+N-\lfloor \frac{\mu+1}{2} \rfloor}}{(\nu-k)!} (1-t)^{\nu-k} \phi^{(2N-1-\mu-k)}(t).$$

Step 1: There exists $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty((0,1),\mathbb{R})$ s.t. the family $\mathcal{F} := (f_{\mu,\nu})_{\substack{0 \leqslant \mu \leqslant \mu^* \\ 0 \leqslant \nu \leqslant \nu^*}}$ is linearly independent on $(0,1)$. Let $m \geq \nu^* + 2$ and $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty((0,1),\mathbb{R})$ such that $\chi \equiv 1$ on $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$. One defines $\phi : t \mapsto e^{t^m} \chi(t) \in \mathcal{C}_c^\infty((0,1),\mathbb{R})$. By induction, one can prove that: for all $l \in \mathbb{N}$, there exists $P_l \in \mathbb{R}[X]$ with $\deg(P_l) = l(m-1)$ such that, for all $t \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, $\phi^{(l)}(t) = e^{t^m} P_l(t)$. Then,

$$\forall (\mu,\nu) \in [\![0,\mu^*]\!] \times [\![0,\nu^*]\!], \quad \deg \left(f_{\mu,\nu}(t) e^{-t^m} |_{(\frac{1}{4},\frac{3}{4})} \right) = \nu + (m-1)(2N-1-\mu). \tag{6.1.2}$$

Thanks to the choice of m, all the degrees (6.1.2) are different. Then, $\left(t \mapsto f_{\mu,\nu}(t) e^{-t^m}\right)_{\substack{0 \leq \mu \leq \mu^* \\ 0 \leq \nu \leq \nu^*}}$ is linearly independent on $(0,1)$. Consequently, one obtains the result for $\mathcal{F}$.

Step 2: Construction of u and v. One chooses $u := \phi^{(N)}$, with the function ϕ obtained at step 1. By construction of ϕ, there exists $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty((0,1),\mathbb{R})$, solution to the following moment problems

$$\text{for every } (\mu,\nu) \in [\![0,\mu^*]\!] \times [\![0,\nu^*]\!], \quad \int_0^1 \psi(t) f_{\mu,\nu}(t) dt = \delta_{C_{\mu,\nu},b_0}.$$

We conclude with $v := \psi^{(N)}$. ☐

6.1.2 Tangent vector

Let $m \geq 0$. The purpose of this section is to prove the following proposition.

Proposition 6.1.2. *Let $j \in [\![r+1, d]\!]$. Assume that (3.2.4) and (3.3.1) hold. The vector $f_{b_j}(0)$ is a small-time $W_0^{m,\infty}-$continuously approximately reachable vector associated with vector variations $e^{\dot{\frac{1}{2}} H_0} f_{b_j}(0)$.*

Taking into account the assumption (3.2.4), we can consider $\mathbb{P}$, the linear projection on $\mathrm{Span}(f_{b_i}(0))_{r+1 \leq i \leq d}$ parallel to $S_1(f)(0)$. The proof is divided in two steps. In the first one, we prove that the system can move in the direction lost at the linear order $f_{b_j}(0)$, in projection.

Proposition 6.1.3. *Let $j \in [\![r+1, d]\!]$. Assume that (3.2.4) and (3.3.1) hold. Let $q_j := \left\lfloor \frac{n_0(b_j)}{2} \right\rfloor$, $s_j := \frac{1}{4(|b_j|+m)}$, $\alpha_j = \frac{3}{8} + \frac{m}{8(|b_j|+m)}$ and $\delta_j := \alpha_j + (q_j+2)s_j$. For all $T_1 > 0$, there exist $C, \rho > 0$ and a continuous map $z \in \mathbb{R} \mapsto (u_z, v_z) \in W_0^{m,\infty}(0,T_1)^2$ such that*

$$\forall z \in (-\rho, \rho), \quad \left\| \mathbb{P}\left(x(T_1; (u_z, v_z), 0, 0)\right) - z f_{b_j}(0) \right\| \leq C|z|^{1+s_j}. \tag{6.1.3}$$

The size of the controls is given by: for all $k \geq 0$, for all $r \in [1, +\infty]$, there exists $C > 0$, such that

$$\forall z \in (-\rho, \rho), \qquad \|u_z\|_{W^{k,r}}, \|v_z\|_{W^{k,r}} \leq C|z|^{\alpha_j + s_j\left(\frac{1}{r} - k\right)}. \tag{6.1.4}$$

Finally, for all $z \in (-\rho, \rho)$,

$$\|x(T_1; (u_z, v_z), 0, 0)\| \leq C|z|^{\delta_j}. \tag{6.1.5}$$

Note that $\delta_j > \frac{1}{2}$.

Proof. Let $T_1 > 0$ and $\rho = T_1^{\frac{1}{s_j}}$. One defines the brackets set

$$B = \left\{ M_j^1, M_j^2,\ j \in [\![0, q_j]\!] \right\} \cup \left\{ b \in \mathcal{B}_{2,good},\ |b| \leq |b_j| \right\}.$$

Thanks to Proposition 6.1.1, we consider $\bar{u}, \bar{v} \in \mathcal{C}_c^\infty(0,1)$ such that $\eta_b(1, (\bar{u}, \bar{v})) = \delta_{b,b_j}$, for all $b \in B$. We define, for $z \in \mathbb{R}^*$,

$$u_z, v_z : t \in [0, T_1] \mapsto \mathrm{sgn}(z)|z|^{\alpha_j} \bar{u}\left(\frac{|z|^{s_j} - T_1 + t}{|z|^{s_j}}\right), |z|^{\alpha_j} \bar{v}\left(\frac{|z|^{s_j} - T_1 + t}{|z|^{s_j}}\right).$$

For all $z \in (-\rho, \rho)$, one has

$$\mathrm{Supp}\left((u_z)_{q_j+1}\right), \mathrm{Supp}\left((v_z)_{q_j+1}\right) \subset (T_1 - |z|^{s_j}, T_1) \subset (0, T_1). \tag{6.1.6}$$

For all $k \geq 0$, $r \in [1, +\infty[$, using the Poincaré's inequality, the support condition (6.1.6) and a change of variables, we get for all $z \in (-\rho, \rho) \setminus \{0\}$,

$$\|u_z\|_{W^{k,r}}^r \leq C \int_0^1 \left| |z|^{\alpha_j - k s_j} \bar{u}^{(k)}(\sigma) \right|^r |z|^{s_j} \mathrm{d}\sigma \leq C|z|^{(\alpha_j - k s_j) r + s_j} \left\| \bar{u}^{(k)} \right\|_{L^r}^r.$$

The inequality with $r = +\infty$ is proved in the same way and we get (6.1.4).

We prove (6.1.5); we estimate the linear term. Note that, for all $z \in (-\rho, \rho)$, for all $i \in \{1,2\}$, for all $k \in \mathbb{N}$, the homogeneity property (1.6.3) gives

$$\begin{aligned}\eta_{M_k^i}(T_1,(u_z,v_z)) &= \eta_{M_k^i}\left(|z|^{s_j},\left(\operatorname{sgn}(z)|z|^{\alpha_j}\bar{u}\left(\frac{\cdot}{|z|^{s_j}}\right),|z|^{\alpha_j}\bar{v}\left(\frac{\cdot}{|z|^{s_j}}\right)\right)\right)\\ &= \operatorname{sgn}(z)^{\delta_{1,i}}|z|^{\alpha_j+|M_k^i|s_j}\eta_{M_k^i}(1,(\bar{u},\bar{v})).\end{aligned} \tag{6.1.7}$$

Consequently, the definition of $(\bar{u},\bar{v})$ and (6.1.7) gives: for all $z \in (-\rho,\rho)$, for all $i \in \{1,2\}$, for all $k \in [\![0, q_j]\!]$, $\eta_{M_k^i}(T_1,(u_z,v_z)) = 0$. Using (1.6.4) and (6.1.4) with $r=1$,

$$\mathcal{Z}_1(T_1;f,(u_z,v_z))(0) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=q_j+1}^{+\infty}\eta_{M_k^i}(T_1,(u_z,v_z))f_{M_k^i}(0) = \mathcal{O}\left(|z|^{\alpha_j+(q_j+2)s_j}\right). \tag{6.1.8}$$

The Magnus formula (1.6.7) with $M=1$ leads to

$$x(T_1;(u_z,v_z),0,0) = \mathcal{Z}_1(T_1;f,(u_z,v_z))(0) + \mathcal{O}\left(\|(u_z,v_z)\|_{L^1}^2 + \|x(T_1;(u_z,v_z),0,0)\|^2\right).$$

Using the size of the controls given by (6.1.4) with $(k,r)=(0,1)$ and (6.1.8), one has

$$x(T_1;(u_z,v_z),0,0) = \mathcal{O}\left(|z|^{\delta_j} + |z|^{2\alpha_j+2s_j} + \|x(T_1;(u_z,v_z),0,0)\|^2\right).$$

As $\frac{1}{2} < \delta_j \leq 2\alpha_j + 2s_j$, one gets (6.1.5).

Now, we prove (6.1.3). By definition,

$$\mathcal{Z}_2(T_1;f,(u_z,v_z))(0) = \mathcal{Z}_1(T_1;f,(u_z,v_z))(0) + \sum_{b\in\mathcal{B}_2}\eta_b(T_1,(u_z,v_z))f_b(0) = \mathcal{O}\left(|z|^{\delta_j}\right), \tag{6.1.9}$$

using (6.1.8), the estimates (1.6.4) and (6.1.4) with $(k,r)=(0,1)$. Then, using the map $\mathbb{P}$, the hypothesis (3.3.1) on the short brackets of $\mathcal{B}_{2,bad}$ and the homogeneity property (1.6.3), we obtain

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{Z}_2(T_1;f,(u_z,v_z))(0)\right) = \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\{\mathfrak{b}\in\mathcal{B}_{2,good},\ |\mathfrak{b}|\leq|b_j|\}\\ \cup\{\mathfrak{b}\in\mathcal{B}_2,\ |\mathfrak{b}|>|b_j|\}}}\operatorname{sgn}(z)^{n_1(b)}|z|^{2\alpha_j+|b|s_j}\eta_b(1,(\bar{u},\bar{v}))\mathbb{P}\left(f_b(0)\right).$$

Using the definition of $(\bar{u},\bar{v})$ and the fact that $2\alpha_j + |b_j|s_j = 1$, one gets

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{Z}_2(T_1;f,(u_z,v_z))(0)\right) = zf_{b_j}(0) + \mathcal{O}(|z|^{1+s_j}). \tag{6.1.10}$$

Then, using the Magnus representation formula (1.6.5) with $M=2$, Lemma C.0.1 and the projection $\mathbb{P}$, one has

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(x(T_1;(u_z,v_z),0,0)\right) = \mathbb{P}\left(\mathcal{Z}_2(T_1;f,(u_z,v_z))(0)\right)\\ &+\mathcal{O}\left(\|\mathcal{Z}_2(T_1;f,(u_z,v_z))(0)\|_\infty\|D\mathcal{Z}_2(T_1;f,(u_z,v_z))\|_\infty + \|(u_z,v_z)\|_{L^1}^3\right).\end{aligned} \tag{6.1.11}$$

Finally, note that

$$D\mathcal{Z}_2(T_1; f, (u_z, v_z)) = \sum_{b \in \mathcal{B}_{[\![1,2]\!]}} \eta_b(T_1, (u_z, v_z)) Df_b.$$

Then, with the same steps than for (6.1.9), one gets

$$\|D\mathcal{Z}_2(T_1; f, (u_z, v_z))\|_\infty = \mathcal{O}\left(|z|^{\delta_j}\right). \tag{6.1.12}$$

Finally, using (6.1.9), (6.1.10), (6.1.12) and (6.1.4) with $(k, r) = (0, 1)$ in (6.1.11), one obtains (6.1.3), as $1 + s_j \leq 2\delta_j \leq 3\alpha_j + 3s_j$. □

One defines $H_0 = Df_0(0)$. In the second step of the proof, we correct the linear part of the solution.

Proposition 6.1.4. *Let $j \in [\![r+1, d]\!]$. Assume that (3.2.4) and (3.3.1) hold. For all $0 < T_1 < T < T_1 + 1$, there exist $C, \rho > 0$ and a continuous map $z \mapsto (U_z, V_z) \in W_0^{m,\infty}(0,T)^2$ such that*

$$\forall z \in (-\rho, \rho), \qquad \left\| x(T; (U_z, V_z), 0, 0) - z e^{(T-T_1)H_0} f_{b_j}(0) \right\| \leq C|z|^{1+s_j}, \tag{6.1.13}$$

with the following estimate on the family of controls

$$\|U_z\|_{W^{m,\infty}}, \|V_z\|_{W^{m,\infty}} \leq C|z|^{\frac{1}{4}}. \tag{6.1.14}$$

Proof. Let $0 < T_1 < T < T_1 + 1$, one defines $U_z, V_z := u_z \mathbb{1}_{[0,T_1]} + \tilde{u}_z \mathbb{1}_{[T_1,T]}, v_z \mathbb{1}_{[0,T_1]} + \tilde{v}_z \mathbb{1}_{[T_1,T]}$ for $z \in \mathbb{R}$, where $u_z, v_z \in W_0^{m,\infty}(0, T_1)$ are the controls defined in the previous proposition and $\tilde{u}_z, \tilde{v}_z \in W_0^{m,\infty}(T_1, T)$ are the controls that correct the linear part of the solution, *i.e.* that drive the solution from $x(T_1; (u_z, v_z), 0, 0)$ to $\mathbb{P}_{S_1(f)(0)}\left(z e^{(T-T_1)H_0} f_{b_j}(0)\right)$ in projection on $S_1(f)(0)$, *i.e.*

$$\mathbb{P}_{S_1(f)(0)}\left(x(T; (\tilde{u}_z, \tilde{v}_z), x(T_1; (u_z, v_z), 0, 0), T_1)\right) = \mathbb{P}_{S_1(f)(0)}\left(z e^{(T-T_1)H_0} f_{b_j}(0)\right).$$

Note that $\mathbb{P}_{S_1(f)(0)} = \mathrm{Id} - \mathbb{P}$. Then,

$$\|(\tilde{u}_z, \tilde{v}_z)\|_{W^{m,\infty}} \leq C\left(\|x(T_1; (u_z, v_z), 0, 0)\| + |z| \left\| e^{(T-T_1)H_0} f_{b_j}(0) \right\|\right) \leq C|z|^{\delta_j}, \tag{6.1.15}$$

the last estimate is given by (6.1.5). Moreover, (6.1.4) with $(k, r) = (m, \infty)$ gives

$$\|(u_z, v_z)\|_{W^{m,\infty}} \leq C|z|^{\alpha_j - m s_j} \leq C|z|^{\frac{1}{4}}. \tag{6.1.16}$$

The equations (6.1.15) and (6.1.16) give (6.1.14), as $\delta_j > \frac{1}{2}$. Furthermore, by construction,

$$\begin{aligned} &\left\| x(T; (U_z, V_z), 0, 0) - z e^{(T-T_1)H_0} f_{b_j}(0) \right\| = \\ &\left\| \mathbb{P}\left(x(T; (U_z, V_z), 0, 0) - z e^{(T-T_1)H_0} f_{b_j}(0) \right) \right\|. \end{aligned} \tag{6.1.17}$$

We apply Lemma C.0.5 with $p = x(T_1; (u_z, v_z), 0, 0)$ and $(u, v) = (\tilde{u}_z, \tilde{v}_z)$ to obtain

$$\begin{aligned} x(T; (U_z, V_z), 0, 0) &= x\left(T; (0,0), x(T_1; (u_z, v_z), 0, 0), T_1\right) + x(T; (\tilde{u}_z, \tilde{v}_z), 0, T_1) \\ &+ \mathcal{O}\left(\|x(T_1; (u_z, v_z), 0, 0)\| \, \|(\tilde{u}_z, \tilde{v}_z)\|_{L^\infty} + \|x(T_1; (u_z, v_z), 0, 0)\|^2\right). \end{aligned} \tag{6.1.18}$$

The equations (6.1.5), (6.1.15), (6.1.17) and (6.1.18) give

$$\begin{aligned}\left\|x(T;(U_z,V_z),0,0)-ze^{(T-T_1)H_0}f_{b_j}(0)\right\| &\leq \|\mathbb{P}(x(T;(\tilde{u}_z,\tilde{v}_z),0,T_1))\| \\ +\left\|\mathbb{P}\left(x(T;(0,0),x(T_1;(u_z,v_z),0,0),T_1)-ze^{(T-T_1)H_0}f_{b_j}(0)\right)\right\| &+\mathcal{O}\left(|z|^{2\delta_j}\right).\end{aligned} \tag{6.1.19}$$

We designate the second term of the right-hand side of (6.1.19) by A and Lemma C.0.4 gives with $p=x(T_1;(u_z,v_z),0,0)$

$$A=\left\|\mathbb{P}\left(e^{(T-T_1)H_0}x(T_1;(u_z,v_z),0,0)-ze^{(T-T_1)H_0}f_{b_j}(0)\right)\right\|+\mathcal{O}\left(\|x(T_1;(u_z,v_z),0,0)\|^2\right).$$

For all $b\in\mathcal{B}_1$, $H_0f_b(0)=Df_0(0)f_b(0)-Df_b(0)f_0(0)=f_{b0}(0)$, with $b0\in\mathcal{B}_1$. Then, $S_1(f)(0)$ is stable by $e^{(T-T_1)H_0}$. Consequently,

$$e^{(T-T_1)H_0}\left(\mathrm{Id}-\mathbb{P}\right)\left(x(T_1;(u_z,v_z),0,0)\right)\in S_1(f)(0)=\ker(\mathbb{P}),$$

and, with (6.1.5), we obtain

$$\begin{aligned}A&=\left\|\mathbb{P}\left(e^{(T-T_1)H_0}\mathbb{P}\left(x(T_1;(u_z,v_z),0,0)\right)-ze^{(T-T_1)H_0}f_{b_j}(0)\right)\right\|+\mathcal{O}\left(|z|^{2\delta_j}\right),\\ A&=\mathcal{O}\left(\left\|\mathbb{P}\left(x(T_1;(u_z,v_z),0,0)\right)-zf_{b_j}(0)\right\|+|z|^{2\delta_j}\right).\end{aligned}$$

Finally, the equation (6.1.3) gives

$$A=\mathcal{O}\left(|z|^{1+s_j}\right), \tag{6.1.20}$$

as $1+s_j\leq 2\delta_j$. To obtain (6.1.13), we finally estimate the first term of the right-hand size of (6.1.19), let's say B. Using once again the Magnus formula (1.6.5) with $M=2$, Lemma C.0.1 and the projection $\mathbb{P}$, one has

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(x(T;(\tilde{u}_z,\tilde{v}_z),0,T_1)\right)&=\mathbb{P}\left(\mathcal{Z}_2(T;f,(\tilde{u}_z,\tilde{v}_z))(0)\right)\\ +\mathcal{O}\left(\|\mathcal{Z}_2(T;f,(\tilde{u}_z,\tilde{v}_z))(0)\|_\infty\|D\mathcal{Z}_2(T;f,(\tilde{u}_z,\tilde{v}_z))\|_\infty\right.&\left.+\|(\tilde{u}_z,\tilde{v}_z)\|_{L^1}^3\right).\end{aligned} \tag{6.1.21}$$

Again, (1.6.4) and (6.1.15) gives

$$\begin{aligned}\|\mathbb{P}\left(\mathcal{Z}_2(T;f,(\tilde{u}_z,\tilde{v}_z))\right)\|_\infty&=\mathcal{O}\left(\|(\tilde{u}_z,\tilde{v}_z)\|_{L^1}^2\right)=\mathcal{O}\left(\|(\tilde{u}_z,\tilde{v}_z)\|_{W^{m,\infty}}^2\right)=\mathcal{O}\left(|z|^{2\delta_j}\right),\\ \|\mathcal{Z}_2(T;f,(\tilde{u}_z,\tilde{v}_z))\|_\infty,\|D\mathcal{Z}_2(T;f,(\tilde{u}_z,\tilde{v}_z))\|_\infty&=\mathcal{O}\left(\|(\tilde{u}_z,\tilde{v}_z)\|_{W^{m,\infty}}\right)=\mathcal{O}\left(|z|^{\delta_j}\right).\end{aligned}$$

Therefore, thanks to the estimates (6.1.21), one has

$$B=\mathcal{O}\left(|z|^{2\delta_j}+\|(\tilde{u}_z,\tilde{v}_z)\|_{L^1}^3\right)=\mathcal{O}(|z|^{1+s_j}), \tag{6.1.22}$$

using (6.1.15) and $1+s_j\leq 2\delta_j$. To conclude, the equations (6.1.19), (6.1.20) and (6.1.22) lead to the wondered inequality (6.1.13). □

We are now in a position to write the proof of the main result of this section.

Proof of Proposition 6.1.2. One considers $T>0$ and $T_1:=\frac{T}{2}$. Then, the previous proposition gives the result. □

6.1.3 Proof of Theorem 3.2.2

Now, we can write the proof of Theorem 3.2.2.

Proof of Theorem 3.2.2. We use Theorem 3.3.4. More precisely, we consider $X = \mathbb{R}^d$ and $E_T = W_0^{m,\infty}(0,T)^2$. Moreover, for all $T > 0$,

$$\mathcal{F}_T : (0,(u,v)) \mapsto x(T;(u,v),0).$$

We have to check all the assumptions to obtain the controllability result.

- (A_1) This is well-known that the end-point map is regular around the equilibrium.
- (A_2) The differential at $(0,(0,0))$ is given $\mathrm{d}\mathcal{F}_T(0,(0,0))(x_0,(\bar{u},\bar{v})) = Y(T)$ where Y is the solution to the linearized system

$$\begin{cases} Y'(t) & = & Df_0(0)Y(t) + \bar{u}(t)f_1(0) + \bar{v}(t)f_2(0) \\ Y(0) & = & x_0 \end{cases}.$$

  Then, for all $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $T \mapsto \mathrm{d}\mathcal{F}_T(0,(0,0))(x_0,(0,0)) = e^{TDf_0(0)}x_0$ is continuous on $\mathbb{R}$ and $\mathrm{d}\mathcal{F}_0(0,(0,0))(x_0,(0,0)) = x_0$.
- (A_3) This point is linked to the semi-group property of the solution.
- (A_4) By hypothesis, $H = \mathrm{Im}(\mathcal{F}_T(0,0)\cdot(0,\cdot))$ is a closed subspace (finite dimension), this is the reachable set of the linearized system around 0. This space doesn't depend on T and its codimension is finite.
- (A_5) Finally, using (3.2.5), Proposition 6.1.2 shows that, for all $j \in [\![r+1,d]\!]$, $f_{b_j}(0)$ is a small-time $W_0^{m,\infty}$-continuously approximately reachable vector. Then, as a supplementary space of H is given by $\mathrm{Span}\left(\left(f_{b_j}(0)\right)_{r+1\leq j\leq d}\right)$, this condition is verified.

By Theorem 3.3.4, the multi-input control-affine system (3.0.1) is $W_0^{m,\infty}$-STLC. We obtain the desired result. ☐

6.2 Preliminaries on the Schrödinger equation

In all the chapter, we will note $\omega_j := \lambda_j - \lambda_1$ and $\nu_j := \lambda_K - \lambda_j$, with $j \geq 1$, $K \geq 2$. For $\varphi \in L^2(0,1)$, $t \in \mathbb{R}$, one recalls that

$$e^{-iAt}\varphi = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle \varphi, \varphi_k \rangle e^{-i\lambda_k t}\varphi_k.$$

and λ_j, φ_j are defined in (2.3.2). For the rest of this paper, $n \geq 1$, $p,m \geq 0$, $K \geq 2$ are fixed integers. Let us discuss about the well-posedness of (3.1.1).

6.2.1 Well-posedness

We first recall the well-posedness result of (3.1.1), with estimates on the solution with respect to the initial-condition. See [Bou23a, Theorem 2.1] for details about the proof.

Theorem 6.2.1 (Well-posedness)**.** *Let $T>0$, μ_1,μ_2 satisfying* $(\mathbf{H})_{\mathbf{reg}}$*, $u,v\in H_0^m((0,T),\mathbb{R})$, $\psi_0\in H^{2(p+m)+3}_{(0)}(0,1)$ and $f\in H_0^m\left((0,T),H^{2p+3}\cap H^{2p+1}_{(0)}(0,1)\right)$. There exists a unique weak solution to the following equation*

$$\begin{cases} i\partial_t\psi=-\partial_x^2\psi-(u\mu_1+v\mu_2)\psi-f, & (0,T)\times(0,1),\\ \psi(\cdot,0)=\psi(\cdot,1)=0, & (0,T),\\ \psi(0,\cdot)=\psi_0, & (0,1),\end{cases} \tag{6.2.1}$$

i.e. a function $\psi\in\mathcal{C}^m\left([0,T],H^{2p+3}_{(0)}(0,1)\right)$ such that the following equality holds in $H^{2p+3}_{(0)}$ for every $t\in[0,T]$

$$\psi(t)=e^{-iAt}\psi_0+i\int_0^t e^{-iA(t-s)}((u(s)\mu_1+v(s)\mu_2)\psi(s)+f(s))\mathrm{d}s. \tag{6.2.2}$$

Moreover, $\psi(T)\in H^{2(p+m)+3}_{(0)}$ and the following estimates hold: for every $R>0$, there exists $C=C(R,\mu_1,\mu_2,T)>0$ such that, if $\|u\|_{H^m},\|v\|_{H^m}<R$,

$$\|\psi\|_{\mathcal{C}^m\left([0,T],H^{2p+3}_{(0)}\right)}\leq C\left(\|\psi_0\|_{H^{2(p+m)+3}_{(0)}}+\|f\|_{H^m((0,T),H^{2p+3})}\right), \tag{6.2.3}$$

$$\|\psi(T)\|_{H^{2(p+m)+3}_{(0)}}\leq C\left(\|\psi_0\|_{H^{2(p+m)+3}_{(0)}}+\|f\|_{H^m((0,T),H^{2p+3})}\right). \tag{6.2.4}$$

Lemma 6.2.2. *Let $k\in\mathbb{N}$ and $\mu\in W^{2k,\infty}(0,1)$. Then, μ is a bounded operator on $H^{2k}_{(0)}(0,1)$ iff all the derivatives of μ of odd order less than or equal to $2k-3$ vanish at the boundary.*

Proof. Let μ be such a function. For all $\varphi\in H^{2k}_{(0)}(0,1)$, for all $l\in\{0,\cdots,k-1\}$, one has, thanks to Leibniz formula

$$(\mu\varphi)^{(2l)}=\sum_{j=0}^{l}\binom{2l}{2j}\mu^{(2j)}\varphi^{(2(l-j))}+\sum_{j=0}^{l-1}\binom{2l}{2j+1}\mu^{(2j+1)}\varphi^{(2(l-j)-1)}.$$

The first sum vanishes at $x=0,1$ because $\varphi^{(2(l-j))}|_{\{0,1\}}=0$. As $\mu^{(2j+1)}|_{\{0,1\}}=0$ for $2j+1\leq 2l-1\leq 2k-3$, the second sum is 0 at $x=0,1$. Conversely, let $\ell\in\{0,\cdots,k-2\}$. Considering $\varphi_\ell\in H^{2k}_{(0)}(0,1)$ such that $\varphi_\ell^{(2(k-j)-3)}(0)=\delta_{j,\ell}$ for $0\leq j\leq k-2$, we obtain

$$0=(\mu\varphi_\ell)^{(2k-2)}(0)=\sum_{j=0}^{k-2}\binom{2k-2}{2j+1}\mu^{(2j+1)}(0)\delta_{j,\ell}=\binom{2k-2}{2\ell+1}\mu^{(2\ell+1)}(0).$$

Using the same strategy with $x=1$, we obtain the result. ☐

Remark 6.2.3. *Let μ be a function satisfying* $(\mathbf{H}_{\mathbf{reg}})$*. Then, $\varphi\mapsto\mu\varphi$ is a continuous mapping from $H^{2p+3}\cap H^{2p+1}_{(0)}$ to $H^{2p+3}\cap H^{2p+1}_{(0)}$. However, $\mu^{(2p+1)}(0),\mu^{(2p+1)}(1)$ a priori don't vanish, so this application doesn't preserve $H^{2p+3}_{(0)}(0,1)$. This problem is circumvented by* (6.2.3) *and* (6.2.4)*.*

The following statement gives the dependency of the solution with respect to the initial condition. This is the adaptation of Lemma C.0.5, with the Schrödinger equation.

Proposition 6.2.4. *Let $T > 0$, μ_1, μ_2 satisfying $(\mathbf{H})_{\mathbf{reg}}$ and $\psi_0 \in H^{2(p+m)+3}_{(0)}(0,1)$. For all $R > 0$, there exists $C = C(T, \mu_1, \mu_2, R) > 0$ such that for all $u, v \in H^m_0(0,T)$ with $\|u\|_{H^m}, \|v\|_{H^m} < R$, one has*

$$\begin{aligned}\|\psi(T;(u,v),\psi_0+\varphi_1) - \psi(T;(u,v),\varphi_1) - \psi(T;(0,0),\psi_0)\|_{H^{2(p+m)+3}_{(0)}} \\ \leq C\,\|(u,v)\|_{H^m}\,\|\psi_0\|_{H^{2(p+m)+3}_{(0)}}.\end{aligned} \tag{6.2.5}$$

Proof. One defines for $T > 0$,

$$\Lambda : t \in [0,T] \mapsto \psi(t;(u,v),\psi_0+\varphi_1) - \psi(t;(u,v),\varphi_1) - \psi(t;(0,0),\psi_0).$$

The function Λ is the solution to the following bilinear Schrödinger equation

$$\begin{cases} i\partial_t \Lambda = -\partial_x^2 \Lambda - (u\mu_1 + v\mu_2)\Lambda - (u\mu_1+v\mu_2)\psi(\cdot;(0,0),\psi_0), & (0,T)\times(0,1), \\ \Lambda(\cdot,0) = \Lambda(\cdot,1) = 0, & (0,T), \\ \Lambda(0,\cdot) = 0, & (0,1). \end{cases}$$

Then, the inequality (6.2.4) applied to this equation gives

$$\|\Lambda(T)\|_{H^{2(p+m)+3}_{(0)}} \leq C\,\|(u\mu_1+v\mu_2)\psi(\cdot;(0,0),\psi_0)\|_{H^m((0,T),H^{2p+3})}. \tag{6.2.6}$$

When $m \geq 1$, the Sobolev space $H^m(0,T)$ has an algebra structure and one obtains the following inequality

$$\|\Lambda(T)\|_{H^{2(p+m)+3}_{(0)}} \leq C\,\|(u,v)\|_{H^m} \max_{i\in[\![1,2]\!]} \|\mu_i \psi(\cdot;(0,0),\psi_0)\|_{H^m((0,T),H^{2p+3})}.$$

Once again, we use the algebra structure of the Sobolev space $H^{2p+3}(0,1)$ to obtain

$$\|\Lambda(T)\|_{H^{2(p+m)+3}_{(0)}} \leq C \max_{i\in[\![1,2]\!]} \|\mu_i\|_{H^{2p+3}}\,\|(u,v)\|_{H^m}\,\|\psi(\cdot;(0,0),\psi_0)\|_{H^m\left((0,T),H^{2p+3}_{(0)}\right)}.$$

Noticing that $\psi(t;(0,0),\psi_0) = e^{-iAt}\psi_0$,

$$\|\psi(\cdot;(0,0),\psi_0)\|_{H^m\left((0,T),H^{2p+3}_{(0)}\right)} \leq C\,\|\psi_0\|_{H^{2(p+m)+3}_{(0)}}.$$

This leads to the conclusion. Finally, let's consider the case where $m = 0$. The following estimation holds

$$\|u\mu_1\psi(\cdot;(0,0),\psi_0)\|^2_{L^2((0,T),H^{2p+3})} = \int_0^T |u(t)|^2\,\|\mu_1\psi(t;(0,0),\psi_0)\|^2_{H^{2p+3}}\,\mathrm{d}t.$$

Using the algebra structure of $H^{2p+3}(0,1)$,

$$\|u\mu_1\psi(\cdot;(0,0),\psi_0)\|^2_{L^2((0,T),H^{2p+3})} \leq C\,\|\mu_1\|^2_{H^{2p+3}} \int_0^T |u(t)|^2\,\|\psi(t;(0,0),\psi_0)\|^2_{H^{2p+3}_{(0)}}\,\mathrm{d}t.$$

The same estimate can be obtained with the term in $\mu_2 v$. Thus, the equation (6.2.6) gives

$$\|\Lambda(T)\|_{H^{2p+3}_{(0)}} \leq C \max_{i\in[\![1,2]\!]} \|\mu_i\|_{H^{2p+3}} \|(u,v)\|_{L^2} \|\psi(\cdot;(0,0),\psi_0)\|_{L^\infty\left((0,T),H^{2p+3}_{(0)}\right)}.$$

The inequality (6.2.3) (with $m=0$) gives the conclusion. □

6.2.2 Expansion of the solution

We want to make an asymptotic development of the solution ψ, with small controls. Let $u,v\in H^m_0(0,T)$ be two fixed controls. The first-order term $\Psi\in\mathcal{C}^m\left([0,T],H^{2p+3}_{(0)}(0,1)\right)$ is the solution to the linearized system of (3.1.1) around the free trajectory $(\psi_1,(u,v)\equiv 0)$, *i.e.*

$$\begin{cases} i\partial_t\Psi = -\partial_x^2\Psi - (u\mu_1+v\mu_2)\psi_1, & (0,T)\times(0,1),\\ \Psi(\cdot,0)=\Psi(\cdot,1)=0, & (0,T),\\ \Psi(0,\cdot)=0, & (0,1).\end{cases}$$

Using (6.2.2), the solution is given by: $\forall t\in[0,T]$,

$$\Psi(t) = i\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\langle\mu_1\varphi_1,\varphi_j\rangle\int_0^t u(s)e^{i\omega_j s}\mathrm{d}s + \langle\mu_2\varphi_1,\varphi_j\rangle\int_0^t v(s)e^{i\omega_j s}\mathrm{d}s\right)\psi_j(t). \tag{6.2.7}$$

Definition 6.2.5 (Weak norms of Sobolev spaces)**.** *For any integer $k\in\mathbb{N}^*$, the negative $H^{-k}(0,T)$ space is endowed with the norm: $\forall u\in H^{-k}(0,T)$,*

$$\|u\|_{H^{-k}(0,T)} := |u_1(T)| + \|u_k\|_{L^2(0,T)}.$$

Proposition 6.2.6 (Weak estimates)**.** *Let $T>0$, $k,p\in\mathbb{N}$ be such that $k\leq p$, μ_1,μ_2 be two functions satisfying $(\mathbf{H})_{\mathbf{reg}}$ and $u,v\in H^m_0(0,T)$. For every $R>0$, there exists a constant $C=C(T,\mu_1,\mu_2,R)>0$ such that, if $\|u\|_{H^m},\|v\|_{H^m}<R$ and $u_2(T)=\cdots=u_{k+1}(T)=0$, $v_1(T)=\cdots=v_{k+1}(T)=0$, the following estimates hold: for all $l=-(k+1),\cdots,m$,*

$$\|(\psi(T;(u,v),\varphi_1)-\psi_1-\Psi)(T)\|_{H^{2(p+l)+3}_{(0)}} \leq C\|(u,v)\|_{H^l}\|(u,v)\|_{H^m}. \tag{6.2.8}$$

Proof. This point is proved in [Bou23a, Proposition 4.5]. □

In the framework of this work, $(\mathbf{H})_{\mathbf{lin},\mathbf{K},\mathbf{1}}$ implies $\langle\Psi(T),\varphi_K\rangle\equiv 0$, for every controls (u,v). To determine the evolution of ψ in this direction, we refine the approximation and extend the development of the solution to the quadratic term. The second-order term $\xi\in\mathcal{C}^m\left([0,T],H^{2p+3}_{(0)}(0,1)\right)$ is the solution to the following system

$$\begin{cases} i\partial_t\xi = -\partial_x^2\xi - (u\mu_1+v\mu_2)\Psi, & (0,T)\times(0,1),\\ \xi(\cdot,0)=\xi(\cdot,1)=0, & (0,T),\\ \xi(0,\cdot)=0, & (0,1).\end{cases}$$

We will sometimes note $\xi(\cdot;(u,v))$ for more precision. The idea is that $\psi(T;(u,v),\varphi_1)\simeq\psi_1(T)+\Psi(T)+\xi(T)$. Thus, $\langle\psi(T;(u,v),\varphi_1),\psi_K(T)\rangle\simeq 0+0+\langle\xi(T),\psi_K(T)\rangle$, the first term being 0 thanks to orthogonality ($K \neq 1$) and the second one by hypothesis $(\mathbf{H})_{\mathbf{lin,K,1}}$. For $1 \leq \alpha, \beta \leq 2$, one defines

$$h_{\alpha,\beta} : (t,s) \in [0,T]^2 \mapsto - \sum_{j=1}^{+\infty} \langle \mu_\alpha \varphi_1, \varphi_j \rangle \langle \varphi_j, \mu_\beta \varphi_K \rangle e^{i\nu_j t + i\omega_j s}. \tag{6.2.9}$$

We finally use the notation, for $u, v \in L^2((0,T), \mathbb{R})$,

$$\mathcal{F}_T^1(u) := \int_0^T u(t) \left(\int_0^t h_{1,1}(t,s) u(s) \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t, \qquad \mathcal{F}_T^2(v) := \int_0^T v(t) \left(\int_0^t h_{2,2}(t,s) v(s) \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t, \tag{6.2.10}$$

$$\mathcal{G}_T(u,v) := \int_0^T u(t) \left(\int_0^t h_{2,1}(t,s) v(s) \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t + \int_0^T v(t) \left(\int_0^t h_{1,2}(t,s) u(s) \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t. \tag{6.2.11}$$

The formulas (6.2.2) and (6.2.7) lead to

$$\langle \xi(T), \psi_K(T) \rangle = \mathcal{F}_T^1(u) + \mathcal{G}_T(u,v) + \mathcal{F}_T^2(v). \tag{6.2.12}$$

Lemma 6.2.7. *Assume that μ_1, μ_2 satisfy $(\mathbf{H})_{\mathbf{reg}}$. Then, as $\|(u,v)\|_{L^2} \to 0$,*

$$\|\psi(\cdot; (u,v), \varphi_1) - \psi_1 - \Psi - \xi\|_{L^\infty\left((0,T), H^{2p+3}_{(0)}\right)} = \mathcal{O}\left(\|u\|^3_{L^2(0,T)} + \|v\|^3_{L^2(0,T)} \right). \tag{6.2.13}$$

Proof. First step: linear remainder. One defines $\Lambda : t \in [0,T] \mapsto \psi(t; (u,v), \varphi_1) - \psi_1(t)$. The function Λ is solution to the following PDE

$$\begin{cases} i\partial_t \Lambda = -\partial_x^2 \Lambda - (u\mu_1 + v\mu_2)\Lambda - (u\mu_1 + v\mu_2)\psi_1, & (0,T) \times (0,1), \\ \Lambda(\cdot, 0) = \Lambda(\cdot, 1) = 0, & (0,T), \\ \Lambda(0, \cdot) = 0, & (0,1). \end{cases}$$

As $\psi_1(t) \in H^{2p+3}_{(0)}(0,1)$ and μ_1, μ_2 verify $(\mathbf{H})_{\mathbf{reg}}$, Remark 6.2.3 ensures that one has $(u(t)\mu_1 + v(t)\mu_2)\psi_1(t) \in H^{2p+3} \cap H^{2p+1}_{(0)}(0,1)$. Then, we can use (6.2.3) with $m = 0$ to obtain

$$\|\Lambda\|_{L^\infty\left((0,T), H^{2p+3}_{(0)}\right)} \leq C \|(u\mu_1 + v\mu_2)\psi_1\|_{L^2((0,T), H^{2p+3})}. \tag{6.2.14}$$

Note that

$$\|u\mu_1\psi_1\|^2_{L^2((0,T),H^{2p+3})} = \int_0^T |u(t)|^2 \left\| \mu_1 \varphi_1 e^{-i\lambda_1 t} \right\|^2_{H^{2p+3}} \mathrm{d}t = \|\mu_1\varphi_1\|^2_{H^{2p+3}} \|u\|^2_{L^2(0,T)}.$$

We can obtain the same estimate for $\|v\mu_2\psi_1\|_{L^2((0,T),H^{2p+3})}$. Then, thanks to (6.2.14), one gets

$$\|\psi(\cdot; (u,v), \varphi_1) - \psi_1\|_{L^\infty\left((0,T), H^{2p+3}_{(0)}\right)} = \mathcal{O}\left(\|u\|_{L^2(0,T)} + \|v\|_{L^2(0,T)} \right).$$

Second step: quadratic remainder. Using the same strategy, one defines $\Lambda : t \in [0,T] \mapsto \psi(t; (u,v), \varphi_1) - \psi_1(t) - \Psi(t)$. The function Λ is solution to the following PDE

$$\begin{cases} i\partial_t \Lambda = -\partial_x^2 \Lambda - (u\mu_1 + v\mu_2)\left(\psi(\cdot; (u,v), \varphi_1) - \psi_1\right), & (0,T) \times (0,1), \\ \Lambda(\cdot, 0) = \Lambda(\cdot, 1) = 0, & (0,T), \\ \Lambda(0, \cdot) = 0, & (0,1). \end{cases}$$

By the same way, one can use the estimate (6.2.3) with $m = 0$ in this equation to obtain

$$\|\Lambda\|_{L^\infty\left((0,T),H^{2p+3}_{(0)}\right)} \leq C \left\|(u\mu_1 + v\mu_2)\left(\psi(\cdot;(u,v),\varphi_1) - \psi_1\right)\right\|_{L^2((0,T),H^{2p+3})}.$$

Computing this norm and using the algebra structure of the Sobolev space $H^{2p+3}(0,1)$,

$$\begin{aligned} &\left\|u\mu_1\left(\psi(\cdot;(u,v),\varphi_1) - \psi_1\right)\right\|_{L^2((0,T),H^{2p+3})} \\ &\leq C \left\|\psi(\cdot;(u,v),\varphi_1) - \psi_1\right\|_{L^\infty\left((0,T),H^{2p+3}_{(0)}\right)} \|\mu_1\|_{H^{2p+3}} \|u\|_{L^2(0,T)}. \end{aligned} \tag{6.2.15}$$

Then, using the inequality proved in the first step in (6.2.15), we obtain

$$\left\|\psi(\cdot;(u,v),\varphi_1) - \psi_1 - \Psi\right\|_{L^\infty\left((0,T),H^{2p+3}_{(0)}\right)} = \mathcal{O}\left(\|u\|^2_{L^2(0,T)} + \|v\|^2_{L^2(0,T)}\right).$$

Third step: cubic remainder. Once again, one defines

$$\Lambda : t \in [0,T] \mapsto \psi(t;(u,v),\varphi_1) - \psi_1(t) - \Psi(t) - \xi(t).$$

The function Λ is solution to the following PDE

$$\begin{cases} i\partial_t \Lambda = -\partial_x^2 \Lambda - (u\mu_1 + v\mu_2)\left(\psi(\cdot;(u,v),\varphi_1) - \psi_1 - \Psi\right), & (0,T)\times(0,1), \\ \Lambda(\cdot,0) = \Lambda(\cdot,1) = 0, & (0,T), \\ \Lambda(0,\cdot) = 0, & (0,1). \end{cases}$$

One uses the estimate (6.2.3) with $m = 0$ in this equation to obtain

$$\|\Lambda\|_{L^\infty\left((0,T),H^{2p+3}_{(0)}\right)} \leq C \left\|(u\mu_1 + v\mu_2)\left(\psi(\cdot;(u,v),\varphi_1) - \psi_1 - \Psi\right)\right\|_{L^2((0,T),H^{2p+3})}.$$

Using the algebra structure of the Sobolev space $H^{2p+3}(0,1)$,

$$\begin{aligned} &\left\|u\mu_1\left(\psi(\cdot;(u,v),\varphi_1) - \psi_1 - \Psi\right)\right\|_{L^2((0,T),H^{2p+3})} \\ &\leq C \left\|\psi(\cdot;(u,v),\varphi_1) - \psi_1 - \Psi\right\|_{L^\infty\left((0,T),H^{2p+3}_{(0)}\right)} \|\mu_1\|_{H^{2p+3}} \|u\|_{L^2(0,T)}. \end{aligned} \tag{6.2.16}$$

Then, using the inequality proved in the second step in (6.2.16), we obtain

$$\left\|\psi(\cdot;(u,v),\varphi_1) - \psi_1 - \Psi - \xi\right\|_{L^\infty\left((0,T),H^{2p+3}_{(0)}\right)} = \mathcal{O}\left(\|u\|^3_{L^2(0,T)} + \|v\|^3_{L^2(0,T)}\right).$$

□

6.2.3 Control in projection

The following result is adapted from a result proved by Bournissou in [Bou23a]. This theorem gives the controllability in projection on $\mathcal{H}$, defined in (3.2.7). More precisely, the statement is the following.

Theorem 6.2.8. *Let $p, m, k \geq 0$, $K \geq 2$, such that $k \leq p$, μ_1, μ_2 functions satisfying* $(\mathbf{H})_{\mathbf{reg}}$ *and* $(\mathbf{H})_{\mathbf{lin,K,2}}$. *Then, the bilinear Schrödinger equation (3.1.1) is H_0^m−STLC in projection on $\mathcal{H}$ around the ground state in $H_{(0)}^{2(p+m)+3}$. More precisely, for any $T_1 < T$, there exist $\delta, C > 0$ and a $\mathcal{C}^1$ map $\Gamma_{T_1,T} : \mathcal{V}_{T_1} \times \mathcal{V}_T \to H_0^m((T_1,T),\mathbb{R})^2$, where*

$$\mathcal{V}_{T_1} := \left\{ \psi_0 \in \mathcal{S} \cap H_{(0)}^{2(p+m)+3}(0,1), \quad \|\psi_0 - \psi_1(T_1)\|_{H_{(0)}^{2(p+m)+3}} < \delta \right\}$$

$$\mathcal{V}_{T} := \left\{ \psi_f \in \mathcal{H} \cap H_{(0)}^{2(p+m)+3}(0,1), \quad \|\psi_f - \psi_1(T)\|_{H_{(0)}^{2(p+m)+3}} < \delta \right\}$$

such that, $\Gamma_{T_1,T}(\psi_1(T_1), \psi_1(T)) = (0,0)$ and for every $\psi_0, \psi_f \in \mathcal{V}_{T_1} \times \mathcal{V}_T$, the solution to (3.1.1) on (T_1, T) with initial data ψ_0 in $t = T_1$ and controls $u, v := \Gamma_{T_1,T}(\psi_0, \psi_f)$ satisfies

$$\mathbb{P}_{\mathcal{H}}\left(\psi(T; \Gamma_{T_1,T}(\psi_0,\psi_f), \psi_0)\right) = \psi_f,$$

with the following boundary conditions

$$u_2(T) = \cdots = u_{k+1}(T) = 0 \quad \text{and} \quad v_2(T) \cdots = v_{k+1}(T) = 0.$$

Finally, for all $l \in \{-(k+1), \cdots, m\}$,

$$\|u\|_{H^l} \leq C \left(\|\psi_0 - \psi_1(T_1)\|_{H_{(0)}^{2(p+l)+3}} + \|\psi_f - \psi_1(T)\|_{H_{(0)}^{2(p+l)+3}} \right). \tag{6.2.17}$$

Moreover, if $\langle \mu_1\varphi_1, \varphi_1\rangle \neq 0$, one can ensure $v_1(T) = 0$.

Remark 6.2.9. *The hypothesis $\langle \mu_1\varphi_1, \varphi_1\rangle \neq 0$ allows us to solve the moment problems (given by the linear test) in the direction φ_1 with the control u. Indeed, since $\omega_1 = 0$,*

$$\langle \Psi(T), \psi_1(T)\rangle = i\langle \mu_1\varphi_1, \varphi_1\rangle u_1(T) + i\langle \mu_2\varphi_1, \varphi_1\rangle v_1(T).$$

Thus, one can impose the border condition $v_1(T) = 0$. This property is also verified by the nonlinear system thanks to the iteration on the Banach fixed-point theorem.

6.3 Proof of the main theorem

The proof of the main theorem is divided in the following steps.

1. In the first step, we use the quadratic expansion of the solution in the direction $\psi_K(T)$ (given by Proposition 6.3.1) to move along the real direction lost $i^n\varphi_K$.
2. In the second step, we correct linearly the system in the other directions $\mathcal{H}$, thanks to Theorem 6.2.8. Then, we examine the impact of this second step on the correction made in the first one. *A priori*, the second step can destroy the work of the first and we use weak estimates to prove that this is not the case.
3. We use a trick introduced by Kawski in [HK87], executed by Bournissou in [Bou24] and explained in Appendix D to move along the other real direction lost $i^{n+1}\varphi_K$.
4. We apply Theorem 3.3.4 (based on the Brouwer fixed-point theorem) to obtain STLC.

In order to extract the leading terms of the dynamic of the system (as in the finite-dimensional case, with the Magnus-type representation formula), we manipulate the expression given by (6.2.12). This is the purpose of the following subsection.

6.3.1 Asymptotic estimates on the quadratic term of the solution

Notation. *For $T>0$, $j\geq 1$ and $u,v\in L^2(0,T)$, we use the notation*

$$I_T^j(u,v):=\int_0^T u(t)e^{i\nu_j t}\left(\int_0^t v(s)e^{i\omega_j s}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t,\qquad \mathcal{I}_T(u,v):=\int_0^T u(t)v(t)e^{i\omega_K t}\mathrm{d}t.$$

We define $q:=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$. This notation will be used throughout the rest of the chapter. As a remainder, the sequence $(c_j)_{j\geq 1}$ is defined in Section 3.1 as $c_j=\langle\mu_1\varphi_1,\varphi_j\rangle\langle\mu_1\varphi_j,\varphi_K\rangle$. The goal of this subsection is to prove the following proposition.

Proposition 6.3.1. *Let $u,v\in L^2((0,T),\mathbb{R})$ be such that $u_i(T)=v_i(T)=0$ for $1\leq i\leq q+1$. Furthermore, assume that $(\mathbf{H})_{\mathbf{reg}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad},\mathbf{K},\mathbf{1}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad},\mathbf{K},\mathbf{2}}$ and $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad},\mathbf{K},\mathbf{3}}$ hold. Then,*

$$\begin{aligned}\langle\xi(T),\psi_K(T)\rangle={}&-iA_{q+1}^1\int_0^T u_{q+1}^2(t)e^{i\omega_K t}\mathrm{d}t+i^n\gamma_n\int_0^T u_{q+1}(t)v_{n-q}(t)e^{i\omega_K t}\mathrm{d}t\\&-iA_{q+1}^2\int_0^T v_{q+1}^2(t)e^{i\omega_K t}\mathrm{d}t+R_{T,1}^{q+1}(u)+\rho_T^{q+1}(u,v)+R_{T,2}^{q+1}(v).\end{aligned}\tag{6.3.1}$$

with

$$R_{T,1}^{q+1}(u):=(-1)^q\sum_{j=1}^{+\infty}c_j\omega_j^{q+1}\nu_j^{q+1}I_T^j(u_{q+1},u_{q+1}),$$

$$R_{T,2}^{q+1}(v):=(-1)^q\sum_{j=1}^{+\infty}\tilde{c}_j\omega_j^{q+1}\nu_j^{q+1}I_T^j(v_{q+1},v_{q+1}),$$

$$\rho_T^{q+1}(u,v):=(-i)^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{+\infty}d_j\omega_j^{n-q}\nu_j^{q+1}I_T^j(u_{q+1},v_{n-q})+\sum_{j=1}^{+\infty}\tilde{d}_j\omega_j^{q+1}\nu_j^{n-q}I_T^j(v_{n-q},u_{q+1})\right).$$

The proof is divided into several lemmas. The first one, strongly inspired by [Bou23b, Proposition 5.1], focuses on the first term on the right-hand side of the decomposition given in (6.2.12).

Lemma 6.3.2. *Let $T>0$, $0\leq l\leq q$ and assume that $u\in L^2((0,T),\mathbb{R})$ such that $u_i(T)=0$ for $2\leq i\leq l+1$. If $(\mathbf{H})_{\mathbf{reg}}$ holds, then*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_T^1(u)={}&-u_1(T)\sum_{j=1}^{+\infty}c_je^{i\nu_j T}\left(\int_0^T u(s)e^{i\omega_j s}\mathrm{d}s\right)+\frac{u_1(T)^2}{2}e^{i\omega_K T}\sum_{j=1}^{+\infty}c_j\\&-i\sum_{k=1}^{l+1}A_k^1\int_0^T u_k^2(t)e^{i\omega_K t}\mathrm{d}t+R_{T,1}^{l+1}(u).\end{aligned}\tag{6.3.2}$$

Proof. We prove the statement by a finite induction on $l\in[\![0,q]\!]$. If the formula is true for a fixed $l\leq q-1$, then, for all $u\in L^2((0,1),\mathbb{R})$ such that $u_i(T)=0$ for $2\leq i\leq l+2$, an integration by parts gives

$$(-1)^lR_{T,1}^{l+1}(u)=A+B,\tag{6.3.3}$$

with

$$A = -i\sum_{j=1}^{+\infty} c_j \omega_j^{l+1}\nu_j^{l+2} I_T^j(u_{l+2}, u_{l+1}), \qquad B := -\sum_{j=1}^{+\infty} c_j \omega_j^{l+1}\nu_j^{l+1}\mathcal{I}_T(u_{l+2}, u_{l+1}).$$

Then, with one integration by parts, we obtain

$$A = -i\sum_{j=1}^{+\infty} c_j \omega_j^{l+1}\nu_j^{l+2}\int_0^T u_{l+2}^2(t)e^{i\omega_K t}\mathrm{d}t + (-1)^l R_{T,1}^{l+2}(u). \tag{6.3.4}$$

$$B = \frac{i\omega_K}{2}\sum_{j=1}^{+\infty} c_j \omega_j^{l+1}\nu_j^{l+1}\int_0^T u_{l+2}^2(t)e^{i\omega_K t}\mathrm{d}t. \tag{6.3.5}$$

Using (6.3.3), (6.3.4), (6.3.5) and the induction hypothesis, we conclude. The initialization is proved by the same manipulations, but there are boundary terms. The starting point is the equality given by (6.2.9) and (6.2.10),

$$\mathcal{F}_T^1(u) = -\sum_{j=1}^{+\infty} c_j I_T^j(u, u).$$

All series converge thanks to the hypothesis $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq p$ – see Remark 3.1.2. □

One recalls that, for any integer $k \in \mathbb{N}^*$, the negative $H^{-k}(0,T)$ space is endowed with the norm: $\forall u \in H^{-k}(0,T)$, $\|u\|_{H^{-k}(0,T)} := |u_1(T)| + \|u_k\|_{L^2(0,T)}$. Using the expression of Lemma 6.3.2, one can obtain the following estimate.

Corollary 6.3.3. *Let $T > 0$ and assume that $u \in L^2((0,T),\mathbb{R})$ such that $u_i(T) = 0$ for $2 \leq i \leq q+1$. If $(\mathbf{H})_{\mathbf{reg}}$ and $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad,K,1}}$ hold, then*

$$\left|\mathcal{F}_T^1(u)\right| = \mathcal{O}\left(|u_1(T)|^2 + \|u_{q+1}\|_{L^2}^2\right) = \mathcal{O}\left(\|u\|_{H^{-(q+1)}}^2\right). \tag{6.3.6}$$

Proof. Using Lemma 6.3.2 with $l = q$, we obtain

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_T^1(u) = -u_1(T)\sum_{j=1}^{+\infty} c_j e^{i\nu_j T}\left(\int_0^T u(s)e^{i\omega_j s}\mathrm{d}s\right) + \frac{u_1(T)^2}{2}e^{i\omega_K T}\sum_{j=1}^{+\infty} c_j \\ -iA_{q+1}^1\int_0^T u_{q+1}^2(t)e^{i\omega_K t}\mathrm{d}t + R_{T,1}^{q+1}(u).\end{aligned}$$

Note that $A_{q+1}^1 = 0$ when n is odd, but not necessarily when n is even. We can manipulate the first term: using integrations by parts,

$$\sum_{j=1}^{+\infty} c_j e^{i\nu_j T}\left(\int_0^T u(s)e^{i\omega_j s}\mathrm{d}s\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} c_j e^{i\nu_j T}\left(u_1(T)e^{i\omega_j T} + (-i\omega_j)^{q+1}\int_0^T u_{q+1}(s)e^{i\omega_j s}\mathrm{d}s\right).$$

Finally, the term $R_{T,1}^{q+1}(u)$ is estimated by $\|u\|_{H^{-(q+1)}}^2$ because, for all $j \geq 1$,

$$\left|I_T^j(u_{q+1}, u_{q+1})\right| \leq \|u_{q+1}\|_{L^1}^2.$$

This formula leads to the result. □

Now, we can follow the same approach with the crossed terms. More precisely, we focus on the second term on the right-hand side of the decomposition given by (6.2.12).

Lemma 6.3.4. *Let $T>0$ and assume that $u,v\in L^2((0,T),\mathbb{R})$ such that $u_i(T)=0$ for $2\leq i\leq q+1$ and $v_i(T)=0$ for $1\leq i\leq q+1$. If $(\mathbf{H})_{\mathbf{reg}}$ holds, then*

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_T(u,v)=\sum_{k=1}^{q}(-1)^k\gamma_{2k}\mathcal{I}_T(u_{k+1},v_k)+i\sum_{k=0}^{n-q-1}(-1)^k\gamma_{2k+1}\mathcal{I}_T(u_{k+1},v_{k+1})\\ -u_1(T)\sum_{j=1}^{+\infty}d_je^{i\nu_jT}\left(\int_0^T v(s)e^{i\omega_js}\mathrm{d}s\right)+\rho_T^{q+1}(u,v).\end{aligned}\tag{6.3.7}$$

Proof. We deal with the case where n is odd. Thanks to (6.2.9) and (6.2.11), we obtain $\mathcal{G}_T(u,v)=-(A+B)$ with

$$A=\sum_{j=1}^{+\infty}d_jI_T^j(u,v),\qquad B=\sum_{j=1}^{+\infty}\tilde{d}_jI_T^j(v,u).$$

First, we prove by a (finite) induction on $0\leq l\leq q$ that: for all $u,v\in L^2((0,T),\mathbb{R})$ such that $u_i(T)=0$ for $2\leq i\leq l+1$,

$$\begin{aligned}A=u_1(T)\sum_{j=1}^{+\infty}d_je^{i\nu_jT}\left(\int_0^T v(s)e^{i\omega_js}\mathrm{d}s\right)+(-1)^{l+1}\sum_{j=1}^{+\infty}d_j\omega_j^{l+1}\nu_j^{l+1}I_T^j(u_{l+1},v_{l+1})\\ +\sum_{k=0}^{l}(-1)^{k+1}\sum_{j=1}^{+\infty}d_j\omega_j^k\nu_j^k\mathcal{I}_T(u_{k+1},v_k)+i\sum_{k=0}^{l}(-1)^{k+1}\sum_{j=1}^{+\infty}d_j\omega_j^k\nu_j^{k+1}\mathcal{I}_T(u_{k+1},v_{k+1}).\end{aligned}\tag{6.3.8}$$

For $l=0$, with an integration by parts on A, we get

$$A=u_1(T)\sum_{j=1}^{+\infty}d_je^{i\nu_jT}\left(\int_0^T v(s)e^{i\omega_js}\mathrm{d}s\right)-\sum_{j=1}^{+\infty}d_j\mathcal{I}_T(u_1,v)-i\sum_{j=1}^{+\infty}d_j\nu_jI_T^j(u_1,v).$$

Another integration on v by parts gives

$$\begin{aligned}A=u_1(T)\sum_{j=1}^{+\infty}d_je^{i\nu_jT}\left(\int_0^T v(s)e^{i\omega_js}\mathrm{d}s\right)-\sum_{j=1}^{+\infty}d_j\omega_j\nu_jI_T^j(u_1,v_1)\\ -\sum_{j=1}^{+\infty}d_j\mathcal{I}_T(u_1,v)-i\sum_{j=1}^{+\infty}d_j\nu_j\mathcal{I}_T(u_1,v_1).\end{aligned}$$

For the induction step, it suffices to do two integrations by parts in the formula given by the induction hypothesis. Similarly, we prove that for $0\leq l\leq q$, for all $u,v\in L^2((0,T),\mathbb{R})$ such that $v_i(T)=0$ for $1\leq i\leq l+1$,

$$\begin{aligned}B=\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\sum_{j=1}^{+\infty}\tilde{d}_j\omega_j^k\nu_j^k\mathcal{I}_T(u_{k+1},v_k)+i\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\sum_{j=1}^{+\infty}\tilde{d}_j\omega_j^{k+1}\nu_j^k\mathcal{I}_T(u_{k+1},v_{k+1})\\ +(-1)^{l+1}\sum_{j=1}^{+\infty}\tilde{d}_j\omega_j^{l+1}\nu_j^{l+1}I_T^j(v_{l+1},u_{l+1}).\end{aligned}\tag{6.3.9}$$

Using $\mathcal{G}_T(u,v) = -(A+B)$, (6.3.8) and (6.3.9) with $l = q$, we conclude. To obtain the result in the even case, we manipulate the expression in the same way, with v_q instead of v_{q+1}. Once again, all the series converge thanks to the hypothesis $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq p$ – see Remark 3.1.2. □

Using the expression given by Lemma 6.3.4, we get the following estimate.

Corollary 6.3.5. *Let $T > 0$, $u, v \in L^2((0,T),\mathbb{R})$ be such that, $u_i(T) = 0$ for $2 \leq i \leq q+1$, $v_i(T) = 0$ for $1 \leq i \leq q+1$. If $(\mathbf{H})_{\mathbf{reg}}$ and $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad},\mathbf{K},\mathbf{3}}$ hold,*

$$|\mathcal{G}_T(u,v)| = \mathcal{O}\left(\|u\|_{H^{-(q+1)}} \|v\|_{H^{-(n-q)}}\right). \tag{6.3.10}$$

Proof. We deal with the case where n is odd, so $n = 2q+1$. First, using Lemma 6.3.4 and $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad},\mathbf{K},\mathbf{3}}$, we obtain

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_T(u,v) = -u_1(T)\sum_{j=1}^{+\infty} d_j e^{i\nu_j T}(-i\omega_j)^{q+1}\left(\int_0^T v_{q+1}(s)e^{i\omega_j s}\mathrm{d}s\right) + \rho_T^{q+1}(u,v) \\ + i(-1)^q\gamma_n \mathcal{I}_T(u_{q+1}, v_{q+1}).\end{aligned}$$

This equality leads to the result, by definition of the norm in a negative Sobolev space, as

$$\left|\rho_T^{q+1}(u,v)\right| \leq C\,\|u\|_{H^{-(q+1)}} \|v\|_{H^{-(q+1)}}, \quad |\mathcal{I}_T(u_{q+1}, v_{q+1})| \leq C\,\|u\|_{H^{-(q+1)}} \|v\|_{H^{-(q+1)}}.$$

We can prove this statement in the same way when n is even. □

With the two Lemmas 6.3.2 and 6.3.4, we are now able to prove the main result of this subsection.

Proof of Proposition 6.3.1. Once again, we deal with the case where n is odd. Then, using the hypothesis $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad},\mathbf{K},\mathbf{1}}$, Lemma 6.3.2 with $l = q$ gives

$$\mathcal{F}_T^1(u) = R_{T,1}^{q+1}(u). \tag{6.3.11}$$

Similarly, the hypothesis $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad},\mathbf{K},\mathbf{2}}$ leads to

$$\mathcal{F}_T^2(v) = R_{T,2}^{q+1}(v). \tag{6.3.12}$$

Using Lemma 6.3.4 and $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad},\mathbf{K},\mathbf{3}}$, one has

$$\mathcal{G}_T(u,v) = i(-1)^q\gamma_n \int_0^T u_{q+1}(t)v_{q+1}(t)e^{i\omega_K t}\mathrm{d}t + \rho_T^{q+1}(u,v). \tag{6.3.13}$$

Using the equations (6.2.12), (6.3.11), (6.3.12) and (6.3.13), we obtain (6.3.1). □

6.3.2 A concatenation lemma

For all the rest of the chapter, we assume that $(\mathbf{H})_{\mathbf{reg}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{lin},\mathbf{K},\mathbf{1}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{lin},\mathbf{K},\mathbf{2}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad},\mathbf{K},\mathbf{1}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad},\mathbf{K},\mathbf{2}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad},\mathbf{K},\mathbf{3}}$ and $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad},\mathbf{K},\mathbf{4}}$ hold. The goal of the following lemma is to examine the interaction between the first and the second step.

Lemma 6.3.6 (A composition lemma). *Assume that* $\langle \mu_1\varphi_1, \varphi_1\rangle \neq 0$. *Let* $0 < T_1 < T$, $u, v \in L^2(0, T_1)$ *be two functions such that* $u_i(T_1) = v_i(T_1) = 0$ *for* $1 \leq i \leq q+1$. *Let* $(\tilde{u}, \tilde{v}) = \Gamma_{T_1,T}(\psi(T_1; (u,v), \varphi_1), \psi_1(T))$, *where* Γ *is defined in Theorem 6.2.8. Finally, one defines* $U = u\mathbb{1}_{(0,T_1)} + \tilde{u}\mathbb{1}_{(T_1,T)}$ *and* $V = v\mathbb{1}_{(0,T_1)} + \tilde{v}\mathbb{1}_{(T_1,T)}$. *Then,*

$$\begin{aligned}\langle \xi(T; (U,V)), \psi_K(T)\rangle - \langle \xi(T_1; (u,v)), \psi_K(T_1)\rangle = \mathcal{O}\Big(&\|(\tilde{u},\tilde{v})\|^2_{H^{-(q+1)}} \\ &+ \|(u,v)\|_{H^{-(q+1)}} \|(\tilde{u},\tilde{v})\|_{H^{-(q+1)}} + \|\tilde{u}\|_{H^{-(q+1)}} \|\tilde{v}\|_{H^{-(n-q)}} \Big).\end{aligned} \tag{6.3.14}$$

Proof. Using the formula (6.2.12), we get

$$\langle \xi(T; (U,V)), \psi_K(T)\rangle - \langle \xi(T_1; (u,v)), \psi_K(T_1)\rangle = \langle \xi(T; (\tilde{u},\tilde{v})), \psi_K(T)\rangle + G_{T_1,T}(U,V), \tag{6.3.15}$$

where $G_{T_1,T}$ is the bilinear form given by

$$\begin{aligned} G_{T_1,T}(U,V) = &\int_{T_1}^{T} \tilde{u}(t) \left(\int_0^{T_1} h_{1,1}(t,s)u(s)\mathrm{d}s + \int_0^{T_1} h_{2,1}(t,s)v(s)\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t \\ &+ \int_{T_1}^{T} \tilde{v}(t) \left(\int_0^{T_1} h_{1,2}(t,s)u(s)\mathrm{d}s + \int_0^{T_1} h_{2,2}(t,s)v(s)\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{6.3.16}$$

Each term of (6.3.16) can be written as a sum of product of two integrals, *e.g.*

$$\int_{T_1}^{T} \tilde{u}(t) \left(\int_0^{T_1} h_{1,1}(t,s)u(s)\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t = -\sum_{j=1}^{+\infty} c_j \left(\int_{T_1}^{T} \tilde{u}(t)e^{i\nu_j t}\mathrm{d}t \right) \left(\int_0^{T_1} u(s)e^{i\omega_j s}\mathrm{d}s \right).$$

Using integrations par parts, one can write the expression as

$$-\sum_{j=1}^{+\infty} c_j \left(\tilde{u}_1(T)e^{i\nu_j T} + (-i\nu_j)^{q+1} \int_{T_1}^{T} \tilde{u}_{q+1}(t)e^{i\nu_j t}\mathrm{d}t \right) (-i\omega_j)^{q+1} \int_0^{T_1} u_{q+1}(s)e^{i\omega_j s}\mathrm{d}s.$$

By Cauchy–Schwarz's inequality,

$$\left| \int_{T_1}^{T} \tilde{u}(t) \left(\int_0^{T_1} h_{1,1}(t,s)u(s)\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t \right| \leq C \|(u,v)\|_{H^{-(q+1)}} \|(\tilde{u},\tilde{v})\|_{H^{-(q+1)}}.$$

We obtain the same estimation with the other terms of (6.3.16). Thus,

$$G_{T_1,T}(U,V) = \mathcal{O}\left(\|(u,v)\|_{H^{-(q+1)}} \|(\tilde{u},\tilde{v})\|_{H^{-(q+1)}} \right). \tag{6.3.17}$$

Moreover,

$$\langle \xi(T; (\tilde{u},\tilde{v})), \psi_K(T)\rangle = \mathcal{F}_T^1(\tilde{u}) + \mathcal{F}_T^2(\tilde{v}) + \mathcal{G}_T(\tilde{u},\tilde{v}). \tag{6.3.18}$$

Using (6.3.15), (6.3.17), (6.3.18), (6.3.6) and (6.3.10) (thanks to the boundary conditions given by the STLC in projection Theorem 6.2.8), we obtain the result. The assumption $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq p$ gives the convergence of all the series written – see Remark 3.1.2. $\square$

6.3.3 Motion along φ_K and $i\varphi_K$

The next proposition implements step 1 of the proof strategy explained on Section 6.3.

Proposition 6.3.7. *We denote $s_n := \frac{1}{4(n+m+2)}$ and $\alpha_n := \frac{3}{8} + \frac{m}{8(n+m+2)}$ For all $T_1 > 0$, there exist $C, \rho > 0$ and a continuous map $z \mapsto (u_z, v_z)$ from $\mathbb{R}$ to $H_0^m(0,T_1)^2$ such that*

$$\forall z \in (-\rho,\rho), \qquad |\langle \psi(T_1;(u_z,v_z),\varphi_1), \psi_K(T_1)\rangle - i^n z| \leq C|z|^{1+s_n}. \tag{6.3.19}$$

The size of the controls is given by: for all $k \in \mathbb{Z}_{\geq -(q+1)}$, for all $r \in [1,+\infty]$, there exists $C > 0$ such that

$$\forall z \in (-\rho,\rho), \qquad \|u_z\|_{W^{k,r}}, \|v_z\|_{W^{k,r}} \leq C|z|^{\alpha_n + s_n(\frac{1}{r}-k)}. \tag{6.3.20}$$

Finally, for all $\varepsilon \in (0, \frac{3}{4})$, there exists $C > 0$ so that for all $z \in (-\rho,\rho)$,

$$\|\psi(T_1;(u_z,v_z),\varphi_1) - \psi_1(T_1)\|_{H^{2(p+l)+3}_{(0)}} \leq C|z|^{\tau_l}, \qquad l = -(q+1), \cdots, m, \tag{6.3.21}$$

with $\tau_l := \alpha_n + s_n\left(\frac{3}{4} - \varepsilon - l\right) > \frac{1}{4}$. Note that $\tau_{-(q+1)} > \frac{1}{2}$ if $\varepsilon < \frac{1}{4}$.

Proof. Let $T_1 > 0$ and $\rho = T_1^{\frac{1}{s_n}}$. Thanks to $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad,K,4}}$, we considers $\bar{u}, \bar{v} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})^2$ such that $\mathrm{Supp}(\bar{u}), \mathrm{Supp}(\bar{v}) \subset (0,1)$ and $\displaystyle\int_0^1 \bar{u}(t)\bar{v}^{(2q+1-n)}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\gamma_n}$. Then, we define for $z \in \mathbb{R}^*$,

$$u_z, v_z : t \in [0,T_1] \mapsto \mathrm{sgn}(z)|z|^{\alpha_n}\bar{u}^{(q+1)}\left(\frac{t}{|z|^{s_n}}\right), |z|^{\alpha_n}\bar{v}^{(q+1)}\left(\frac{t}{|z|^{s_n}}\right).$$

For all $z \in (-\rho,\rho)$, one has

$$\mathrm{Supp}\left((u_z)_{q+1}\right), \mathrm{Supp}\left((v_z)_{q+1}\right) \subset (0,|z|^{s_n}) \subset (0,T_1). \tag{6.3.22}$$

By definition,

$$\text{for all } z \in (-\rho,\rho), \text{ for all } i \in [\![1,q+1]\!], \quad (u_z)_i(T_1) = (v_z)_i(T_1) = 0. \tag{6.3.23}$$

Then, we can compute the norm of the controls. For all $k \in \mathbb{Z}_{\geq -(q+1)}$, $r \in [1,+\infty[$, using, the notation $u^{(k)} = u_{-k}$ if $k < 0$ and the Poincaré's inequality, we get for all $z \in (-\rho,\rho)\setminus\{0\}$,

$$\begin{aligned}\|u_z\|^r_{W^{k,r}} &\leq C\left\|u_z^{(k)}\right\|^r_{L^r} = C\int_0^1 \left||z|^{\alpha_n - ks_n}\bar{u}^{(q+1+k)}\left(\frac{t}{|z|^{s_n}}\right)\right|^r \mathrm{d}t \\ &\leq C|z|^{(\alpha_n - ks_n)+\frac{s_n}{r}}\left\|\bar{u}^{(q+1+k)}\right\|_{L^r}.\end{aligned}$$

The inequality with $r = +\infty$ is similarly proved. We prove the inequality for v_z in the same way to get (6.3.20). Then, the mapping can be extended to 0. The continuity is given by the previous inequality. We use the expansion (6.3.1), the support condition (6.3.22) and (6.3.23) to obtain,

$$\begin{aligned}\langle \xi(T_1), \psi_K(T_1)\rangle = i^n\gamma_n \int_0^{|z|^{s_n}} (u_z)_{q+1}(t)(v_z)_{n-q}(t)e^{i\omega_K t}\mathrm{d}t + \rho_{T_1}^{q+1}(u_z,v_z) + R^{q+1}_{T_1,1}(u_z) \\ + R^{q+1}_{T_1,2}(v_z) - iA^1_{q+1}\int_0^{|z|^{s_n}} (u_z)_{q+1}(t)^2 e^{i\omega_K t}\mathrm{d}t - iA^2_{q+1}\int_0^{|z|^{s_n}} (v_z)_{q+1}(t)^2 e^{i\omega_K t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Note that, for all $k \in [\![0, q+1]\!]$, one has $(u_z)_k = \text{sgn}(z)|z|^{\alpha_n + ks_n}\bar{u}^{(q+1-k)}\left(\frac{\cdot}{|z|^{s_n}}\right)$ and $(v_z)_k = |z|^{\alpha_n + ks_n}\bar{v}^{(q+1-k)}\left(\frac{\cdot}{|z|^{s_n}}\right)$. Then, with the change of variables $t = |z|^{s_n}\sigma$, one has

$$\langle \xi(T_1), \psi_K(T_1)\rangle = i^n \gamma_n \text{sgn}(z)|z|^{2\alpha_n + (n+2)s_n} \int_0^1 \bar{u}(\sigma)\bar{v}^{(2q+1-n)}(\sigma)e^{i\omega_K |z|^{s_n}\sigma}\mathrm{d}\sigma + \rho_{T_1}^{q+1}(u_z, v_z)$$
$$+R_{T_1,1}^{q+1}(u_z) + R_{T_1,2}^{q+1}(v_z) - i|z|^{2\alpha_n + (2q+3)s_n} \int_0^1 \left(A_{q+1}^1 \bar{u}(\sigma)^2 + A_{q+1}^2 \bar{v}(\sigma)^2\right) e^{i\omega_K |z|^{s_n}\sigma}\mathrm{d}\sigma. \tag{6.3.24}$$

Note that, if n is even then $n = 2q$. Else, n is odd, then, $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad},\mathbf{K},\mathbf{1}}$ and $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad},\mathbf{K},\mathbf{2}}$ gives $A_{q+1}^1 = A_{q+1}^2 = 0$. In all the cases, we obtain

$$|z|^{2\alpha_n + (2q+3)s_n} \left|\int_0^1 \left(A_{q+1}^1 \bar{u}(\sigma)^2 + A_{q+1}^2 \bar{v}(\sigma)^2\right) e^{i\omega_K |z|^{s_n}\sigma}\mathrm{d}\sigma\right| = \mathcal{O}\left(|z|^{2\alpha_n + (n+3)s_n}\right). \tag{6.3.25}$$

By definition of $R_{T_1,1}^{q+1}$, $\left|R_{T_1,1}^{q+1}(u_z)\right| \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \left|c_j \nu_j^{q+1}\omega_j^{q+1}\right| \left|I_{T_1}^j\left((u_z)_{q+1}, (u_z)_{q+1}\right)\right|$. Then, using the explicit formulation of $I_{T_1}^j$ and (6.3.20) with $(k, r) = (-(q+1), 1)$,

$$\left|R_{T_1,1}^{q+1}(u_z)\right| \leq C \left\|u_z\right\|_{W^{-(q+1),1}}^2 \leq C|z|^{2\alpha_n + 2(q+2)s_n} = \mathcal{O}\left(|z|^{2\alpha_n + (n+3)s_n}\right). \tag{6.3.26}$$

Similarly,

$$\left|R_{T_1,2}^{q+1}(v_z)\right| = \mathcal{O}\left(|z|^{2\alpha_n(n+3)s_n}\right). \tag{6.3.27}$$

Finally, one obtains with the same arguments

$$\left|\rho_{T_1}^{q+1}(u_z, v_z)\right| \leq C \left\|u_z\right\|_{W^{-(q+1),1}} \left\|v_z\right\|_{W^{-(n-q),1}} = \mathcal{O}\left(|z|^{2\alpha_n + (n+3)s_n}\right). \tag{6.3.28}$$

Using (6.3.25), (6.3.26), (6.3.27) and (6.3.28) in (6.3.24), noticing that $2\alpha_n + (n+2)s_n = 1$ and using the expansion $e^{i\omega_K |z|^{s_n}\sigma} = 1 + \mathcal{O}(|z|^{s_n})$, one has

$$\langle \xi(T_1), \psi_K(T_1)\rangle = i^n \gamma_n z \int_0^1 \bar{u}(\sigma)\bar{v}^{(2q+1-n)}(\sigma)\mathrm{d}\sigma + \mathcal{O}\left(|z|^{1+s_n}\right) = i^n z + \mathcal{O}\left(|z|^{1+s_n}\right),$$

by definition of $\bar{u}, \bar{v}$. Thus, using the error estimates (6.2.13) and the hypothesis $(\mathbf{H})_{\mathbf{lin},\mathbf{K},\mathbf{1}}$, we obtain

$$|\langle \psi(T_1; (u_z, v_z), \varphi_1), \psi_K(T_1)\rangle - i^n z| = \mathcal{O}\left(|z|^{1+s_n} + \|(u_z, v_z)\|_{L^2}^3\right).$$

Using (6.3.20) with $(k, r) = (0, 2)$, we obtain (6.3.19), as $1 + s_n \leq 3\alpha_n + \frac{3}{2}s_n$.

For the estimate (6.3.21), we use (6.2.8) with $k = q$ and (6.3.20) with $(k, r) \in \{(l, 2), (m, 2)\}$ to obtain the existence of $C > 0$ such that, for all $l = -(q+1), \cdots, m$,

$$\|\psi(T_1; (u_z, v_z), \varphi_1) - \psi_1(T_1) - \Psi(T_1)\|_{H_{(0)}^{2(p+l)+3}} \leq C|z|^{2\alpha_n + s_n(1-m-l)}. \tag{6.3.29}$$

Then, we estimate the linear term in weak norms. For all $j \geq 2$, for all $k \geq -(q+1)$, integrations by parts give (the same notation as previously is used for $k<0$) gives

$$\left|\int_0^{T_1} u_z(t)e^{i\omega_j(t-T_1)}\mathrm{d}t\right| = \left|\omega_j^{-k}\int_0^{T_1} u_z^{(k)}(t)e^{i\omega_j(t-T_1)}\mathrm{d}t\right| \leq C_k\omega_j^{-k}|z|^{\alpha_n+s_n(1-k)}, \tag{6.3.30}$$

thanks the inequality (6.3.20), with $(k,r)=(k,1)$. This inequality is true with $j=1$ because the left-hand size is zero. Let $k\in[\![-(q+1),m]\!]$ and $r\in[k,k+1]$. There exists $\theta\in[0,1]$ such that $r=k+\theta$. Then, using (6.3.30)

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{T_1} u_z(t)e^{i\omega_j(t-T_1)}\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_0^{T_1} u_z(t)e^{i\omega_j(t-T_1)}\mathrm{d}t\right|^{1-\theta}\left|\int_0^{T_1} u_z(t)e^{i\omega_j(t-T_1)}\mathrm{d}t\right|^{\theta}\\ &\leq \left(C_k\omega_j^{-k}|z|^{\alpha_n+s_n(1-k)}\right)^{1-\theta}\left(C_{k+1}\omega_j^{-(k+1)}|z|^{\alpha_n+s_n(1-(k+1))}\right)^{\theta}\\ &\leq \max_{k\in[\![-(q+1),m]\!]}\left(\max(1,C_k)\max(1,C_{k+1})\right)\omega_j^{-r}|z|^{\alpha_n+s_n(1-r)}.\end{aligned}$$

Then, the inequality (6.3.30) is true for k real; there exists $C>0$, uniform in k, such that, for every $j\in\mathbb{N}^*$ and $k\in[-(q+1),m+1]$,

$$\left|\int_0^{T_1} u_z(t)e^{i\omega_j(t-T_1)}\mathrm{d}t\right| \leq C\omega_j^{-k}|z|^{\alpha_n+s_n(1-k)}. \tag{6.3.31}$$

This inequality is also true with v_z. We want to apply this inequality with $k=l$. Nevertheless, the series diverges; we introduce a non-integer perturbation: let $\varepsilon\in(0,3/4)$ and $l\in\{-(q+1),\cdots,m\}$. With $k=\varepsilon+l+\frac{1}{4}$, one obtains

$$\|\Psi(T_1)\|_{H^{2(p+l)+3}_{(0)}} \leq C\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{j^{1+4\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{2}}|z|^{\tau_l}, \tag{6.3.32}$$

thanks to Remark 3.1.2 and the estimate (6.3.31). Using the equation (6.3.29) and (6.3.32), we obtain the desired inequality, because $\tau_l\leq 2\alpha_n+s_n(1-m-l)$. □

The following statement represents step 2 of the proof strategy explained at the beginning of Section 6.3.

Proposition 6.3.8. *Assume that $\langle\mu_1\varphi_1,\varphi_1\rangle\neq 0$. Then, the vector $i^n\varphi_K$ is a small-time H^m_0-continuously approximately reachable vector associated with vector variations $i^n\psi_K(T)$. More precisely, for all $T>0$, there exist $C,\rho>0$ and a continuous map $z\in\mathbb{R}\mapsto(U_z,V_z)\in H^m_0(0,T)^2$ such that*

$$\forall z\in(-\rho,\rho),\qquad \|\psi(T;(U_z,V_z),\varphi_1)-\psi_1(T)-i^nz\psi_K(T)\|_{H^{2(p+m)+3}_{(0)}} \leq C|z|^{1+\frac{1}{5}s_n}, \tag{6.3.33}$$

with the following size estimate on the family of controls

$$\|U_z\|_{H^m}, \|V_z\|_{H^m} \leq C|z|^{\frac{1}{4}}. \tag{6.3.34}$$

Proof. Let $0<T_1<T$, one defines controls that allow to move along $i^n\varphi_K$ and correcting the

linear part, thanks to hypothesis $(\mathbf{H})_{\mathbf{lin,K,2}}$. More precisely, for $z \in \mathbb{R}$,

$$U_z, V_z := u_z \mathbb{1}_{[0,T_1]} + \tilde{u}_z \mathbb{1}_{[T_1,T]}, v_z \mathbb{1}_{[0,T_1]} + \tilde{v}_z \mathbb{1}_{[T_1,T]},$$

where u_z, v_z are the controls defined by the previous proposition and $\tilde{u}_z, \tilde{v}_z$ are the controls given by the control in projection Theorem 6.2.8 with $k = q$, *i.e.*

$$\tilde{u}_z, \tilde{v}_z = \Gamma_{T_1,T}(\psi(T_1; (u_z, v_z), \varphi_1), \psi_1(T)).$$

Then, for all $z \in (-\rho, \rho)$ (with $\rho = \min(\rho_1, 1)$, where ρ_1 is given by the previous proposition with T_1),

$$\|U_z\|_{H^m}, \|V_z\|_{H^m} \leq \|(u_z, v_z)\|_{H^m} + \|(\tilde{u}_z, \tilde{u}_z)\|_{H^m}.$$

The first term is estimated by (6.3.20) with $(k, r) = (m, 2)$. For the second one, we use the simultaneous estimates (6.2.17) and (6.3.21) to obtain, for all $l \in [\![-(q+1), m]\!]$,

$$\|(\tilde{u}_z, \tilde{v}_z)\|_{H^l} \leq C \|\psi(T_1; (u_z, v_z), \varphi_1) - \psi_1(T_1)\|_{H^{2(p+l)+3}_{(0)}} \leq C|z|^{\tau_l}. \tag{6.3.35}$$

Noticing that $\tau_m > \frac{1}{4}$ and $\alpha_n + s_n(\frac{1}{2} - m) > \frac{1}{4}$, one has (6.3.34). For the motion along $i^n \varphi_K$, by construction

$$\mathbb{P}_{\mathcal{H}}(\psi(T; (U_z, V_z), \varphi_1)) = \psi_1(T) = \mathbb{P}_{\mathcal{H}}(\psi_1(T) + i^n z \psi_K(T)),$$

where $\mathcal{H}$ is defined in (3.2.7). Thus, we just estimate $| \langle \psi(T; (U_z, V_z), \varphi_1), \psi_K(T) \rangle - i^n z|$. Using the triangular inequality,

$$\begin{aligned} | \langle \psi(T; (U_z, V_z), \varphi_1), \psi_K(T) \rangle - i^n z| &\leq | \langle \psi(T_1; (u_z, v_z), \varphi_1), \psi_K(T_1) \rangle - i^n z| \\ &+ | \langle \psi(T; (U_z, V_z), \varphi_1), \psi_K(T) \rangle - \langle \psi(T_1; (u_z, v_z), \varphi_1), \psi_K(T_1) \rangle |. \end{aligned} \tag{6.3.36}$$

The first term is estimated by (6.3.19). To study the second one, we use the equations (6.3.14) and (6.2.13). Then, we get

$$\begin{aligned} | \langle \psi(T; (U_z, V_z), \varphi_1), \psi_K(T) \rangle - \langle \psi(T_1; (u_z, v_z), \varphi_1), \psi_K(T_1) \rangle | = \mathcal{O}\Big(\|(\tilde{u}_z, \tilde{v}_z)\|^2_{H^{-(q+1)}} \\ + \|(u_z, v_z)\|_{H^{-(q+1)}} \|(\tilde{u}_z, \tilde{v}_z)\|_{H^{-(q+1)}} + \|\tilde{u}_z\|_{H^{-(q+1)}} \|\tilde{v}_z\|_{H^{-(n-q)}} + \|(U_z, V_z)\|^3_{L^2} \Big). \end{aligned} \tag{6.3.37}$$

We choose $0 < \varepsilon < \frac{1}{48}$. We estimate these terms.

1. The error term: using (6.3.20) with $(k, r) = (0, 2)$ and (6.3.35) with $l = 0$ and because $\frac{1}{5} s_n \leq \frac{1}{16}$,

$$\begin{aligned} \|(U_z, V_z)\|^3_{L^2} &\leq C|z|^{3\alpha_n + \frac{3}{2} s_n} + C|z|^{3\tau_0} \leq C|z|^{1 + \frac{1}{5} s_n} + C|z|^{\frac{17}{16} + \left(\frac{1}{16} - 3\varepsilon s_n\right) + \frac{9}{4} s_n} \\ &\leq C|z|^{1 + \frac{1}{5} s_n} + C|z|^{\frac{17}{16} + \left(\frac{1}{16} - 3\varepsilon\right)} \leq C|z|^{1 + \frac{1}{5} s_n} + C|z|^{\frac{17}{16}} \leq C|z|^{1 + \frac{1}{5} s_n}. \end{aligned}$$

2. Using (6.3.35) with $l = -(q+1)$, $\|(\tilde{u}_z, \tilde{v}_z)\|^2_{H^{-(q+1)}} \leq C|z|^{2\tau_{-(q+1)}}$. We obtain the result because
   a. if n is odd, $2\tau_{-(q+1)} = 2\alpha_n + s_n \left(n + 2 + \frac{1}{2} - 2\varepsilon\right) = 1 + s_n \left(\frac{1}{2} - 2\varepsilon\right) \geq 1 + \frac{1}{5} s_n$.
   b. if n is even, $2\tau_{-(q+1)} = 2\alpha_n + s_n \left(n + 2 + \frac{3}{2} - 2\varepsilon\right) \geq 1 + \frac{1}{5} s_n$.

3. Once again, using (6.3.20) with $(k,r) = (-(q+1), 2)$ and (6.3.35) with $l = -(q+1)$,

$$\|(u_z, v_z)\|_{H^{-(q+1)}} \|(\tilde{u}_z, \tilde{v}_z)\|_{H^{-(q+1)}} \leq C|z|^{\alpha_n + s_n(\frac{1}{2}+q+1)+\tau_{-(q+1)}}.$$

   With the same arguments, we obtain the result.

4. If n is even, there is a last term: using (6.3.35) with $l = -q$ and $l = -(q+1)$,

$$\|\tilde{u}_z\|_{H^{-(q+1)}} \|\tilde{v}_z\|_{H^{-q}} \leq C|z|^{\tau_{-(q+1)}+\tau_{-q}}.$$

   Furthermore, $\tau_{-(q+1)} + \tau_{-q} = 2\alpha_n + s_n\left(n + 2 + \frac{1}{2} - 2\varepsilon\right) = 1 + s_n\left(\frac{1}{2} - 2\varepsilon\right) \geq 1 + \frac{1}{5}s_n$.

Finally, the continuity of $z \in \mathbb{R} \mapsto (u_z, v_z) \in H_0^m(0, T_1)^2$ is given by the previous proposition and the continuity of $z \in \mathbb{R} \mapsto (\tilde{u}_z, \tilde{v}_z) \in H_0^m(T_1, T)^2$ results from the regularity of $\Gamma_{T_1,T}$ and the regularity of the Schrödinger equation, with respect to the controls. $\square$

Now, we have to show that it is possible to move in the direction $i^{n+1}\varphi_K$: this is the step 3 of the proof strategy explained at the beginning of Section 6.3.

Proposition 6.3.9. *Assume that $\langle \mu_1\varphi_1, \varphi_1\rangle \neq 0$. The vector $i^{n+1}\varphi_K$ is a small-time H_0^m-continuously approximately reachable vector associated with vector variations $i^{n+1}\psi_K(T)$. More precisely, there exists $T^* > 0$, such that, for all $T \in (0, T^*)$, there exist C, ρ >0 and a continuous map $z \mapsto (U_z, V_z)$ from $\mathbb{R}$ to $H_0^m(0,T)^2$ such that,*

$$\forall z \in (-\rho, \rho), \qquad \left\|\psi(T; (U_z, V_z), \varphi_1) - \psi_1(T) - i^{n+1}z\psi_K(T)\right\|_{H^{2(p+m)+3}_{(0)}} \leq C|z|^{1+\frac{1}{5}s_n},$$

with the following size estimate on the family of controls

$$\|U_z\|_{H^m}, \|V_z\|_{H^m} \leq C|z|^{\frac{1}{4}}.$$

Proof. We consider $(u_z, v_z)_{z\in\mathbb{R}}$ the family of controls associated with $i^n\varphi_K$ in Proposition 6.3.8. First, we show that there exists $C > 0$ such that for all $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, small enough,

$$\left\|\psi(3T; (u_{\alpha,\beta}, v_{\alpha,\beta}), \varphi_1) - \psi_1(3T) - i^n\left(\beta e^{2i\omega_K T} + \alpha\right)\psi_K(3T)\right\|_{H^{2(p+m)+3}_{(0)}} \leq C|(\alpha,\beta)|^{1+\frac{1}{5}s_n}, \tag{6.3.38}$$

with $u_{\alpha,\beta} = u_\alpha \# 0_{[0,T]} \# u_\beta$ and $v_{\alpha,\beta} = v_\alpha \# 0_{[0,T]} \# v_\beta$. Indeed, by Proposition 6.3.8, there exist $C, \rho > 0$ such that, for all $\alpha \in (-\rho, \rho)$,

$$\|\psi(T; (u_\alpha, v_\alpha), \varphi_1) - \psi_1(T) - i^n\alpha\psi_K(T)\|_{H^{2(p+m)+3}_{(0)}} \leq C|\alpha|^{1+\frac{1}{5}s_n}, \tag{6.3.39}$$

$$\|(u_\alpha, v_\alpha)\|_{H^m} \leq C|\alpha|^{\frac{1}{4}}. \tag{6.3.40}$$

In the interval $[T, 2T]$, the evolution of the system is free ($(u,v) \equiv 0$). Consequently, the solution is given by $\psi(2T) = e^{-iA(2T-T)}\psi(T)$. Using that e^{-iAT} is an isometry from $H^{2(p+m)+3}_{(0)}$ to $H^{2(p+m)+3}_{(0)}$, we obtain

$$\left\|\psi(2T; (u_\alpha \# 0_{[0,T]}, v_\alpha \# 0_{[0,T]}), \varphi_1) - \psi_1(2T) - i^n\alpha\psi_K(2T)\right\|_{H^{2(p+m)+3}_{(0)}} \leq C|\alpha|^{1+\frac{1}{5}s_n}. \tag{6.3.41}$$

Let $\lambda \in \mathbb{C}$, $\psi_0 \in H^{2(p+m)+3}_{(0)}(0,1)$ and $u, v \in H^m_0((0,T),\mathbb{R})$. Using the uniqueness of the solution to (6.2.1) (with $f = 0$), one has: $\psi(\cdot;(u,v),\lambda\psi_0) = \lambda\psi(\cdot;(u,v),\psi_0)$. This property, applied with $\lambda := e^{2i\lambda_1 T}$ and the semi-group property of the bilinear Schrödinger equation lead to

$$\psi(3T;(u_{\alpha,\beta},v_{\alpha,\beta}),\varphi_1)e^{2i\lambda_1 T} = \psi\left(T;(u_\beta,v_\beta),\psi(2T;(u_\alpha\#0_{[0,T]},v_\alpha\#0_{[0,T]}),\varphi_1)e^{2i\lambda_1 T}\right).$$

Then, the estimate (6.2.5) with $\psi_0 = \psi(2T;(u_\alpha\#0_{[0,T]},v_\alpha\#0_{[0,T]}),\varphi_1)e^{2i\lambda_1 T} - \varphi_1$ gives

$$\begin{aligned}&\left\|\psi(3T;(u_{\alpha,\beta},v_{\alpha,\beta}),\varphi_1)e^{2i\lambda_1 T} - \psi(T;(u_\beta,v_\beta),\varphi_1) - \psi(T;(0,0),\psi_0)\right\|_{H^{2(p+m)+3}_{(0)}}\\ &\quad\le C\left\|(u_\beta,v_\beta)\right\|_{H^m}\left\|\psi(2T;(u_\alpha\#0_{[0,T]},v_\alpha\#0_{[0,T]}),\varphi_1) - \psi_1(2T)\right\|_{H^{2(p+m)+3}_{(0)}}.\end{aligned}$$

Using the estimation (6.3.40) with $\alpha = \beta$ and (6.3.41), one gets

$$\left\|\psi(3T;(u_{\alpha,\beta},v_{\alpha,\beta}),\varphi_1)e^{2i\lambda_1 T} - \psi(T;(u_\beta,v_\beta),\varphi_1) - e^{-iAT}(\psi_0)\right\|_{H^{2(p+m)+3}_{(0)}} \le C|\beta|^{\frac14}|\alpha|. \quad (6.3.42)$$

Using (6.3.41) in (6.3.42), we obtain

$$\begin{aligned}&\left\|\psi(3T;(u_{\alpha,\beta},v_{\alpha,\beta}),\varphi_1) - \psi(T;(u_\beta,v_\beta),\varphi_1)e^{-2i\lambda_1 T} - e^{-iAT}\left(i^n\alpha\psi_K(2T)\right)\right\|_{H^{2(p+m)+3}_{(0)}}\\ &\qquad\le C\left(|\beta|^{\frac14}|\alpha| + |\alpha|^{1+\frac15 s_n}\right).\end{aligned} \quad (6.3.43)$$

Finally, as $e^{-iAT}(i^n\alpha\psi_K(2T)) = i^n\alpha\psi_K(3T)$, using (6.3.39) with β instead of α, we obtain (6.3.38). Thus, for $T \in \left(0,\frac{\pi}{2\omega_K}\right)$ and $z \in (-\rho,\rho)$, taking $\beta = \frac{z}{\sin(2\omega_K T)}$ and $\alpha = -\beta\cos(2\omega_k T)$, we conclude. □

6.3.4 Conclusion

Now, we can easily write the proof of the main theorem; this is the last step of the proof strategy explained at the beginning of Section 6.3.

Proof of Theorem 3.1.4. We use Theorem 3.3.4. More precisely, we define $X = H^{2(p+m)+3}_{(0)}(0,1)$ and $E_T = H^m_0(0,T)^2$. Moreover, for all $T > 0$,

$$\mathcal{F}_T : (\psi_0,(u,v)) \mapsto \psi(T;(u,v),\psi_0).$$

We have to check all the assumptions of Theorem 3.3.4 to obtain the controllability result.

- (A_1) This is known that the end-point map is regular around the equilibrium $(\varphi_1,(0,0))$ – see [Bou23a, Proposition 4.2] for $\mathcal{C}^1$.
- (A_2) This point is given by [Bou23a, Proposition 4.2].
- (A_3) Using the uniqueness of the solution to (6.2.1), one can prove the following semi-group property: for all $T_1, T_2 > 0$, $\psi_0 \in H^{2(p+m)+3}_{(0)}(0,1)$, $u, v \in H^m_0((0,T_1),\mathbb{R})$ and $\tilde{u},\tilde{v} \in H^m_0((0,T_2),\mathbb{R})$,

$$\psi(T_1+T_2;(u\#\tilde{u},v\#\tilde{v}),\psi_0) = \psi(T_2;(\tilde{u},\tilde{v}),\psi(T_1;(u,v),\psi_0)).$$

(A_4) By hypothesis $(\mathbf{H})_{\mathbf{lin},\mathbf{K},\mathbf{2}}$ and by Theorem 6.2.8, $H = \mathcal{H}$ is a closed subspace, this is the reachable set of the linearized system around the ground state. This space doesn't depend on T and its real codimension in $L^2(0,1)$ is equal to 2.

(A_5) Finally, as $\langle \mu_1\varphi_1, \varphi_1\rangle \neq 0$, Propositions 6.3.8 and 6.3.9 show that φ_K and $i\varphi_K$ are small-time H_0^m-continuously approximately reachable vectors. Then, as a supplementary space of H is given by $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\varphi_K, i\varphi_K)$, this condition is verified.

By Theorem 3.3.4, the multi-input bilinear Schrödinger equation (3.1.1) is H_0^m-Small-Time Locally Controllable around the ground state in $H^{2(p+m)+3}_{(0)}(0,1)$. $\square$

6.4 Postponed proofs

6.4.1 Existence of μ_1, μ_2 verifying the hypotheses

This section is inspired by [Bou24; Bou23b]. We recall that the operator A is defined in (2.3.1).

Lemma 6.4.1. *Let $\mu \in \mathcal{C}_c^\infty(0,1)$. For all $n \in \mathbb{N}$, for all $f \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$,*

$$\underline{\mathrm{ad}}_A^n(\mu) f = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^n \mu^{(2n-k)} f^{(k)}, \tag{6.4.1}$$

where $(\alpha_k^n)_{k\in[\![0,n]\!]}$ are defined by induction as, $\alpha_0^0 := 1$ and,

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \alpha_k^{n+1} := 2\alpha_{k-1}^n + \alpha_k^n, \qquad \alpha_0^{n+1} := \alpha_0^n, \qquad \alpha_{n+1}^{n+1} := 2\alpha_n^n.$$

Moreover, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k^n (-1)^k = (-1)^n$ and $\sum_{k=0}^{n} k\alpha_k^n(-1)^k = 2n(-1)^n$.

This lemma is proved by induction in [Bou23b, Proposition A.3, *Step* 1].

Lemma 6.4.2. *For all $n \in \mathbb{N}$, there exist a constant $C > 0$ and a quadratic form Q_n such that, for every $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{C}_c^\infty(0,1)$,*

1. *The odd good quadratic brackets are estimated as*

$$\gamma_{2n+1} = -\langle [\underline{\mathrm{ad}}_A^{n+1}(\mu_1), \underline{\mathrm{ad}}_A^n(\mu_2)]\varphi_1, \varphi_K\rangle = 2(-1)^n \langle \mu_1^{(4n+2)} \mu_2 \varphi_1, \varphi_K\rangle + Q_n(\mu_1,\mu_2),$$

with $|Q_n(\mu_1,\mu_2)| \leq \|\mu_1\|_{H^{4n+1}} \|\mu_2\|_{L^2}$.

2. *The even good quadratic brackets are estimated as*

$$\gamma_{2n} = \langle [\underline{\mathrm{ad}}_A^n(\mu_1), \underline{\mathrm{ad}}_A^n(\mu_2)]\varphi_1, \varphi_K\rangle = 4n(-1)^n \langle \mu_1^{(4n-2)} \mu_2', \varphi_1'\varphi_K - \varphi_K'\varphi_1\rangle + Q_n(\mu_1,\mu_2),$$

with $|Q_n(\mu_1,\mu_2)| \leq \|\mu_1\|_{H^{4n-3}} \|\mu_2\|_{H^1}$.

Proof. The equalities between the brackets and the series defined by γ_i are proved in Proposition B.2.3. Let $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{C}_c^\infty(0,1)$. We start with the odd case: for all $f \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$, $n \geq 0$, using

(6.4.1), one has

$$\begin{aligned}[\underline{\mathrm{ad}}_A^n(\mu_2), \underline{\mathrm{ad}}_A^{n+1}(\mu_1)]f &= \sum_{k=0}^{n+1}\sum_{i=0}^{n}\sum_{l=0}^{i}\binom{i}{l}\alpha_k^{n+1}\alpha_i^n\mu_1^{(2(n+1)+i-k-l)}\mu_2^{(2n-i)}f^{(k+l)} \\ &- \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n+1}\sum_{l=0}^{i}\binom{i}{l}\alpha_k^{n}\alpha_i^{n+1}\mu_2^{(2n+i-k-l)}\mu_1^{(2(n+1)-i)}f^{(k+l)}.\end{aligned} \tag{6.4.2}$$

Moreover, for all $a, b \in \mathbb{N}$, for all $f \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$, there exists $C > 0$, such that

$$\left|\langle \mu_1^{(a)}\mu_2^{(b)}, f\rangle\right| \leq \|\mu_1\|_{H^{a+b}}\|\mu_2\|_{L^2}.$$

Thus, thanks to (6.4.2), one obtains

$$\begin{aligned}\Bigg|\langle[\underline{\mathrm{ad}}_A^n(\mu_2), \underline{\mathrm{ad}}_A^{n+1}(\mu_1)]\varphi_1, \varphi_K\rangle - \alpha_0^{n+1}\sum_{i=0}^{n}\alpha_i^n\langle\mu_1^{(2(n+1)+i)}\mu_2^{(2n-i)}\varphi_1, \varphi_K\rangle \\ +\alpha_0^n\sum_{i=0}^{n+1}\alpha_i^{n+1}\langle\mu_1^{(2(n+1)-i)}\mu_2^{(2n+i)}\varphi_1, \varphi_K\rangle\Bigg| \leq \|\mu_1\|_{H^{4n+1}}\|\mu_2\|_{L^2}.\end{aligned} \tag{6.4.3}$$

Moreover, using integrations by parts, we get for all $i \in [\![0, n]\!]$,

$$\left|\langle\mu_1^{(2(n+1)\pm i)}\mu_2^{(2n\mp i)}\varphi_1, \varphi_K\rangle - (-1)^i\langle\mu_1^{(4n+2)}\mu_2\varphi_1, \varphi_K\rangle\right| \leq \|\mu_1\|_{H^{4n+1}}\|\mu_2\|_{L^2}. \tag{6.4.4}$$

Using (6.4.3) and (6.4.4), one has

$$\begin{aligned}\left|\gamma_{2n} - \left(\alpha_0^{n+1}\sum_{i=0}^{n}\alpha_i^n(-1)^i - \alpha_0^n\sum_{i=0}^{n+1}\alpha_i^{n+1}(-1)^i\right)\langle\mu_1^{(4n+2)}\mu_2\varphi_1, \varphi_K\rangle\right| \\ \leq \|\mu_1\|_{H^{4n+1}}\|\mu_2\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Finally, as $\sum_{i=0}^{n}\alpha_i^n(-1)^i = (-1)^n$ and $\alpha_0^n = 1$, one obtains the result. Let us extract the leading term of the even good brackets. With same manipulations, one obtains for all $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\Bigg|\gamma_{2n} - \alpha_0^n\sum_{i=0}^{n}\alpha_i^n\left\langle\left(\mu_1^{(2n-i)}\mu_2^{(2n+i)} - \mu_2^{(2n-i)}\mu_1^{(2n+i)}\right)\varphi_1, \varphi_K\right\rangle - \\ \alpha_0^n\sum_{i=1}^{n}i\alpha_i^n\left\langle\left(\mu_1^{(2n-i)}\mu_2^{(2n+i-1)} - \mu_2^{(2n-i)}\mu_1^{(2n+i-1)}\right), \varphi_1'\varphi_K\right\rangle - \\ \alpha_1^n\sum_{i=0}^{n}\alpha_i^n\left\langle\left(\mu_1^{(2n-i)}\mu_2^{(2n+i-1)} - \mu_2^{(2n-i)}\mu_1^{(2n+i-1)}\right), \varphi_1'\varphi_K\right\rangle\Bigg| \leq \|\mu_1\|_{H^{4n-3}}\|\mu_2\|_{H^1}.\end{aligned}$$

Hence, using similar estimates, we obtain the simpler expression

$$\begin{aligned}\Bigg|\gamma_{2n} + 2\alpha_0^n\left(\sum_{i=0}^{n}i\alpha_i^n(-1)^i\right)\langle\mu_1^{(4n-2)}\mu_2', (\varphi_1\varphi_K)'\rangle \\ -\left(2\alpha_0^n\sum_{i=0}^{n}i\alpha_i^n(-1)^i + 2\alpha_1^n\sum_{i=0}^{n}\alpha_i^n(-1)^i\right)\langle\mu_1^{(4n-2)}\mu_2', \varphi_1'\varphi_K\rangle\Bigg| \leq \|\mu_1\|_{H^{4n-3}}\|\mu_2\|_{H^1}.\end{aligned}$$

By induction, we obtain $\alpha_1^n = 2n$. The sums calculated in Lemma 6.4.1 lead to the result. □

Lemma 6.4.3. *Let $K \in \mathbb{N}$, $K \geq 2$. There exist $\mu_1^n, \mu_2^n \in \mathcal{C}_c^\infty(0,1)$ such that*

$$\langle \mu_1^n \varphi_1, \varphi_K \rangle = \langle \mu_2^n \varphi_1, \varphi_K \rangle = \gamma_1(\mu_1^n, \mu_2^n) = \cdots = \gamma_{n-1}(\mu_1^n, \mu_2^n) = 0,$$

and

$$\gamma_n(\mu_1^n, \mu_2^n) = 1.$$

Remark 6.4.4. *Choosing $\tilde{\mu_1^n} = -\mu_1^n$, one has $\gamma_n(\tilde{\mu_1^n}, \mu_2^n) = -1$.*

The proof of this lemma is the same as the proof of [Bou23b, Theorem A.4], using Lemma 6.4.2 instead of [Bou23b, Proposition A.3].

The proof of the following theorem is mainly the same given by Bournissou in [Bou24, Theorem A.2].

Theorem 6.4.5. *Let $n \geq 1$, $K \geq 2$, $p, m \geq 0$, such that $n \leq p+1$. There exist μ_1, μ_2 satisfying $(\mathbf{H})_{\mathbf{reg}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{lin},\mathbf{K},\mathbf{1}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{lin},\mathbf{K},\mathbf{2}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad},\mathbf{K},\mathbf{1}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad},\mathbf{K},\mathbf{2}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad},\mathbf{K},\mathbf{3}}$ and $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad},\mathbf{K},\mathbf{4}}$.*

In order to prove this theorem, we reformulate some hypotheses. More precisely, we will note

$$\mathrm{Supp}(\mu_1), \mathrm{Supp}(\mu_2) \subset [0,1), \tag{6.4.5}$$

$$\forall j \in \mathbb{N}^* \setminus \{K\}, \quad \langle \mu_1 \varphi_1, \varphi_j \rangle \langle \mu_2 \varphi_1, \varphi_j \rangle \neq 0, \tag{6.4.6}$$

$$\mu_1^{(2p+1)}(0) \mu_2^{(2p+1)}(0) \neq 0. \tag{6.4.7}$$

Note that, if $\mu_1, \mu_2 \in H^{2(p+m)+3} \cap H_0^{2p+1}((0,1), \mathbb{R})$ are two functions, one has

$$(6.4.5), (6.4.6), (6.4.7) \Rightarrow (\mathbf{H})_{\mathbf{reg}}, (\mathbf{H})_{\mathbf{lin},\mathbf{K},\mathbf{2}}.$$

Consequently, we prove the existence of $\mu_1, \mu_2 \in H^{2(p+m)+3} \cap H_0^{2p+1}((0,1), \mathbb{R})$ verifying $(\mathbf{H})_{\mathbf{lin},\mathbf{K},\mathbf{1}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad},\mathbf{K},\mathbf{1}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad},\mathbf{K},\mathbf{2}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad},\mathbf{K},\mathbf{3}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad},\mathbf{K},\mathbf{4}}$, (6.4.5), (6.4.6) and (6.4.7).

Idea of proof. Let $K \in \mathbb{N}$, $K \geq 2$ and $\bar{x} \in (0,1)$ such that $\varphi_K(\bar{x}) = 0$. As $\varphi_1 > 0$ on $(0,1)$ and $\varphi_K'(\bar{x}) > 0$, one may assume the existence of $\delta > 0$ such that $\varphi_1 \varphi_K > 0$ on $(\bar{x}, \bar{x} + \delta)$ and $\varphi_1 \varphi_K < 0$ on $(\bar{x} - \delta, \bar{x})$. Let $\eta \in (0, \bar{x} - \delta)$ be such that $\varphi_1 \varphi_K \neq 0$ on $(0, \eta)$.

Step 1: We prove the existence of functions $\mu_1, \mu_2 \in H^{2(p+m)+3} \cap H_0^{2p+1}((0,1), \mathbb{R})$ satisfying $(\mathbf{H})_{\mathbf{lin},\mathbf{K},\mathbf{1}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad},\mathbf{K},\mathbf{4}}$, (6.4.5), (6.4.6) and (6.4.7). We use the same method than Bournissou in [Bou24]; we consider

$$\mathcal{E} := \left\{ \mu_1, \mu_2 \in H^{2(p+m)+3}(0,1), \mu_1 \equiv \mu_2 \equiv 0 \text{ on } [\frac{\eta}{2}, 1], \text{ satisfying } (\mathbf{H})_{\mathbf{lin},\mathbf{K},\mathbf{1}} \right\} \cap H_0^{2p+1}(0,1),$$

$$\mathcal{U} := \{ \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{E}, \quad \mu_1, \mu_2 \text{ satisfy } (\mathbf{H})_{\mathbf{quad},\mathbf{K},\mathbf{4}}, (6.4.6) \text{ and } (6.4.7) \}.$$

The set $\mathcal{E}$ is not empty. The purpose of the step is to prove that $\mathcal{U}$ is not empty. For that, we use the Baire theorem to prove that $\mathcal{U}$ is dense in $\mathcal{E}$.

Step 2: We prove the existence of functions $\mu_1, \mu_2 \in H^{2(p+m)+3} \cap H_0^{2p+1}((0,1),\mathbb{R})$ satisfying $(\mathbf{H})_{\mathbf{lin,K,1}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad,K,3}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad,K,4}}$, (6.4.5), (6.4.6) and (6.4.7). We divide the support of μ_1 and μ_2, in two intervals: $\mathrm{Supp}(\mu_1) = I \cup I_1$ and $\mathrm{Supp}(\mu_2) = I \cup I_2$, with $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. We considers two functions μ_1, μ_2 as given in the previous step. If $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad,K,3}}$ is not true, we construct, as in [Bou24], a perturbation, supported on I, satisfying $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad,K,3}}$, without any consequence on the other properties.

Step 3: Conclusion we prove the theorem: we need to take into account the hypotheses $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad,K,1}}$ and $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad,K,2}}$. For example, if $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad,K,1}}$ is not true, we construct, as in [Bou24], a perturbation, supported on I_1, satisfying $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad,K,1}}$, without any consequence on the other properties (in particular, the properties $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad,K,3}}$ and $(\mathbf{H})_{\mathbf{quad,K,4}}$ are not affected, because $\mu_2 \equiv 0$ on I_1 (and $\mu_1 \equiv 0$ on I_2)). □

6.4.2 A proof of Theorem 3.2.2 *via* Sussmann's $\mathcal{S}(\theta)$-condition

In this section, we present a proof of Theorem 3.2.2 relying on Sussmann's $S(\theta)$-sufficient condition – see [Sus87, Theorem 7.3] – recalled in Theorem 1.5.5 – see [Cor07, Theorem 3.29].

Proof of Theorem 3.2.2 thanks to Theorem 1.5.5 with $r = 2$. We prove by induction on $m \in \mathbb{N}$ that for every $d \in \mathbb{N}^*$, the assumptions of Theorem 3.2.2 imply $W^{m,\infty}$-STLC.

Initialization ($m = 0$): we prove L^∞-STLC by applying Theorem 1.5.5. First (3.2.4) gives the Lie algebra rank condition $\mathrm{Span}(f_{b_1}(0), \cdots f_{b_d}(0)) = \mathbb{R}^d$, with $b_1, \cdots, b_r \in \mathcal{B}_1$ such that $\mathrm{Span}(f_{b_1}(0), \cdots f_{b_r}(0)) = S_1(f)(0)$ and $b_{r+1}, \cdots, b_d \in \mathcal{B}_{2,good}$. One considers

$$0 < \theta \leq \frac{1}{\max\limits_{i \in [\![1,d]\!]} |b_i|}.$$

Let $L = \max\limits_{i \in [\![r+1,d]\!]} |b_i|$. Let $\mathfrak{b} \in \mathrm{Br}(X)$ be such that $n_0(\mathfrak{b})$ is odd and both $n_1(\mathfrak{b})$ and $n_2(\mathfrak{b})$ are even. Then,

1. either $n(\mathfrak{b}) \geq 4$ and then (3.2.4) gives the compensation because, for all $i \in [\![1,d]\!]$,

$$n(b_i) + \theta n_0(b_i) \leq 2 + \theta \left(\max_{i \in [\![1,d]\!]} |b_i| - 1 \right) < 3 < 4 + \theta n_0(\mathfrak{b}) \leq n(\mathfrak{b}) + \theta n_0(\mathfrak{b}),$$

2. or $n(\mathfrak{b}) = 2$ *i.e.* $(n_1(\mathfrak{b}), n_2(\mathfrak{b})) \in \{(2,0),(0,2)\}$ *i.e.* $\sigma(\mathfrak{b}) \in \mathrm{Span}\{\mathcal{B}_{2,bad}\}$. Thus
   a. if $|\mathfrak{b}| \leq L$, (3.2.5) gives, for all $i \in [\![1,r]\!]$,

$$n(b_i) + \theta n_0(b_i) = 1 + \theta n_0(b_i) < 2 \leq n(\mathfrak{b}) + \theta n_0(\mathfrak{b}),$$

   b. if $|\mathfrak{b}| > L$, the LARC (3.2.4) gives once again the compensation because,

$$\begin{aligned} n(b_i) + \theta n_0(b_i) &\leq 1 + \theta(|b_i| - 1) < 2 + \theta n_0(\mathfrak{b}) = n(\mathfrak{b}) + \theta n_0(\mathfrak{b}), &\quad \text{for } i \in [\![1,r]\!], \\ n(b_i) + \theta n_0(b_i) &\leq 2 + \theta(L-2) < 2 + \theta(L-1) \leq n(\mathfrak{b}) + \theta n_0(\mathfrak{b}), &\quad \text{for } i \in [\![r+1,d]\!]. \end{aligned}$$

Theses points prove (1.5.2). The system $x' = f_0(x) + uf_1(x) + vf_2(x)$ is $L^\infty-$STLC.

Heredity: we assume that the result is proved up to some $m \in \mathbb{N}$. We consider the extended system

$$\begin{cases} \dot{x} = f_0(x) + uf_1(x) + vf_2(x) \\ \dot{u} = w \\ \dot{v} = \omega \end{cases},$$

with state $Y = (x, u, v) \in \mathbb{R}^{d+2}$ and control (w, ω), *i.e.* $Y' = F_0(Y) + wF_1(Y) + \omega F_2(Y)$ with

$$F_0(x,u,v) = \begin{pmatrix} f_0(x) + uf_1(x) + vf_2(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_1(x,u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_2(x,u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Then, for every $i \in [\![1, 2]\!]$,

$$F_{M_1^i}(Y) = [F_i, F_0](Y) = \begin{pmatrix} f_i(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Thus, when computing $F_{M_j^i}$ for $j \geq 2$, the derivatives with respect to u and v never come into play and we obtain

$$\forall i \in [\![1, 2]\!],\ \forall j \geq 1, \quad F_{M_j^i}(Y) = \begin{pmatrix} \underline{\mathrm{ad}}^{j-1}_{f_0+uf_1+vf_2}(f_i)(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Thus, for every $i \in [\![1, 2]\!]$ and $l \in \mathbb{N}$, $F_{W_{1,l}^i} = 0$ and for every $i \in [\![1, 2]\!]$, $j \geq 2$, $l \in \mathbb{N}$,

$$F_{W_{j,l}^i}(Y) = \begin{pmatrix} \underline{\mathrm{ad}}^{l}_{f_0+uf_1+vf_2}[\underline{\mathrm{ad}}^{j-2}_{f_0+uf_1+vf_2}(f_i), \underline{\mathrm{ad}}^{j-1}_{f_0+uf_1+vf_2}(f_i)](x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Moreover, for every $l \in \mathbb{N}$, $F_{C_{0,l}} = F_{C_{1,l}} = 0$ and, for every $j \geq 2$, $l \in \mathbb{N}$,

$$F_{C_{j,l}}(Y) = \begin{pmatrix} (-1)^j \underline{\mathrm{ad}}^{l}_{f_0+uf_1+vf_2} \left[\underline{\mathrm{ad}}^{\lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor - 1}_{f_0+uf_1+vf_2}(f_1), \underline{\mathrm{ad}}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor - 1}_{f_0+uf_1+vf_2}(f_2) \right](x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In particular, for every $i \in [\![1, 2]\!]$, $j \geq 1$, $F_{M_j^i}(0) = \begin{pmatrix} f_{M_{j-1}^i}(0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Moreover, for every $j \geq 2$, $l \in \mathbb{N}$,

$$F_{W_{j,l}^i}(0) = \begin{pmatrix} f_{W_{j-1,l}^i}(0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad F_{C_{j,l}}(0) = \begin{pmatrix} f_{C_{j-2,l}}(0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Thus, the extended system satisfies the assumptions of Theorem 3.2.2 with dimension $d + 2$.

By the induction hypothesis, the extended system is $W^{m,\infty}$-STLC. By choosing trajectories of the extended system starting and finishing at $u, v = 0$, one concludes that the initial system $x' = f_0(x) + uf_1(x) + vf_2(x)$ is $W^{m+1,\infty}$-STLC. $\square$

CHAPTER 7

QUADRATIC OBSTRUCTIONS TO STLC FOR MULTI-INPUT SYSTEMS

SUMMARY. The purpose of this chapter is to give the complete proof of Theorems 4.2.1 and 4.2.9, introduced in Chapter 4. This result is proved in [Ghe24]. The chapter is organized in the following way: in Section 7.1, we present some tools and properties that will be used in the next sections. In Section 7.2, we give the proof of the main theorem of Chapter 4 by contraposition. Finally, in Section 7.3, we prove a generalization of this result in the asymmetrical case. Some elements of proof are developed in Section 7.4.

7.1 Requirements for the proof

7.1.1 Expression of the coordinates of the second kind

Lemma 7.1.1. *Let $j, l, N \in \mathbb{N}$, $t > 0$ and $u, v \in L^1((0,t),\mathbb{R})$. Then,*

$$\begin{aligned}\xi_{C_{j,l}}(t,(u,v)) = \sum_{\mu=0}^{N}(-1)^{\mu}u_{\lfloor \frac{j}{2}\rfloor+\mu+2}(t)\left(v_{\lfloor\frac{j+1}{2}\rfloor}\frac{(t-\cdot)^l}{l!}\right)^{(\mu)}(t)+\\ (-1)^{N+1}\int_0^t u_{\lfloor\frac{j}{2}\rfloor+N+2}(s)\frac{\mathrm{d}^{N+1}}{\mathrm{d}s^{N+1}}\left(v_{\lfloor\frac{j+1}{2}\rfloor}(s)\frac{(t-s)^l}{l!}\right)\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{7.1.1}$$

Proof. We prove the lemma by induction on N, using an integration by parts. □

7.1.2 Estimates on the coordinates of the second kind

Lemma 7.1.2. *For every $p \in [1,+\infty]$, $j \geq j_0 \geq 1$, $t > 0$ and $u \in L^1((0,t),\mathbb{R})$,*

$$\|u_j\|_{L^p} \leq \frac{t^{j-j_0}}{(j-j_0)!}\|u_{j_0}\|_{L^p}. \tag{7.1.2}$$

Proof. This lemma is proved in [BM24, Lemma A.6]. □

Proposition 7.1.3. *The following inequalities hold.*

1. *Let $p \in [1,+\infty]$ and $j_0 \in \mathbb{N}^*$. There exists $c > 0$ such that, for every $j \geq j_0$, $t > 0$, $u, v \in L^1((0,t),\mathbb{R})$,*

$$\left|\xi_{M_j^1}(t,(u,v))\right| \leq \frac{(ct)^{|M_j^1|}}{|M_j^1|!}t^{-(j_0+1)}t^{1-\frac{1}{p}}\|u_{j_0}\|_{L^p}. \tag{7.1.3}$$

$$\left|\xi_{M_j^2}(t,(u,v))\right| \leq \frac{(ct)^{|M_j^2|}}{|M_j^2|!}t^{-(j_0+1)}t^{1-\frac{1}{p}}\|v_{j_0}\|_{L^p}. \tag{7.1.4}$$

2. *Let $p \in [1,+\infty]$ and $j_0 \in \mathbb{N}^*$. There exists $c > 0$ such that, for every $j \geq j_0$, $l \in \mathbb{N}$, $t > 0$, $u, v \in L^1((0,t),\mathbb{R})$,*

$$\left|\xi_{W_{j,l}^1}(t,(u,v))\right| \leq \frac{(ct)^{|W_{j,l}^1|}}{|W_{j,l}^1|!}t^{-(2j_0+1)}t^{1-\frac{1}{p}}\|u_{j_0}\|_{L^{2p}}^2, \tag{7.1.5}$$

$$\left|\xi_{W_{j,l}^2}(t,(u,v))\right| \leq \frac{(ct)^{|W_{j,l}^2|}}{|W_{j,l}^2|!}t^{-(2j_0+1)}t^{1-\frac{1}{p}}\|v_{j_0}\|_{L^{2p}}^2. \tag{7.1.6}$$

3. *Let $p,q \in [1,+\infty]$ such that $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \leq 1$ and $k,k' \in \mathbb{N}^*$ with $k' \leq k$. There exists $c>0$ such that, for every $j \geq k+k'-1$, $l \in \mathbb{N}$, $0<t<1$, $u,v \in L^1((0,t),\mathbb{R})$,*

$$\begin{aligned}\left|\xi_{C_{j,l}}(t,(u,v))\right| \leq & \frac{(ct)^{|C_{j,l}|}}{|C_{j,l}|!} t^{-(1+k+k')} t^{1-\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} \left\|u_k\right\|_{L^p} \left\|v_{k'}\right\|_{L^q} \\ & + \mathbb{1}_{l \leq k-2-\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} K \left(\sum_{\mu=1}^{k} |u_\mu(t)|^2 + t \left\|v_{k'}\right\|_{L^2}^2 \right),\end{aligned} \tag{7.1.7}$$

where K only depends on k.

Proof. The first two points are proved in [BM24, Proposition 3.10]. We prove the last one: let $j \geq k+k'-1$, $l \in \mathbb{N}$, $t>0$, $u,v \in L^1((0,t),\mathbb{R})$. *First, assume that $\lfloor \frac{j}{2} \rfloor + 1 \geq k$ (this is always the case when $k=k'$).* Using (1.6.16) and Hölder's inequality, we obtain

$$\left|\xi_{C_{j,l}}(t,(u,v))\right| \leq \frac{t^l}{l!} t^{1-\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} \left\|u_{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor+1}\right\|_{L^p} \left\|v_{\lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor}\right\|_{L^q}.$$

Notice that $\lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor \geq \lfloor \frac{k+k'}{2} \rfloor \geq \lfloor \frac{2k'}{2} \rfloor = k'$. Using two times Lemma 7.1.2 with $j_0 = k$ and with $j_0 = k'$, we get

$$\left|\xi_{C_{j,l}}(t,(u,v))\right| \leq \frac{t^{l+j+1-k-k'}}{l!(\lfloor \frac{j}{2} \rfloor + 1 - k)!(\lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor - k')!} t^{1-\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} \left\|u_k\right\|_{L^p} \left\|v_{k'}\right\|_{L^q}.$$

We obtain the result because, for all $j \geq k+k'-1$, $l \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{l!(\lfloor \frac{j}{2} \rfloor + 1 - k)!(\lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor - k')!} \leq \frac{2^{3|C_{j,l}|}(k+k'+1)!}{(l+j+2)!}.$$

Now, we assume that $\lfloor \frac{j}{2} \rfloor \leq k-2$. We use Lemma 7.1.1 with $N = k-2-\lfloor \frac{j}{2} \rfloor \geq 0$ to obtain $\xi_{C_{j,l}}(t,(u,v) = A+B$ with A the boundary terms and B the integral part. Using Leibniz formula, one gets

$$\left(v_{\lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor} \frac{(t-\cdot)^l}{l!} \right)^{(\mu)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } \mu < l \\ \binom{\mu}{l}(-1)^l v_{\lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor + l - \mu}(t) & \text{otherwise} \end{cases}.$$

Consequently, the following inequality holds

$$|A| \leq \mathbb{1}_{l \leq N} \sum_{\mu=l}^{N} \binom{\mu}{l} \left| u_{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor + \mu + 2}(t) v_{\lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor + l - \mu}(t) \right|.$$

Then, using Young's and Cauchy–Schwarz's inequality,

$$|A| \leq \mathbb{1}_{l \leq N} 2^{N-1} \left(\sum_{\mu=1}^{k} |u_\mu(t)|^2 + t \max_{\mu \in [\![l,N]\!]} \left\| v_{\lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor + l - \mu - 1} \right\|_{L^2}^2 \right),$$

as $1 \leq \lfloor \frac{j}{2} \rfloor + \mu + 2 \leq k$, for $\mu \in [\![1,N]\!]$. Note that $\lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor + l - \mu - 1 \geq k'$. Finally, applying Lemma

7.1.2 with $p = 2$ and $j_0 = k'$, we obtain the following estimate

$$|A| \leq \mathbb{1}_{l \leq N} 2^{k-3} \left(\sum_{\mu=1}^{k} |u_\mu(t)|^2 + t \left\| v_{k'} \right\|_{L^2}^2 \right). \tag{7.1.8}$$

We finally estimate B. Using Leibniz formula and Hölder's inequality, one gets

$$|B| \leq \sum_{\mu=0}^{\min(N+1,l)} \binom{N+1}{\mu} \frac{t^{l-\mu}}{(l-\mu)!} t^{1-\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} \left\| u_k \right\|_{L^p} \left\| v_{j+\mu+1-k} \right\|_{L^q}.$$

Using Lemma 7.1.2 with $p = q$ and $j_0 = k'$, one has

$$|B| \leq \frac{(2^{N+2}t)^{|C_{j,l}|}}{l!} t^{-(1+k+k')} t^{1-\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} \left\| u_k \right\|_{L^p} \left\| v_{k'} \right\|_{L^q}. \tag{7.1.9}$$

Finally, for all $l \geq 0$, for all $j \in [\![0, 2k-3]\!]$,

$$\frac{1}{l!} = \frac{(j+2)!}{(j+l+2)!} \binom{j+l+2}{l} \leq \frac{(2k-1)!}{(j+l+2)!} 2^{j+l+2} \leq \frac{(2(2k-1)!)^{|C_{j,l}|}}{(j+l+2)!}. \tag{7.1.10}$$

Thus, equations (7.1.8), (7.1.9) and (7.1.10) lead to the desired inequality. □

7.1.3 Analytic norms

The following paragraph is inspired by [BM24, Section 4.1]. We introduce some basic notions about analytic vector fields and norms of analytic vector fields. These will be useful for ensuring the convergence of the series that we will consider in the following sections.

Definition 7.1.4 (Length and factorial of a multi-index, partial derivative)**.** *Let $d \in \mathbb{N}^*$ be a positive integer and $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ be a multi-index. We define*

1. *the length of α as: $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$,*
2. *the factorial of α as: $\alpha! := \alpha_1! \times \cdots \times \alpha_d!$,*
3. *the partial derivative: $\partial_\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d}$.*

Definition 7.1.5 (Analytic vector fields, analytic norms)**.** *Let $\delta > 0$ and $\overline{B}_\delta$ be the closed ball of radius δ, centered at $0 \in \mathbb{R}^d$. For $r > 0$, we define $C^{\omega,r}\left(\overline{B}_\delta; \mathbb{R}^d\right)$ as the subspace of analytic vector fields on an open neighborhood of $\overline{B}_\delta$, for which the following norm is finite*

$$|||f|||_r := \sum_{i=1}^{d} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \frac{r^{|\alpha|}}{\alpha!} \left\| \partial^\alpha f_i \right\|_{L^\infty(\overline{B}_\delta)}.$$

7.1.4 A black-box estimate

Here are a few definitions and notations.

Definition 7.1.6 (Support)**.** *Let $a \in \mathcal{L}(X)$. For $b \in \mathcal{B}$, we denote by $\langle a, b \rangle$ the coefficient of $\mathrm{E}(b)$ in the expansion of a on the basis $\mathrm{E}(\mathcal{B})$. We define*

$$supp(a) := \{b \in \mathcal{B},\ \langle a, b \rangle \neq 0\}.$$

If $A \subset \mathrm{Br}(X)$, we let $supp(A) := \bigcup_{a \in A} supp(a)$.

With this definition, one has, for $a \in \mathcal{L}(X)$, $a = \sum_{b \in \mathrm{supp}(a)} \langle a, b \rangle \mathrm{E}(b)$.

Definition 7.1.7 ($\mathcal{F}$)**.** *Given $q \geq 2$ and $b_1, \cdots, b_q \in \mathrm{Br}(X)$, we define $\mathcal{F}(b_1, \cdots, b_q)$ as the subset of $\mathrm{Br}(X)$ of brackets of $b_1, \cdots, b_q$ involving each of these elements exactly once.*

To put the strategy (described in Section 4.3.3) into practice *i.e.* to extract the dominant terms from $\mathcal{Z}_M(t; f, (u, v))(0)$, we will use the following propositions. They guarantee the convergence of the series involved and legitimize the heuristic. This part of the document is based on [BM24, Section 4.4].

Proposition 7.1.8 (Estimate of main terms)**.** *Let $M, L \in \mathbb{N}^*$. Let $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}_{[\![1,M]\!]}$. Assume that there exist $c > 0$ and a functional $\Xi : \mathbb{R}_+^* \times L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}^+$ such that the following holds: for all $b \in \mathcal{E}$, there exists an exponent $\sigma \leq \min(L, |b|)$, such that, for all $t > 0$ and $u, v \in L^1((0, t), \mathbb{R})$,*

$$|\xi_b(t, (u, v))| \leq \frac{(ct)^{|b|}}{|b|!} t^{-\sigma} \Xi(t, (u, v)). \tag{7.1.11}$$

Let $\delta, r > 0$ and $f_0, f_1, f_2 \in \mathcal{C}^{\omega, r}\left(\overline{B}_\delta, \mathbb{R}^d\right)$ be analytic vector fields. Then, for any $r' \in [r/e, r)$, as $(t, \|(u, v)\|_{L^1}) \to 0$,

$$\sum_{b \in \mathcal{E}} |||\xi_b(t, (u, v)) f_b|||_{r'} = \mathcal{O}\left(\Xi(t, (u, v))\right).$$

Proposition 7.1.9 (Estimate of cross terms)**.** *Let $M, L \in$ Ĺ$\mathbb{N}^*$. Let $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}_{[\![1,M]\!]}$. Assume that there exist $c > 0$ and a functional $\Xi : \mathbb{R}_+^* \times L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}^+$ with $\Xi(t, (u, v)) = \mathcal{O}(1)$ such that the following holds: for all $q \geq 2$, $b_1 \geq \cdots \geq b_q \in \mathcal{B} \setminus \{X_0\}$ such that $supp\mathcal{F}(b_1, \cdots, b_q) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$, there exist $\sigma_1, \cdots, \sigma_q \leq L$ with $\sigma_i \leq |b_i|$ and $(\alpha_1, \cdots, \alpha_q) \in [0, 1]^q$ with $\alpha_1 + \cdots + \alpha_q \geq 1$ such that, for all $t > 0$ and $u, v \in L^1((0, t), \mathbb{R})$,*

$$|\xi_{b_i}(t, (u, v))| \leq \frac{(ct)^{|b_i|}}{|b_i|!} t^{-\sigma_i} \left(\Xi(t, (u, v))\right)^{\alpha_i}. \tag{7.1.12}$$

Let $\delta, r > 0$ and $f_0, f_1, f_2 \in \mathcal{C}^{\omega, r}\left(\overline{B}_\delta, \mathbb{R}^d\right)$ be analytic vector fields. Then, for any $r' \in [r/e, r)$, as $(t, \|(u, v)\|_{L^1}) \to 0$,

$$\sum_{b \in \mathcal{E}} |||\left(\eta_b - \xi_b\right)(t, (u, v)) f_b|||_{r'} = \mathcal{O}\left(\Xi(t, (u, v))\right).$$

The two previous propositions are proved in [BM24, Appendix A.5]. The following corollary is a direct consequence of (1.6.6) and the two previous propositions. This clarifies several steps of the heuristic (Section 4.3.3).

Corollary 7.1.10. *Let $M, L, r \in \mathbb{N}^*$. Let $\mathfrak{b}_1, \cdots, \mathfrak{b}_r \in \mathcal{B}_{[\![1,M]\!]}$ and $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}_{[\![1,M]\!]}$. Assume that there exist $c > 0$ and a functional $\Xi : \mathbb{R}_+^* \times L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}^+$ with $\Xi(t, (u, v)) = \mathcal{O}(1)$ such that*

1. *the assumptions of Proposition 7.1.8 hold for $\mathcal{E} = \mathcal{B}_{[\![1,M]\!]} \setminus \mathcal{N} \cup \{\mathfrak{b}_1, \cdots, \mathfrak{b}_r\}$,*
2. *the assumptions of Proposition 7.1.9 hold for $\mathcal{E} = \mathcal{B}_{[\![1,M]\!]} \setminus \mathcal{N}$.*

Let f_0, f_1, f_2 be analytic vector fields over $\mathbb{R}^d$. If $\mathcal{P}$ is linear form such that $\mathcal{P}|_{\mathcal{N}(f)(0)} \equiv 0$, as $(t, \|(u,v)\|_{L^1}) \to 0$,

$$\mathcal{P}\mathcal{Z}_M(t; f, (u,v))(0) = \sum_{i=1}^{r} \xi_{\mathfrak{b}_i}(t,(u,v))\mathcal{P}\left(f_{\mathfrak{b}_i}(0)\right) + \mathcal{O}\left(\Xi(t,(u,v))\right). \tag{7.1.13}$$

7.1.5 Interpolation inequalities

We recall the Gagliardo–Nirenberg interpolation inequalities used in this study and proved in [Gag59; Nir59].

Proposition 7.1.11 (Gagliardo–Nirenberg inequalities)**.** *Let $P, q, r, s \in [1, +\infty]$, $j < l \in \mathbb{N}$ and $\alpha \in (0,1)$ such that*

$$\frac{j}{l} \leq \alpha \quad \text{and} \quad \frac{1}{P} = j + \left(\frac{1}{r} - l\right)\alpha + \frac{1-\alpha}{q}.$$

There exists $C > 0$ such that, for every $t > 0$ and $\varphi \in \mathcal{C}^\infty([0,t], \mathbb{R})$,

$$\left\|D^j \varphi\right\|_{L^P} \leq C \left\|D^l \varphi\right\|_{L^r}^{\alpha} \|\varphi\|_{L^q}^{1-\alpha} + C t^{\frac{1}{P} - j - \frac{1}{s}} \|\varphi\|_{L^s}. \tag{7.1.14}$$

7.2 Necessary conditions for STLC in the symmetrical case

7.2.1 Dominant part of the logarithm

We use Corollary 7.1.10 to extract the main terms from the dynamics. This is the goal of the following statement.

Lemma 7.2.1. *Let $k, m \in \mathbb{N}^*$. Let $\mathcal{P}$ be a linear form satisfying $\mathcal{P}|_{\mathcal{N}_k^m(f)(0)} \equiv 0$. Then, as $(t, \|(u,v)\|_{L^1}) \to 0$,*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\mathcal{Z}_{\pi(k,m)}(t; f, (u,v))(0) = \mathcal{P}\left(f_{W_k^1}(0)\right)\xi_{W_k^1}(t,(u,v)) + \mathcal{P}\left(f_{W_k^2}(0)\right)\xi_{W_k^2}(t,(u,v)) \\ + \mathcal{P}\left(f_{C_{2k-1}}(0)\right)\xi_{C_{2k-1}}(t,(u,v)) + \mathcal{O}\left(t\|(u_k,v_k)\|_{L^2}^2 + |(u_1,\cdots,u_k,v_1,\cdots,v_k)(t)|^2\right). \end{aligned} \tag{7.2.1}$$

Proof. We apply Corollary 7.1.10 with $M = \pi(k,m)$, $\mathcal{N} = \mathcal{N}_k^m$, $L = 2k+2$, $r = 3$, $\sigma = 2k+2$, $\mathfrak{b}_1 = W_k^1$, $\mathfrak{b}_2 = W_k^2$ and $\mathfrak{b}_3 = C_{2k-1}$.

1. *Estimates on the main terms:* let $b \in \mathcal{B}_{[\![1,\pi(k,m)]\!]}$ be such that $b \notin \mathcal{N}_k^m \cup \{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3\}$. Then, $n(b) = 2$ and
   (a) If $b \in \mathcal{B}_{2,bad}$, $b = W_{j,l}^1$ or $b = W_{j,l}^2$ with $j > k$ or ($j = k$ and $l \geq 1$). Consequently, $|b| \geq 2k+2$ and the estimates (7.1.5) and (7.1.6) with $p = 1$ and $j_0 = k$ give (7.1.11) with $\Xi(t,(u,v)) = t\|(u_k,v_k)\|_{L^2}^2$.
   (b) If $b \in \mathcal{B}_{2,good}$, then $b = C_{j,l}$ with $j > 2k-1$ or ($j = 2k-1$ and $l \geq 1$). Similarly, $|b| \geq 2k+2$ and the estimate (7.1.7) with $p = q = 2$ and $k' = k$ gives (7.1.11) with $\Xi(t,(u,v)) = t\|(u_k,v_k)\|_{L^2}^2$ as $k - 2 - \lfloor \frac{j}{2} \rfloor < 0$.
2. *Estimates of cross terms:* let $b_1 \geq \cdots \geq b_q \in \mathcal{B} \setminus \{X_0\}$ be such that $n(b_1) + \cdots + n(b_q) \leq \pi(k,m)$ and $\operatorname{supp}\mathcal{F}(b_1,\cdots,b_q) \not\subset \mathcal{N}_k^m$. For $i \in [\![1,q]\!]$,

(a) if $b_i = M_j^1$ or M_j^2 with $j \in [\![0, k-1]\!]$, then by (1.6.14),

$$|\xi_{b_i}(t,(u,v))| \leq |(u_{j+1}, v_{j+1})(t)|.$$

Then, the estimate (7.1.12) is verified with $\sigma_i = j+1$, $\alpha_i = \frac{1}{2}$ and $\Xi(t,(u,v)) = |(u_1, \cdots, u_k, v_1, \cdots, v_k)(t)|^2$.

(b) If $b_i = M_j^1$ or M_j^2, with $j \geq k$, $|b_i| \geq k+1$ and the estimates (7.1.3) and (7.1.4) with $j_0 = k$ and $p = 2$ give

$$|\xi_{b_i}(t,(u,v))| \leq \frac{(ct)^{|b_i|}}{|b_i|!} t^{-(k+1)} t^{\frac{1}{2}} \|(u_k, v_k)\|_{L^2} = \frac{(ct)^{|b_i|}}{|b_i|!} t^{-(k+1)} \left(t \|(u_k, v_k)\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

We obtain (7.1.12) with $\sigma_i = k+1$ and $\alpha_i = \frac{1}{2}$.

Since $\operatorname{supp}\mathcal{F}(b_1, \cdots, b_q) \not\subset \mathcal{N}_k^m$, one has $q = 2$ and $b_1, b_2 \in \mathcal{B}_1$. Then, as $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, we can apply Corollary 7.1.10 and we obtain the desired equality.

□

7.2.2 Vectorial relations

The purpose of this section is to prove that the condition (BC) implies algebraic properties on the Lie brackets. Using this fact, we will be able to estimate one by one – in the next paragraph – the terms $|(u_1, \cdots, u_k, v_1, \cdots, v_k)(t)|$ which appear in the previous proposition.

Lemma 7.2.2 (A bracket relation). *Let $k, m \in \mathbb{N}^*$. For all $l \in [\![0, k-1]\!]$, for all $(\alpha_{j,1})_{j \in [\![0,l]\!]} \in \mathbb{R}^{l+1}$, $(\alpha_{j,2})_{j \in [\![0,l]\!]} \in \mathbb{R}^{l+1}$, one considers the bracket*

$$B := \sum_{j=0}^{l} \alpha_{j,1} M_j^1 + \sum_{j=0}^{l} \alpha_{j,2} M_j^2.$$

Then, the following expansion holds

$$\left[B0^{k-l-1}, B0^{k-l}\right] \in \alpha_{l,1}^2 W_k^1 + \alpha_{l,2}^2 W_k^2 + 2\alpha_{l,1}\alpha_{l,2} C_{2k-1} + \mathcal{N}_k^m.$$

This lemma is proved in Section 7.4.2.

Lemma 7.2.3. *Let $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^d$ be three vectors and $N \subset \mathbb{R}^d$ a vector subspace. If e_1, e_2, e_3, N satisfy (BC), then, there doesn't exist $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ such that*

$$a^2 e_1 + b^2 e_2 \pm 2ab e_3 \in N. \tag{7.2.2}$$

Proof. By contradiction, assume that there exists $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ satisfying (7.2.2). If $a = 0$, then (7.2.2) gives $b^2 e_2 \in N$. As, $b \neq 0$, one obtains $e_2 \in N$. This is a contradiction with (BC). Thus, $a \neq 0$. Similarly, $b \neq 0$. Hence, using $\mathbb{P}$ given by (BC), one has

$$a^2 \mathbb{P}(e_1) + b^2 \mathbb{P}(e_2) \pm 2ab \mathbb{P}(e_3) = 0. \tag{7.2.3}$$

Nevertheless, by hypothesis (BC) and Young's inequality,

$$|2ab\mathbb{P}(e_3)| < 2\,|ab|\,\sqrt{\mathbb{P}\left(e_1\right)\mathbb{P}\left(e_2\right)} < a^2\mathbb{P}\left(e_1\right) + b^2\mathbb{P}\left(e_2\right).$$

This is a contradiction with (7.2.3). □

Lemma 7.2.4. *Let $k, m \in \mathbb{N}^*$ and $\nu(k,m) := \left\lfloor \frac{\pi(k,m)}{2} \right\rfloor$. Assume that (4.3.2) is verified. Then,*

1. *the family $\left(f_{M_0^1}(0), \cdots f_{M_{k-1}^1}(0), f_{M_0^2}(0), \cdots, f_{M_{k-1}^2}(0)\right)$ is linearly independent.*
2. *if $\nu(k,m) \geq 2$,*

$$Span\left(f_{M_0^1}(0), \cdots, f_{M_{k-1}^1}(0), f_{M_0^2}(0), \cdots, f_{M_{k-1}^2}(0)\right) \cap S_{[\![2,\nu(k,m)]\!]}(f)(0) = \{0\}.$$

In particular, $f_1(0) \neq 0$ and $f_2(0) \neq 0$.

Proof. We prove the second point: assume by contradiction that there exist $(\alpha_{i,1}), (\alpha_{i,2}) \in \mathbb{R}^k$ not all zero and $B \in S_{[\![2,\nu(k,m)]\!]}(X)$ such that $f_{B_1}(0) = 0$, with

$$B_1 := \sum_{j=0}^{k-1} \left(\alpha_{j,1} M_j^1 + \alpha_{j,2} M_j^2\right) + B.$$

Let $K = \max\{j \in [\![0, k-1]\!];\ (\alpha_{j,1}, \alpha_{j,2}) \neq (0,0)\}$. As $f_0(0) = 0$, $f_{B_2}(0) = 0$, with

$$B_2 := [B_1 0^{k-1-K}, B_1 0^{k-K}] \in \alpha_{K,1}^2 W_k^1 + \alpha_{K,2}^2 W_k^2 + 2\alpha_{K,1}\alpha_{K,2} C_{2k-1} + \mathcal{N}_k^m + S_{[\![3,2\nu(k,m)]\!]}(X),$$

the expansion is given by Lemma 7.2.2 with $l = K$. As $\pi(k,m) \geq 2\nu(k,m)$ and $\nu(k,m) \geq 2$, one has $S_{[\![3,2\nu(k,m)]\!]}(X) \subseteq S_{[\![1,\pi(k,m)]\!]\setminus\{2\}}(X) \subseteq \mathcal{N}_k^m$. Thus,

$$\alpha_{K,1}^2 f_{W_k^1}(0) + \alpha_{K,2}^2 f_{W_k^2}(0) + 2\alpha_{K,1}\alpha_{K,2} f_{C_{2k-1}}(0) \in \mathcal{N}_k^m(f)(0).$$

We use Lemma 7.2.3 with $e_1 = f_{W_k^1}(0)$, $e_2 = f_{W_k^2}(0)$, $e_3 = f_{C_{2k-1}}(0)$ and $N = \mathcal{N}_k^m(f)(0)$ to obtain a contradiction. We obtain the first point in the same way, taking $B = 0$. □

7.2.3 Closed-loop estimate

Using the algebraic properties proved in the previous section, we can now estimate the terms $|(u_1, \cdots, u_k, v_1, \cdots, v_k)(t)|$, using the representation formula of the state of Magnus-type – see Corollary 1.6.18.

Lemma 7.2.5. *Let $k, m \in \mathbb{N}^*$ and $\nu(k,m) := \left\lfloor \frac{\pi(k,m)}{2} \right\rfloor$. Assume that (4.3.2) holds. Then, as $(t, \|(u,v)\|_{L^1}) \to 0$,*

$$|\left(u_1, \cdots, u_k, v_1, \cdots, v_k\right)(t)| = \mathcal{O}\left(t^{\frac{1}{2}}\,\|(u_k, v_k)\|_{L^2} + \|(u,v)\|_{L^1}^{\nu(k,m)+1} + \|x(t;(u,v))\|\right). \quad (7.2.4)$$

Proof. Let $i \in [\![0, k-1]\!]$, By Lemma 7.2.4, one can consider a linear form $\mathcal{P}$ such that $\mathcal{P}(f_{M_i^1}(0)) = 1$ and $\mathcal{P}|_{\mathcal{N}(f)(0)} \equiv 0$, with $\mathcal{N} := \mathcal{B}_{[\![2,\nu(k,m)]\!]} \cup \{M_0^1, \cdots, M_{k-1}^1, M_0^2, \cdots, M_{k-1}^2\} \setminus \{M_i^1\}$. Now, we use Corollary 7.1.10 with $M = \nu(k,m)$, $L = k+1$, $r = 1$ and $\mathfrak{b}_1 = M_i^1$.

Indeed, for all $b \in \mathcal{B}_{[\![1,\nu(k,m)]\!]}$ such that $b \notin \mathcal{N} \cup \{\mathfrak{b}_1\}$, necessarily, $n(b) = 1$ and $b = M_j^l$ for $j \geq k$ and $l \in \{1,2\}$. Thus, estimates (7.1.3) and (7.1.4), with $j_0 = k$ and $p = 2$ give

$$|\xi_b(t,(u,v))| \leq \frac{(ct)^{|b|}}{|b|!} t^{-(k+1)} \left(t^{\frac{1}{2}} \left\| (u_k, v_k) \right\|_{L^2} \right).$$

Then, (7.1.11) holds with $\Xi(t,(u,v)) = t^{\frac{1}{2}} \left\| (u_k, v_k) \right\|_{L^2}$ and $\sigma = k+1$. Moreover, there is no cross terms. Then, Corollary 7.1.10 leads to the equality

$$\mathcal{P}\mathcal{Z}_{\nu(k,m)}(t; f, (u,v))(0) = u_{i+1}(t) + \mathcal{O}\left(t^{\frac{1}{2}} \left\| (u_k, v_k) \right\|_{L^2} \right).$$

Using the Magnus formula given by Corollary 1.6.18 with $M = \nu(k,m)$, we finally get

$$\mathcal{P}x(t;(u,v)) = u_{i+1}(t) + \mathcal{O}\left(t^{\frac{1}{2}} \left\| (u_k, v_k) \right\|_{L^2} + \left\| (u,v) \right\|_{L^1}^{\nu(k,m)+1} + \left\| x(t;(u,v)) \right\|^{1+\frac{1}{\nu(k,m)}} \right).$$

We obtain the result. We can obtain the same estimate for $|v_{i+1}(t)|$, $i \in [\![0, k-1]\!]$. □

7.2.4 Interpolation inequality

The representation formula of the state – see Corollary 1.6.18 – with $M = \pi(k,m)$ makes a strong link between $x(t;(u,v))$ and $\mathcal{Z}_{\pi(k,m)}(t; f, (u,v))(0)$. Lemma 7.2.1 gives an expansion of $\mathbb{P}\left(\mathcal{Z}_{\pi(k,m)}(t; f, (u,v))(0) \right)$. Furthermore, the edge terms $|(u_1, \cdots, u_k, v_1, \cdots, v_k)(t)|$ are estimated by Lemma 7.2.5. However, there is an error term in the Magnus-type formula shaped as $\mathcal{O}\left(\left\| (u,v) \right\|_{L^1}^{\pi(k,m)+1} \right)$. We then relate this quantity to the size of the drift $\left\| (u_k, v_k) \right\|_{L^2}^2$, thanks to the Gagliardo–Nirenberg interpolation inequalities. This is the purpose of the following lemma.

Lemma 7.2.6. *Let $k, m \in \mathbb{N}^*$ and $p \in [1, +\infty]$. There exists $C > 0$ such that, for every $t > 0$ and $u \in W^{m,p}((0,t), \mathbb{R})$*

$$\left\| u \right\|_{L^1}^{\pi(k,m)+1} \leq C t^{\pi(k,m)-2k} \left\| u \right\|_{W^{m,p}}^{\pi(k,m)-1} \left\| u_k \right\|_{L^2}^2. \tag{7.2.5}$$

Proof. For simplicity, we write π instead of $\pi(k,m)$. We use the Gagliardo–Nirenberg interpolation inequalities (7.1.14) with $P = \frac{2(m+k)p}{2k+mp}$, $q = 2$, $r = p$, $s = 2$, $j = k$, $l = m+k$, $\alpha = \frac{k}{k+m}$ and $\varphi = u_k$ and we obtain

$$\left\| u \right\|_{L^P} \leq C \left\| u^{(m)} \right\|_{L^p}^{\alpha} \left\| u_k \right\|_{L^2}^{1-\alpha} + C t^{\frac{1}{P} - (k+\frac{1}{2})} \left\| u_k \right\|_{L^2}. \tag{7.2.6}$$

Moreover, using Hölder's inequality,

$$\left\| u \right\|_{L^1} \leq t^{1-\frac{1}{P}} \left\| u \right\|_{L^P}. \tag{7.2.7}$$

Using (7.2.6) and (7.2.7), we obtain

$$\left\| u \right\|_{L^1}^{\pi+1} \leq C t^{(\pi+1)(1-\frac{1}{P})} \left(\left\| u^{(m)} \right\|_{L^p}^{\alpha(\pi+1)} \left\| u_k \right\|_{L^2}^{(1-\alpha)(\pi+1)} + t^{(\pi+1)\left(\frac{1}{P} - (k+\frac{1}{2})\right)} \left\| u_k \right\|_{L^2}^{\pi+1} \right)$$

Thus, if we define $\beta := 1 + \frac{2k}{m}$, then, $(1-\alpha)(1+\beta) = 2$. We get

$$\|u\|_{L^1}^{\pi+1} \leq Ct^{(\pi+1)\left(1-\frac{1}{P}\right)} \left(\|u\|_{W^{m,p}}^{\alpha(\pi+1)} \|u_k\|_{L^2}^{(1-\alpha)(\pi-\beta)} + t^{(\pi+1)\left(\frac{1}{P}-(k+\frac{1}{2})\right)} \|u_k\|_{L^2}^{\pi-1} \right) \|u_k\|_{L^2}^2 . \tag{7.2.8}$$

Moreover,

$$\|u_k\|_{L^2} \leq t^{k+\frac{1}{2}} \|u\|_{L^\infty} \leq Ct^{k+\frac{1}{2}} \|u\|_{W^{m,p}} . \tag{7.2.9}$$

Using (7.2.9) in (7.2.8), we obtain

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^1}^{\pi+1} \leq Ct^{(\pi+1)\left(1-\frac{1}{P}\right)} &\left(\|u\|_{W^{m,p}}^{\alpha(\pi+1)+(1-\alpha)(\pi-\beta)} t^{(k+\frac{1}{2})(1-\alpha)(\pi-\beta)} \right. \\ &\left. + t^{(\pi+1)\left(\frac{1}{P}-(k+\frac{1}{2})\right)+(\pi-1)\left(k+\frac{1}{2}\right)} \|u\|_{W^{m,p}}^{\pi-1} \right) \|u_k\|_{L^2}^2 .\end{aligned}$$

As $\alpha(\pi+1) + (1-\alpha)(\pi-\beta) = \pi - 1$, one obtains

$$\|u\|_{L^1}^{\pi+1} \leq Ct^{(\pi+1)\left(1-\frac{1}{P}\right)} \left(t^{(k+\frac{1}{2})(1-\alpha)(\pi+1)-(2k+1)} + t^{\frac{\pi+1}{P}-(2k+1)} \right) \|u\|_{W^{m,p}}^{\pi-1} \|u_k\|_{L^2}^2 .$$

Finally,

$$\left(k+\frac{1}{2}\right)(1-\alpha) = \frac{(2k+1)m}{2(k+m)} \geq \frac{1}{P},$$

Thus,

$$\|u\|_{L^1}^{\pi+1} \leq Ct^{(\pi+1)\left(1-\frac{1}{P}\right)} t^{\frac{\pi+1}{P}-(2k+1)} \|u\|_{W^{m,p}}^{\pi-1} \|u_k\|_{L^2}^2 .$$

□

7.2.5 Proof of the drift

We can now use the Magnus-type representation formula given by Corollary 1.6.18, the expansion of $\mathbb{P}\mathcal{Z}_{\pi(k,m)}(t, f, (u,v))(0)$ given by Lemma 7.2.1, the estimate of Lemma 7.2.5 and the interpolation inequality given by Lemma 7.2.6 to prove Theorem 4.3.9.

Proof of Theorem 4.3.9. Let $k, m \in \mathbb{N}^*$ and $p \in [1, +\infty]$. We will write π instead of $\pi(k,m)$. Let $e_1 := f_{W_k^1}(0)$, $e_2 := f_{W_k^2}(0)$ and $e_3 := f_{C_{2k-1}}(0)$. Let $\mathbb{P}$ be a linear form given by (BC). The Magnus-type expansion formula given by Corollary 1.6.18 with $M = \pi$, the equalities (1.6.15) and (1.6.16) and (7.2.1) give, as $(t, \|(u,v)\|_{L^1}) \to 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}x(t;(u,v)) = \int_0^t &\left(\mathbb{P}(e_1)\frac{u_k^2}{2} + \mathbb{P}(e_2)\frac{v_k^2}{2} + \mathbb{P}(e_3)u_k v_k \right) + \mathcal{O}\Big(t \|(u_k, v_k)\|_{L^2}^2 \\ &+ |(u_1, \cdots, u_k, v_1, \cdots, v_k)(t)|^2 + \|(u,v)\|_{L^1}^{\pi+1} + \|x(t;(u,v))\|^{1+\frac{1}{\pi}} \Big) .\end{aligned} \tag{7.2.10}$$

The closed-loop estimates (7.2.4) gives, with $\nu := \lfloor \frac{\pi}{2} \rfloor$,

$$|(u_1, \cdots, u_k, v_1, \cdots, v_k)(t)|^2 = \mathcal{O}\left(t \|(u_k, v_k)\|_{L^2}^2 + \|(u,v)\|_{L^1}^{2\nu+2} + \|x(t;(u,v))\|^2 \right) . \tag{7.2.11}$$

By definition of ν, one has $2(\nu+1) \geq \pi + 1$. In particular, as $\|(u,v)\|_{L^1} \to 0$,

$$\|(u,v)\|_{L^1}^{2\nu+2} = \mathcal{O}\left(\|(u,v)\|_{L^1}^{\pi+1} \right) .$$

Using (7.2.11) in (7.2.10) and the interpolation inequality (7.2.5), one gets

$$\mathbb{P}x(t;(u,v)) = \int_0^t \left(\mathbb{P}(e_1)\frac{u_k^2}{2} + \mathbb{P}(e_2)\frac{v_k^2}{2} + \mathbb{P}(e_3)u_k v_k \right)$$
$$+\mathcal{O}\left(\left(t + t^{\pi-2k} \|(u,v)\|_{W^{m,p}}^{\pi-1} \right) \|(u_k,v_k)\|_{L^2}^2 + \|x(t;(u,v))\|^{1+\frac{1}{\pi}} \right).$$

We prove that the system (3.0.1) has a drift in the regime $(t, t^{\alpha}\|(u,v)\|_{W^{m,p}}) \to 0$, with $\alpha = \frac{\pi-2k}{\pi-1}$: by definition, there exist $C, \rho > 0$ such that, for every $t \in (0,\rho)$, there exists $\eta > 0$ *s.t.* for every $u, v \in W^{m,p}((0,t),\mathbb{R})$ with $\|(u,v)\|_{W^{m,p}} \leq \eta$,

$$\left| \mathbb{P}x(t;(u,v)) - \int_0^t \left(\mathbb{P}(e_1)\frac{u_k^2}{2} + \mathbb{P}(e_2)\frac{v_k^2}{2} + \mathbb{P}(e_3)u_k v_k \right) \right|$$
$$\leq C \left(\left(t + t^{\pi-2k} \|(u,v)\|_{W^{m,p}}^{\pi-1} \right) \|(u_k,v_k)\|_{L^2}^2 + \|x(t;(u,v))\|^{1+\frac{1}{\pi}} \right). \tag{7.2.12}$$

Let $\gamma := \frac{|\mathbb{P}(e_3)|}{\sqrt{\mathbb{P}(e_1)\mathbb{P}(e_2)}} < 1$, by hypothesis (BC). Using Young's inequality, one obtains

$$\int_0^t \left(\mathbb{P}(e_1)\frac{u_k^2}{2} + \mathbb{P}(e_2)\frac{v_k^2}{2} + \mathbb{P}(e_3)u_k v_k \right) \geq K \int_0^t \left(u_k^2 + v_k^2 \right), \tag{7.2.13}$$

with $K := \frac{1}{2}(1-\gamma)\min(\mathbb{P}(e_1),\mathbb{P}(e_2))$. For all $t \in \left(0, \min\left(\rho, \frac{K}{4C}\right)\right)$, $u, v \in W^{m,p}((0,t),\mathbb{R})$, with $\|(u,v)\|_{W^{m,p}} \leq \min\left(\eta, \left(t^{2k-\pi}\frac{K}{4C}\right)^{\frac{1}{\pi-1}}\right)$, the equalities (7.2.12) and (7.2.13) lead to

$$\mathbb{P}x(t;(u,v)) \geq \frac{K}{2}\Delta(u,v) - C\|x(t;(u,v))\|^{1+\frac{1}{\pi}},$$

with $\Delta : (u,v) \in L^1((0,1),\mathbb{R})^2 \mapsto \int_0^t \left(u_k^2 + v_k^2 \right) \in \mathbb{R}^+$. Then, the system (3.0.1) has a drift along $e_1 + e_2$ parallel to $\mathcal{N}_k^m(f)(0)$ with strength Δ as $(t, t^{\alpha}\|(u,v)\|_{W^{m,p}}) \to 0$. This concludes the proof of Theorem 4.3.9. ☐

7.3 Necessary conditions for STLC in the asymmetrical case

7.3.1 A new truncation in the Magnus-type representation formula

In order to prove Theorem 4.2.9, we first give an asymmetrical Magnus-type representation formula. This is the purpose of the following statement.

Proposition 7.3.1 (Asymmetrical Magnus expansion). *Let $M, N \in \mathbb{N}^*$ with $N \leq M$, let $\delta, T > 0$ and $f_0, f_1, f_2 : B(0,2\delta) \to \mathbb{R}^d$ be analytic vector fields with $f_0(0) = 0$ and $T\|f_0\|_\infty \leq \delta$. For $u, v \in L^1((0,T),\mathbb{R})$, as $\|(u,v)\|_{L^1} \to 0$,*

$$x(t;(u,v)) = \mathcal{Z}_{M,N}(t;f,(u,v))(0) + \mathcal{O}\left(\|u\|_{L^1(0,t)}^{M+1} + \|v\|_{L^1(0,t)}^{N+1} + \|x(t;(u,v))\|^{1+\frac{1}{M}} \right), \tag{7.3.1}$$

where $\mathcal{Z}_{M,N}$ *is defined as*

$$\mathcal{Z}_{M,N}(t; f, (u, v)) := \sum_{\substack{b \in \mathcal{B}_{[\![1,M]\!]} \\ n_2(b) \leq N}} \eta_b(t, (u, v)) f_b. \tag{7.3.2}$$

Proof. By definition

$$\mathcal{Z}_M(t; f, (u, v))(0) = \mathcal{Z}_{M,N}(t; f, (u, v))(0) + \sum_{\substack{b \in \mathcal{B}_{[\![1,M]\!]}, \\ n_2(b) \geq N+1}} \eta_b(t, (u, v)) f_b(0).$$

We use analytic estimates, as for Propositions 7.1.8 and 7.1.9 and the estimates on the coordinates of pseudo-first kind given by [BLBM23, Proposition 52] to obtain, as $\|(u, v)\|_{L^1} \to 0$,

$$\sum_{\substack{b \in \mathcal{B}_{[\![1,M]\!]}, \\ n_2(b) \geq N+1}} |||\eta_b(t, (u, v)) f_b|||_{r'} = \mathcal{O}\left(\|v\|_{L^1(0,t)}^{N+1}\right),$$

for a given $r' > 0$. The Magnus-type representation formula (1.6.7) leads to the conclusion. $\square$

We are now in a position to prove Theorem 4.2.9. We adopt the approach presented in Section 4.3.2. Let $k, k', m, m' \in \mathbb{N}^*$. We reason by contraposition and we assume that

$$f_{W_k^1}(0), \quad f_{W_{k'}^2}(0), \quad f_{C_{k+k'-1}}(0), \quad \mathcal{N}_{k,k'}^{m,m'}(f)(0) \quad \text{satisfy (BC)}. \tag{7.3.3}$$

We prove Theorem 4.2.9 as a consequence of the following more precise statement.

Theorem 7.3.2. *Let* $k, k', m, m' \in \mathbb{N}^*$ *and* $p, p' \in [1, +\infty]$. *Assume that* (7.3.3) *holds, then, system* (3.0.1) *has a drift along* $f_{W_k^1}(0) + f_{W_{k'}^2}(0)$ *parallel to* $\mathcal{N}_{k,k'}^{m,m'}(f)(0)$ *with strength* $\Delta : (u, v) \in L^1((0, 1), \mathbb{R})^2 \mapsto \int_0^t \left(u_k^2 + v_{k'}^2\right) \in \mathbb{R}^+$ *as* $\left(t, \left(t^\alpha \|u\|_{W^{m,p}}, t^{\alpha'} \|v\|_{W^{m',p'}}\right)\right) \to 0$, *where* $\alpha = \frac{\pi(k,m)-2k}{\pi(k,m)-1}$ *and* $\alpha' = \frac{\pi(k',m')-2k'}{\pi(k',m')-1}$.

Thus, we obtain Theorem 4.2.9 thanks to Lemma 4.3.2. From now on, we will sometimes refer to $\pi(k, m)$ as π, $\pi(k', m')$ as π' and $\mathcal{N}_{k,k'}^{m,m'}$ as $\mathcal{N}$.

7.3.2 Dominant part of the logarithm

Lemma 7.3.3. *Let* $k, k', m, m' \in \mathbb{N}^*$ *be such that* $k' \leq k$. *Let* $\mathcal{P}$ *be a linear form satisfying* $\mathcal{P}_{|\mathcal{N}(f)(0)} \equiv 0$. *Then, as* $(t, \|(u, v)\|_{L^1}) \to 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\mathcal{Z}_{\pi,\pi'}(t; f, (u, v))(0) &= \mathcal{P}\left(f_{W_k^1}(0)\right) \xi_{W_k^1}(t, (u, v)) + \mathcal{P}\left(f_{W_{k'}^2}(0)\right) \xi_{W_{k'}^2}(t, (u, v)) \\ &+ \mathcal{P}\left(f_{C_{k+k'-1}}(0)\right) \xi_{C_{k+k'-1}}(t, (u, v)) + \mathcal{O}\left(t \|(u_k, v_{k'})\|_{L^2}^2 + |(u_1, \cdots, u_k, v_1, \cdots, v_{k'})(t)|^2\right). \end{aligned} \tag{7.3.4}$$

Proof. As for Lemma 7.2.1, we fix $M = \pi$, $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{k,k'}^{m,m'}$, $r = 3$, $\mathfrak{b}_1 = W_k^1$, $\mathfrak{b}_2 = W_{k'}^2$ and $\mathfrak{b}_3 = C_{k+k'-1}$. Let $N = \pi'$.

1. *Estimates of the main terms:* let $b \in \mathcal{E} := \mathcal{B}_{[\![1,\pi]\!]} \cap \{b \in \mathrm{Br}(X),\ n_2(b) \leq \pi'\} \setminus \mathcal{N} \cup \{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3\} \cup \{C_{j,l};\ l + \lfloor \frac{j}{2} \rfloor \leq k-2\}$. Then, $n(b) = 2$ and
   (a) If $b \in \mathcal{B}_{2,bad} \cap \{b \in \mathrm{Br}(X);\ n_1(b) = 2\}$, $b = W^1_{j,l}$ with $j > k$ or ($j = k$ and $l \geq 1$). Thus $|b| \geq 2k+2$ and the estimate (7.1.5) with $j_0 = k$ and $p = 1$ gives (7.1.11) with $\Xi(t,(u,v)) := t\,\|u_k\|^2_{L^2}$.
   (b) If $b \in \mathcal{B}_{2,bad} \cap \{b \in \mathrm{Br}(X);\ n_2(b) = 2\}$, $b = W^2_{j,l}$ with $j > k'$ or ($j = k'$ and $l \geq 1$). Thus $|b| \geq 2k'+2$ and the estimate (7.1.6) with $j_0 = k'$ and $p = 1$ gives (7.1.11) with $\Xi(t,(u,v)) := t\,\|v_{k'}\|^2_{L^2}$.
   (c) Else, $b \in \mathcal{B}_{2,good}$ and $b = C_{j,l}$ with $j \geq k+k'$ or ($j \geq k+k'-1$ and $l \geq 1$). Then, $|b| \geq k+k'+2$ and the estimate (7.1.7) with $p = q = 2$ gives (7.1.11) with $\Xi(t,(u,v)) := t\,\|(u_k, v_{k'})\|^2_{L^2}$.

   Thus, one can apply Proposition 7.1.8 to obtain as $\|(u,v)\|_{L^1} \to 0$,
$$\sum_{b\in\mathcal{E}} |||\xi_b(t,(u,v))f_b|||_{r'} = \mathcal{O}\left(t\,\|(u_k,v_{k'})\|^2_{L^2}\right),$$
   for a given $r' > 0$. We finally need to examine the brackets $b \in \{C_{j,l};\ l + \lfloor \frac{j}{2} \rfloor \leq k-2\}$, where the set is finite. Then, estimate (7.1.7) with $p = q = 2$ gives, as $\|(u,v)\|_{L^1} \to 0$,
$$\sum_{l+\lfloor \frac{j}{2}\rfloor \leq k-2} |||\xi_{C_{j,l}}(t,(u,v))f_{C_{j,l}}|||_{r'} = \mathcal{O}\left(t\,\|(u_k,v_{k'})\|^2_{L^2} + |(u_1,\cdots,u_k)(t)|^2\right).$$
   Finally,
$$\sum_{\substack{b\in\mathcal{B}_{[\![1,\pi]\!]},\ n_2(b)\leq\pi',\\ b\notin\mathcal{N}\cup\{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}_3\}}} |||\xi_b(t,(u,v))f_b|||_{r'} = \mathcal{O}\left(t\,\|(u_k,v_{k'})\|^2_{L^2} + |(u_1,\cdots,u_k)(t)|^2\right).$$

2. *Estimates of cross terms:* we apply Proposition 7.1.9 with the set $\mathcal{E} := \mathcal{B}_{[\![1,\pi]\!]} \cap \{b \in \mathrm{Br}(X);\ n_2(b) \leq \pi'\} \setminus \mathcal{N}$. Let $b_1 \geq \cdots \geq b_q \in \mathcal{B}\setminus\{X_0\}$ be such that $n_1(b_1)+\cdots+n_1(b_q) \leq \pi$, $n_2(b_1)+\cdots+n_2(b_q) \leq \pi'$ and $\mathrm{supp}\mathcal{F}(b_1,\cdots,b_q) \not\subset \mathcal{N}$. For $i \in [\![1,q]\!]$,
   (a) If $b_i = M^1_j$ with $j \in [\![0,k-1]\!]$ or $b_i = M^2_l$ with $l \in [\![0,k'-1]\!]$, then by (1.6.14),
$$|\xi_{b_i}(t,(u,v))| \leq |(u_{j+1}, v_{l+1})(t)|.$$
   Then, the estimate (7.1.12) is verified with $\sigma_i = j+1$ or $\sigma_i = l+1$, $\alpha_i = \frac{1}{2}$ and $\Xi(t,(u,v)) = |(u_1,\cdots,u_k,v_1,\cdots,v'_k)(t)|^2$.
   (b) If $b_i = M^1_j$ with $j \geq k$, $|b_i| \geq k+1$ and the estimate (7.1.3) with $j_0 = k$ and $p = 2$ gives
$$|\xi_{b_i}(t,(u,v))| \leq \frac{(ct)^{|b_i|}}{|b_i|!} t^{-(k+1)} t^{\frac{1}{2}}\,\|u_k\|_{L^2} = \frac{(ct)^{|b_i|}}{|b_i|!} t^{-(k+1)} \left(t\,\|u_k\|^2_{L^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$
   We obtain (7.1.12) with $\sigma_i = k+1$ and $\alpha_i = \frac{1}{2}$.
   (c) If $b_i = M^2_l$ with $l \geq k'$, $|b_i| \geq k'+1$ and the estimate (7.1.4) with $j_0 = k'$ and $p = 2$

gives

$$|\xi_{b_i}(t,(u,v))| \leq \frac{(ct)^{|b_i|}}{|b_i|!} t^{-(k'+1)} t^{\frac{1}{2}} \|v_{k'}\|_{L^2} = \frac{(ct)^{|b_i|}}{|b_i|!} t^{-(k'+1)} \left(t \|v_{k'}\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

We obtain (7.1.12) with $\sigma_i = k'+1$ and $\alpha_i = \frac{1}{2}$.

Since $\text{supp}\mathcal{F}(b_1, \cdots, b_q) \not\subset \mathcal{N}$, one has $q=2$ and $b_1, b_2 \in \mathcal{B}_1$. Moreover, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Thus, the definition of $\mathcal{Z}_{\pi,\pi'}$ – see (7.3.2) – leads to the result. □

7.3.3 Vectorial relations

Lemma 7.3.4 (A bracket relation)**.** *Let $k, k', m, m' \in \mathbb{N}^*$ be such that $k' \leq k$. For all $l \in [\![0, k'-1]\!]$, for all $(\alpha_j)_{j \in [\![0, l+k-k']\!]} \in \mathbb{R}^{l+k-k'+1}$, $(\beta_j)_{j\in[\![0,l]\!]} \in \mathbb{R}^{l+1}$, one considers the bracket*

$$B := \sum_{j=0}^{l+k-k'} \alpha_j M_j^1 + \sum_{j=0}^{l} \beta_j M_j^2.$$

Then, the following expansion holds

$$\left[B0^{k'-l-1}, B0^{k'-l}\right] \in \alpha_{l+k-k'}^2 W_k^1 + \beta_l^2 W_{k'}^2 + 2(-1)^{\lfloor \frac{k-k'}{2} \rfloor} \alpha_{l+k-k'} \beta_l C_{k+k'-1} + \mathcal{N}_{k,k'}^{m,m'}.$$

This lemma is proved in Section 7.4.3. This is a generalization of Lemma 7.2.2, in the asymmetrical case.

Lemma 7.3.5. *Let $k, k', m, m' \in \mathbb{N}^*$ be such that $k' \leq k$ and $\nu := \lfloor \frac{\pi}{2} \rfloor$, $\nu' := \left\lfloor \frac{\pi'}{2} \right\rfloor$. Assume that (7.3.3) is verified. Then,*

1. *the family $\left(f_{M_0^1}(0), \cdots f_{M_{k-1}^1}(0), f_{M_0^2}(0), \cdots, f_{M_{k'-1}^2}(0)\right)$ is linearly independent.*
2. *if $\nu \geq 2$,*

$$\mathit{Span}\left(f_{M_0^1}(0), \cdots, f_{M_{k-1}^1}(0), f_{M_0^2}(0), \cdots, f_{M_{k'-1}^2}(0)\right) \cap S_{[\![2,\nu]\!]}(f)(0) \cap S_{[\![0,\nu]\!],[\![0,\nu']\!]}(f)(0) = \{0\}.$$

Proof. We prove the result in the same way as Lemma 7.2.4, we start with the second point. Assume by contradiction that there exist $(\alpha_i), (\beta_i)$, reals, not all zero and $B \in S_{[\![2,\nu]\!]}(X) \cap S_{[\![0,\nu]\!],[\![0,\nu']\!]}(X)$ such that $f_{B_1}(0) = 0$, with

$$B_1 := \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j M_j^1 + \sum_{j=0}^{k'-1} \beta_j M_j^2 + B.$$

1. Firstly, assume that $\alpha_{k-k'} = \cdots = \alpha_{k-1} = \beta_0 = \cdots = \beta_{k'-1} = 0$. One considers $K := \max\{j \in [\![0, k-k'-1]\!];\ \alpha_j \neq 0\}$. As $f_0(0) = 0$, one has $f_{B_2}(0) = 0$ with

$$B_2 := [B_1 0^{k-1-K}, B_1 0^{k-K}] \in \alpha_K^2 W_k^1 + \mathcal{N} + S_{[\![3,2\nu]\!]} \cap S_{[\![0,2\nu]\!],[\![0,2\nu']\!]}(X).$$

Moreover, by definition of ν and ν',

$$S_{[\![3,2\nu]\!]} \cap S_{[\![0,2\nu]\!],[\![0,2\nu']\!]}(X) \subseteq S_{[\![1,\pi]\!]\setminus\{2\}} \cap S_{[\![0,\pi]\!],[\![0,\pi']\!]}(X) \subseteq \mathcal{N}. \tag{7.3.5}$$

As $\alpha_K \neq 0$, we obtain a contradiction with (7.3.3), as $f_{W_k^1}(0) \notin \mathcal{N}(f)(0)$.

2. Else, $K := \max\{j \in [\![0, k'-1]\!];\ (\alpha_{k-k'+j}, \beta_j) \neq (0,0)\}$ is well defined. As $f_0(0) = 0$, $f_{B_2}(0) = 0$, with

$$\begin{aligned} B_2 := [B_1 0^{k'-1-K}, B_1 0^{k'-K}] \in \alpha^2_{k-k'+K} W_k^1 + \beta_K^2 W_{k'}^2 \\ +2(-1)^{\lfloor \frac{k-k'}{2} \rfloor} \alpha_{k-k'+K}\beta_K C_{k+k'-1} + \mathcal{N} + S_{[\![3,2\nu]\!]} \cap S_{[\![0,2\nu]\!],[\![0,2\nu']\!]}(X), \end{aligned}$$

the expansion is given by Lemma 7.3.4 with $l = K$. Using (7.3.5), one finally obtains

$$\alpha^2_{k-k'+K} f_{W_k^1}(0) + \beta_K^2 f_{W_{k'}^2}(0) + 2(-1)^{\lfloor \frac{k-k'}{2} \rfloor} \alpha_{k-k'+K}\beta_K f_{C_{k+k'-1}}(0) \in \mathcal{N}(f)(0).$$

We use Lemma 7.2.3 to obtain a contradiction. The first point is obtained with $B = 0$.

□

7.3.4 Closed-loop estimate

Lemma 7.3.6. *Let $k, k', m, m' \in \mathbb{N}^*$ be such that $k' \leq k$ and $\nu := \lfloor \frac{\pi}{2} \rfloor$, $\nu' := \left\lfloor \frac{\pi'}{2} \right\rfloor$. Assume that (7.3.3) holds. Then, as $(t, \|(u,v)\|_{L^1}) \to 0$,*

$$\begin{aligned} |\,(u_1, \cdots, u_k, v_1, \cdots, v_{k'})\,(t)| = \mathcal{O}\Big(t^{\frac{1}{2}} \left\|(u_k, v_{k'})\right\|_{L^2} + \|u\|_{L^1}^{\nu+1} \\ + \|v\|_{L^1}^{\nu'+1} + \|x(t;(u,v))\|\Big). \end{aligned} \tag{7.3.6}$$

Proof. We prove the estimate as Lemma 7.2.5. For that, we use the asymmetrical Magnus-type representation formula given by Proposition 7.3.1 with $M = \nu$, $N = \nu'$ instead of Corollary 1.6.18. □

7.3.5 Proof of the drift

Proof of Theorem 7.3.2. Let $k, k', m, m' \in \mathbb{N}^*$ and $p, p' \in [1, +\infty]$ be such that $k' \leq k$. Let $e_1 := f_{W_k^1}(0)$, $e_2 := f_{W_{k'}^2}(0)$ and $e_3 := f_{C_{k+k'-1}}(0)$. Let $\mathbb{P}$ be a linear form given by (BC). The asymmetrical Magnus expansion formula given by Proposition 7.3.1 with $M = \pi$, $N = \pi'$, the equalities (1.6.15) and (7.3.4) give, as $(t, \|(u,v)\|_{L^1}) \to 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}x(t;(u,v)) = \int_0^t \left(\mathbb{P}(e_1)\frac{u_k^2}{2} + \mathbb{P}(e_2)\frac{v_{k'}^2}{2}\right) + \mathbb{P}(e_3)\xi_{C_{k+k'-1}}(t,(u,v)) + \mathcal{O}\Big(t \left\|(u_k, v_{k'})\right\|^2_{L^2} \\ + |(u_1, \cdots, u_k, v_1, \cdots, v_{k'})(t)|^2 + \|u\|_{L^1}^{\pi+1} + \|v\|_{L^1}^{\pi'+1} + \|x(t;(u,v))\|^{1+\frac{1}{\pi}}\Big). \end{aligned}$$

1. If $k' \leq k-2$, then, one can apply Lemma 7.1.1 with $j = k+k'-1$, $l = 0$ and $N =$

$k-2-\lfloor\frac{k+k'-1}{2}\rfloor$ to obtain

$$\xi_{C_{k+k'-1}}(t,(u,v)) = \sum_{\mu=0}^{N}(-1)^{\mu}u_{\lfloor\frac{k+k'-1}{2}\rfloor+2+\mu}(t)v_{\lfloor\frac{k+k'}{2}\rfloor-\mu}(t) + (-1)^{N+1}\int_0^t u_k v_{k'}.$$

2. If $k' \in \{k-1,k\}$, the equation (1.6.16) leads to $\xi_{C_{k+k'-1}}(t,(u,v)) = \int_0^t u_k v_{k'}$ and the writing is already convenient. In these cases, $N+1=0$.

In all cases, the following equality holds

$$\xi_{C_{k+k'-1}}(t,(u,v)) = (-1)^{N+1}\int_0^t u_k v_{k'} + \mathcal{O}\left(|(u_1,\cdots,u_k)(t)|^2 + t\,\|v_{k'}\|_{L^2}^2\right). \tag{7.3.7}$$

The fact that $2(\nu+1)\geq\pi+1$, $2(\nu'+1)\geq\pi'+1$, the closed-loop estimates (7.3.6) and the equality (7.3.7) give, as $\|(u,v)\|_{L^1}\to 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}x(t;(u,v)) = &\int_0^t\left(\mathbb{P}(e_1)\frac{u_k^2}{2} + \mathbb{P}(e_2)\frac{v_{k'}^2}{2} + (-1)^{N+1}\mathbb{P}(e_3)u_k v_{k'}\right)\\ &+\mathcal{O}\left(t\,\|(u_k,v_{k'})\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^1}^{\pi+1} + \|v\|_{L^1}^{\pi'+1} + \|x(t;(u,v))\|^{1+\frac{1}{\pi}}\right).\end{aligned}$$

Finally, we use the interpolation inequality (7.2.5) to obtain

$$\begin{aligned}\mathbb{P}x(t;(u,v)) = &\int_0^t\left(\mathbb{P}(e_1)\frac{u_k^2}{2} + \mathbb{P}(e_2)\frac{v_{k'}^2}{2} + (-1)^{N+1}\mathbb{P}(e_3)u_k v_{k'}\right)\\ +\mathcal{O}\Big(&\left(t + t^{\pi-2k}\|u\|_{W^{m,p}}^{\pi-1}\right)\|u_k\|_{L^2}^2 + \left(t + t^{\pi'-2k'}\|v\|_{W^{m',p'}}^{\pi'-1}\right)\|v_{k'}\|_{L^2}^2 + \|x(t;(u,v))\|^{1+\frac{1}{\pi}}\Big).\end{aligned}$$

Let $\alpha := \frac{\pi-2k}{\pi-1}$, $\alpha' := \frac{\pi'-2k'}{\pi'-1}$ and $\Delta : (u,v)\in L^1((0,1),\mathbb{R})^2 \mapsto \int_0^t\left(u_k^2+v_{k'}^2\right)\in\mathbb{R}^+$. We prove that the system (3.0.1) has a drift along e_1+e_2, parallel to $\mathcal{N}(f)(0)$ with strength Δ in regime $\left(t,\left(t^{\alpha}\|u\|_{W^{m,p}}, t^{\alpha'}\|v\|_{W^{m',p'}}\right)\right)\to 0$, as before. This concludes the proof of Theorem 7.3.2. □

7.4 Postponed proofs

7.4.1 Geometric conditions

7.4.1.1 Necessary and sufficient conditions in the quotient space

Proof of Proposition 4.3.8. Assume that (BC) is not satisfied and that the points 1, 3 and 4 are not verified. The purpose is to show that the second one is. Then, one of the three following possibilities holds

a. $(\tilde{e_1},\tilde{e_2})$ is a linearly independent family,

b. $\tilde{e_2}=\beta\tilde{e_1}$ with $\beta>0$ and $(\tilde{e_1},\tilde{e_3})$ is a linearly independent family,

c. $\tilde{e_1}\neq 0$, $\tilde{e_2}=\beta\tilde{e_1}$ and $\tilde{e_3}=\gamma\tilde{e_1}$ with $\gamma^2<\beta$.

If the point *b.* holds, then $\mathrm{Span}(e_1)\oplus\mathrm{Span}(e_3)\oplus N$. In this situation, one can define $\mathbb{P}$ as

$$\mathbb{P}(e_1)=1, \qquad \mathbb{P}(e_3)=0, \qquad \mathbb{P}_{|N}=0.$$

Then, $\mathbb{P}$ satisfies (BC). This is a contradiction. If the point $c.$ holds, then $\mathrm{Span}(e_1) \oplus N$. Thus, one can define $\mathbb{P}$ as

$$\mathbb{P}(e_1) = 1, \qquad \mathbb{P}_{|N} = 0.$$

Then, $\mathbb{P}(e_3)^2 - \mathbb{P}(e_1)\mathbb{P}(e_2) = \gamma^2 - \beta < 0$ and $\mathbb{P}$ satisfies (BC), this is a contradiction. Necessarily, $a.$ holds, *i.e.* $(\tilde{\mathbf{e_1}}, \tilde{\mathbf{e_2}})$ **is a linearly independent family**. If $\dim(\mathrm{Span}(\tilde{e_1}, \tilde{e_2}, \tilde{e_3})) = 3$, then $\mathrm{Span}(e_1) \oplus \mathrm{Span}(e_2) \oplus \mathrm{Span}(e_3) \oplus N$. Thus, one can define $\mathbb{P}$ as

$$\mathbb{P}(e_1) = 1, \qquad \mathbb{P}(e_2) = 1, \qquad \mathbb{P}(e_3) = 0, \qquad \mathbb{P}_{|N} = 0.$$

Once again, $\mathbb{P}$ satisfies (BC), this is a contradiction. Consequently, **there exists** $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$ **such that** $\tilde{\mathbf{e_3}} = \mathbf{a}\tilde{\mathbf{e_1}} + \mathbf{b}\tilde{\mathbf{e_2}}$. Finally, assume that $ab < \frac{1}{4}$.

1. If $a = 0$, then, one can define $\mathbb{P}$ as

$$\mathbb{P}(e_1) = b^2 + 1, \qquad \mathbb{P}(e_2) = 1, \qquad \mathbb{P}_{|N} = 0.$$

   Then, $\mathbb{P}$ satisfies (BC).

2. Else, $Q := a^2x^2 + (2ab-1)x + b^2$ verifies $\Delta = 1 - 4ab > 0$. Then $x^* := \frac{1-2ab}{2a^2} > 0$ satisfies $Q(x^*) < 0$. One can define $\mathbb{P}$ as

$$\mathbb{P}(e_1) = x^*, \qquad \mathbb{P}(e_2) = 1, \qquad \mathbb{P}_{|N} = 0.$$

   Then, $\mathbb{P}$ satisfies (BC).

This is a contradiction. Consequently, $\mathbf{ab} \geq \mathbf{\frac{1}{4}}$. This is the desired property.

Conversely, we reason by contraposition. Assume that (BC) holds and let $\mathbb{P}$ be such a linear form.

1. If the point 1 is satisfied, $e_1 \in N$ and $\mathbb{P}(e_1) = 0$ or $e_2 \in N$ and $\mathbb{P}(e_2) = 0$.
2. If the point 2 holds, $a \neq 0$ and

$$\mathbb{P}(e_3)^2 - \mathbb{P}(e_1)\mathbb{P}(e_2) = a^2\left(\mathbb{P}(e_1) + \left(\frac{b}{a} - \frac{1}{2a^2}\right)\mathbb{P}(e_2)\right)^2 + \frac{4ab-1}{4a^2}\mathbb{P}(e_2)^2 \geq 0.$$

3. If the point 3 is satisfied, $\mathbb{P}(e_1)\mathbb{P}(e_2) = \beta\mathbb{P}(e_1)^2 \leq 0$.
4. If the point 4 holds, $\mathbb{P}(e_3)^2 - \mathbb{P}(e_1)\mathbb{P}(e_2) = (\gamma^2 - \beta)\mathbb{P}(e_1)^2 \geq 0$.

All these points are in contradiction with (BC). □

7.4.1.2 Necessary and sufficient condition in the affine space

Definition 7.4.1. *For $x, y \in \mathbb{R}^d$ two vectors, we define the convex cones:*

$$Conv^+(x,y) := \{\lambda x + \mu y, \quad \lambda, \mu \geq 0\},$$

$$Conv^-(x,y) := \{\lambda x + \mu y, \quad \lambda, \mu \leq 0\} = Conv^+(-x,-y) = -Conv^+(x,y),$$

and

$$Conv^{\pm}(x, y) := Conv^{+}(x, y) \cup Conv^{-}(x, y).$$

Proposition 7.4.2. *[Geometric conditions in the linearly independent case] Let $e_1, e_2, e_3,$ be three vectors and $N \subset \mathbb{R}^d$ a vector subspace. Assume that (e_1, e_2) are linearly independent vectors. Then,*

1. *If $e_3 \notin N + Span(e_1, e_2)$,*

$$e_1, e_2, e_3, N \text{ verify (BC) iff } Conv^{\pm}(e_1, e_2) \cap N = \{0\}.$$

2. *If $e_3 \in N + Span(e_1, e_2)$,*

   (a) If $N \cap Span(e_1, e_2) = \{0\}$, then there exist a unique $(a, b, n) \in \mathbb{R}^2 \times N$ such that $e_3 = ae_1 + be_2 + n$ and

$$e_1, e_2, e_3, N \text{ verify (BC) iff } ab < \frac{1}{4}.$$

   (b) If $\dim(N \cap Span(e_1, e_2)) = 1$, then $N \cap Span(e_1, e_2) = Span(f_1)$ with $f_1 = \lambda e_1 + \mu e_2$. Then,

$$e_1, e_2, e_3, N \text{ verify (BC) iff } Conv^{\pm}(e_1, e_2) \cap N = \{0\} \text{ and}$$

$$\text{for all decomposition } e_3 = ae_1 + be_2 + n, \text{ one has } (a\mu - b\lambda)^2 < -\lambda\mu.$$

   (c) Otherwise, $\dim(N \cap Span(e_1, e_2)) = 2$ and it's always impossible.

Remark 7.4.3. *Note that, in the case 2.(b), if we write two different decompositions of e_3, one has:*

$$e_3 = ae_1 + be_2 + n, \qquad e_3 = a'e_1 + b'e_2 + n',$$

with $n, n' \in N$. Then,

$$(a - a')e_1 + (b - b')e_2 = n' - n \in N \cap Span(e_1, e_2) = Span(f_1).$$

Thus, there exists $C \in \mathbb{R}$ such that: $(a - a' - C\lambda)e_1 + (b - b' - C\mu)e_2 = 0$. As (e_1, e_2) are linearly independent vectors, one gets:

$$a = a' + C\lambda, \qquad b = b' + C\mu.$$

Thus,

$$(a\mu - b\lambda)^2 = (a'\mu + C\lambda\mu - b'\lambda - C\mu\lambda)^2 = (a'\mu - b'\lambda)^2.$$

This quantity is independent of the decomposition. So, in practice, it's enough to check the condition on a particular decomposition.

Proof. 1. For the first point, assume that e_1, e_2, e_3, N satisfy (BC). Then, we consider such a linear form $\mathbb{P}$. For all $x \in \text{Conv}^{+}(e_1, e_2) \cap N$, there exist $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^{+}$ with $x = \lambda e_1 + \mu e_2$. So,

$$0 = \mathbb{P}(x) = \lambda\mathbb{P}(e_1) + \mu\mathbb{P}(e_2).$$

This is a sum of two non-negative quantities. As $\mathbb{P}(e_1), \mathbb{P}(e_2) > 0$ we get $\lambda = \mu = 0$. The same proof holds for $\mathrm{Conv}^-(e_1, e_2) \cap N$.

Conversely, assume that $\mathrm{Conv}^{\pm}(e_1, e_2) \cap N = \{0\}$. Then, we consider two different cases:

- If $\dim(N \cap \mathrm{Span}(e_1, e_2)) = 0$, then $\mathrm{Span}(e_1, e_2) \oplus N \oplus \mathrm{Span}(e_3)$. Then, we can define a linear map $\mathbb{P}$ that satisfies (BC).
- Otherwise, $N \cap \mathrm{Span}(e_1, e_2) = \mathrm{Span}(f_1)$, with $f_1 = \lambda e_1 + \mu e_2$ and $\lambda\mu < 0$. Then, we complete (f_1) as a basis of N, $(f_1, \cdots, f_r)$. Thus, $\mathrm{Span}(e_1, e_2) \oplus \mathrm{Span}(f_2, \cdots, f_r) \oplus \mathrm{Span}(e_3)$. Thus, we define a linear map $\mathbb{P}$ with:

$$\mathbb{P}(e_1) = 1, \qquad \mathbb{P}(e_2) = -\frac{\lambda}{\mu}, \qquad \forall i \in [\![2; r]\!], \quad \mathbb{P}(f_i) = 0, \qquad \mathbb{P}(e_3) = 0.$$

  By construction, $\mathbb{P}$ answers the question.

2.(a). Assume that e_1, e_2, e_3, N satisfy (BC). If $\mathbb{P}$ is the linear map given by (BC),

$$\mathbb{P}(e_3) = a\mathbb{P}(e_1) + b\mathbb{P}(e_2).$$

Then, if $a = 0$, obviously, $ab < \frac{1}{4}$ Now, if $a \neq 0$,

$$\mathbb{P}(e_3)^2 - \mathbb{P}(e_1)\mathbb{P}(e_2) = a^2 \left(\mathbb{P}(e_1) + \left(\frac{b}{a} - \frac{1}{2a^2}\right)\mathbb{P}(e_2)\right)^2 + \frac{4ab-1}{4a^2}\mathbb{P}(e_2)^2 < 0. \quad (7.4.1)$$

Necessarily, $4ab - 1 < 0$.

Conversely, assume that $ab < \frac{1}{4}$. One has $\mathrm{Span}(e_1, e_2) \oplus N$. If $a = 0$, one defines $\mathbb{P}$ as:

$$\mathbb{P}(e_1) = b^2 + 1, \qquad \mathbb{P}(e_2) = 1, \qquad \mathbb{P}_{|N} = 0.$$

Let's assume that $a \neq 0$. We fix $y > 0$ and consider the polynomial function in x, $Q_y(x) := a^2x^2 + (2ab-1)xy + b^2y^2$. The discriminant of Q_y is given by $\Delta_y = y^2(1 - 4ab) > 0$. Then, $x_y^{\pm} := \frac{(1-2ab)y \pm \sqrt{\Delta_y}}{2a^2}$ are the roots of Q_y, with $x_y^+ > 0$. Consequently, $Q_y < 0$ in (x_y^-, x_y^+). Then, for $\xi(y) \in (\max(x_y^-, 0), x_y^+)$, $Q_y(\xi(y)) < 0$. Then, we construct a linear form $\mathbb{P}$ with

$$\mathbb{P}(e_1) = \xi(y), \qquad \mathbb{P}(e_2) = y, \qquad \mathbb{P}_{|N} = 0,$$

whatever the value of $y > 0$. This is possible, because $\mathrm{Span}(e_1, e_2) \oplus N$.

2.(b). Assume that e_1, e_2, e_2, N satisfy (BC). The condition $\mathrm{Conv}^{\pm}(e_1, e_2) \cap N = \{0\}$ is satisfied as before. Let $\mathbb{P}$ be a linear form,

$$\mathbb{P}(f_1) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(e_2) = -\frac{\lambda}{\mu}\mathbb{P}(e_1).$$

Then, for all decomposition $e_3 = ae_1 + be_2 + n$,

$$\mathbb{P}(ae_1 + be_2 + n)^2 < \mathbb{P}(e_1)\mathbb{P}(e_2) \Leftrightarrow (a\mu - b\lambda)^2 < -\lambda\mu.$$

Conversely, if the conditions hold, we can proceed as before: we consider $(f_1, \cdots, f_r)$ a basis of N. Then, $\mathrm{Span}(e_1, e_2) \oplus \mathrm{Span}(f_2, \cdots, f_r)$. Finally, we define a linear map $\mathbb{P}$ with:

$$\mathbb{P}(e_1) = 1, \qquad \mathbb{P}(e_2) = -\frac{\lambda}{\mu}, \qquad \forall i \in [\![2; r]\!], \quad \mathbb{P}(f_i) = 0.$$

2.(c). The properties are incompatible. Indeed, if $\dim(N \cap \mathrm{Span}(e_1, e_2)) = 2$, then, $e_1 \in N$ and it is impossible to ensure $\mathbb{P}(e_1) > 0$ and $\mathbb{P}_{|N} = 0$.

□

Proposition 7.4.4. *[Geometric conditions in the linearly dependent case] Let e_1, e_2, e_3 be vectors and $N \subset \mathbb{R}^d$ a vector subspace. Assume that (e_1, e_2) are linearly dependent vectors. Then,*

1. *If $e_3 \notin N + Span(e_1, e_2)$,*

$$e_1, e_2, e_3, N \text{ verify (BC) iff } Conv^{\pm}(e_1, e_2) \cap N = \{0\} \quad \text{and} \quad \langle e_1, e_2 \rangle > 0.$$

2. *If $e_3 \in N + Span(e_1, e_2)$,*

$$e_1, e_2, e_3, N \text{ verify (BC) iff } Conv^{\pm}(e_1, e_2) \cap N = \{0\} \text{ and}$$

$$a^2 \|e_1\|^2 < \langle e_1, e_2 \rangle, \text{ with the unique decomposition } e_3 = ae_1 + n.$$

Remark 7.4.5. *When the family (e_1, e_2) is linearly dependent, $Conv^{\pm}(e_1, e_2) = Span(e_1, e_2)$.*

Proof. 1. The proof is quite similar than before.

2. If e_1, e_2, e_3, N satisfy (BC), for such a linear form $\mathbb{P}$, one has, with $e_3 = ae_1 + n$,

$$\mathbb{P}(e_3)^2 - \mathbb{P}(e_1)\mathbb{P}(e_2) = \left(a^2 - \frac{\langle e_1, e_2 \rangle}{\|e_1\|^2}\right) \mathbb{P}(e_1)^2 < 0.$$

Conversely, as $\mathrm{Span}(e_1) \oplus N$, we can define such a linear form $\mathbb{P}$ as:

$$\mathbb{P}(e_1) = 1, \quad \mathbb{P}_{|N} = 0.$$

Thanks to the hypotheses, one has $\mathbb{P}(e_2) > 0$ and $\mathbb{P}(e_3)^2 < \mathbb{P}(e_1)\mathbb{P}(e_2)$.

□

7.4.2 A bracket expansion in the symmetrical case

Proof of Lemma 7.2.2. Let $l \in [\![0, k-1]\!]$, $(\alpha_{j,1})$, $(\alpha_{j,2}) \in \mathbb{R}^{l+1}$. To prove the desired relation, we compute in the quotient space $\mathcal{L}(X)/\mathrm{Span}\{\mathrm{E}(b);\ b \in \mathrm{Br}(X),\ n(b) = 2,\ n_0(b) < 2k-1\}$. We note $\bar{a}$ the class of $a \in \mathcal{L}(X)$ in this quotient. Expending the bracket, one has

$$[B0^{k-l-1}, B0^{k-l}] = \sum_{\substack{i,i' \in \{1,2\} \\ j,j' \in [\![0,l]\!]}} \alpha_{j,i}\alpha_{j',i'}[M^i_{j+k-l-1}, M^{i'}_{j'+k-l}].$$

We note that, for all $(i, i') \in \{1,2\}^2$,

$$\forall j, j' \in [\![0, l]\!] \text{ such that } j + j' < 2l, \quad n_0\left(\left[M^i_{j+k-l-1}, M^{i'}_{j'+k-l}\right]\right) < 2k - 1.$$

Using this remark,

$$\overline{[B0^{k-l-1}, B0^{k-l}]} = \sum_{i,i' \in \{1,2\}} \alpha_{l,i}\alpha_{l,i'} \overline{[M^i_{k-1}, M^{i'}_k]}.$$

Finally,

$$\overline{[B0^{k-l-1}, B0^{k-l}]} = \alpha^2_{l,1}\overline{W^1_k} + \alpha^2_{l,2}\overline{W^2_k} + \alpha_{l,1}\alpha_{l,2}\left(2\overline{C_{2k-1}} + \overline{C_{2k-2,1}}\right).$$

As $\mathcal{L}(X)$ is a graded Lie algebra, $\mathcal{B}_{2,2k-2} := \mathcal{B}_2 \cap \{\mathrm{E}(b);\ b \in \mathrm{Br}(X),\ n(b) = 2,\ n_0(b) < 2k-1\}$ generates all the elements $\mathrm{E}(b)$ with $n(b) = 2$ and $n_0(b) < 2k - 1$. The elements of $\mathcal{B}_{2,2k-2}$ are in $\mathcal{N}^m_k$. Finally, as $C_{2k-2,1} \in \mathcal{N}^m_k$, the desired result follows. □

7.4.3 A bracket expansion in the asymmetrical case

The purpose of this subsection is to prove the expansion of Lemma 7.3.4. The proof of this lemma is quite different from the case $k = k'$ studied in Lemma 7.2.2 and is based on the following lemma.

Lemma 7.4.6. *The following expansions hold.*

1. *For any $\nu \in \mathbb{N}$ and $a, b \in \mathcal{L}(X)$,*

$$[a, b0^\nu] = \sum_{\nu'=0}^{\nu} \binom{\nu}{\nu'} (-1)^{\nu'} [a0^{\nu'}, b]0^{\nu-\nu'}. \tag{7.4.2}$$

2. *For any $\nu \in \mathbb{N}^*$, there exist coefficients $\alpha^\nu_r \in \mathbb{Z}$ for $1 \leq 2r+1 \leq \nu$ such that, for every $b \in \mathcal{L}(X)$,*

$$[b, b0^\nu] = \sum_{1 \leq 2r+1 \leq \nu} \alpha^\nu_r [b0^r, b0^{r+1}]0^{\nu-2r-1}. \tag{7.4.3}$$

3. *For any $\nu \in \mathbb{N}$, there exist coefficients $\beta^\nu_r \in \mathbb{Z}$ for $0 \leq r \leq \nu$ such that, for every $p \in \mathbb{N}$,*

$$[M^1_p, M^2_p 0^\nu] = \sum_{r=0}^{\nu} \beta^\nu_r C_{2p+r,\nu-r}. \tag{7.4.4}$$

4. *For any $\nu \in \mathbb{N}$, there exist coefficients $\gamma^\nu_r \in \mathbb{Z}$ for $0 \leq r \leq \nu$ such that, for every $p \in \mathbb{N}$,*

$$[M^2_p, M^1_p 0^\nu] = \sum_{r=0}^{\nu} \gamma^\nu_r C_{2p+r,\nu-r}. \tag{7.4.5}$$

Moreover, $\gamma^\nu_\nu = (-1)^{1+\lfloor\frac{\nu+1}{2}\rfloor}$.

Proof. The first two points are proved in [BM24, Lemma 4.11]. We prove the last point by induction on ν (the proof of 3. is very similar): the equality is true for $\nu = 0$ with $\gamma^0_0 = -1$. The equality if true for $\nu = 1$ with $\gamma^1_0 = 0$ and $\gamma^1_1 = 1$. We assume that the formula holds for $\nu, \nu+1$, with $\nu \geq 0$. Then, for every $p \in \mathbb{N}$,

$$[M^2_p, M^1_p 0^{\nu+2}] = [M^2_p, M^1_p 0^{\nu+1}]0 - [M^2_{p+1}, M^1_{p+1} 0^\nu],$$

thanks to the Jacobi's equality (1.3.1). Using the induction hypothesis, we get

$$[M_p^2, M_p^1 0^{\nu+2}] = \sum_{r=0}^{\nu+1} \gamma_r^{\nu+1} C_{2p+r,(\nu+2)-r} - \sum_{r=2}^{\nu+2} \gamma_{r-2}^{\nu} C_{2p+r,(\nu+2)-r}.$$

Thus, $[M_p^2, M_p^1 0^{\nu+2}] = \sum_{r=0}^{\nu+2} \gamma_r^{\nu+2} C_{2p+r,\nu+2-r}$, with

$$\forall r \in [\![2, \nu+1]\!], \quad \gamma_r^{\nu+2} = \gamma_r^{\nu+1} - \gamma_{r-2}^{\nu}, \qquad \gamma_{\nu+2}^{\nu+2} = -\gamma_\nu^\nu, \qquad \gamma_0^{\nu+2} = \gamma_0^{\nu+1}, \qquad \gamma_1^{\nu+2} = \gamma_1^{\nu+1}.$$

We obtain the desired equality, as $\gamma_{\nu+2}^{\nu+2} = -\gamma_\nu^\nu = -(-1)^{1+\lfloor \frac{\nu+1}{2} \rfloor} = (-1)^{1+\lfloor \frac{(\nu+2)+1}{2} \rfloor}$. $\square$

We are now in a position to prove Lemma 7.3.4.

Proof of Lemma 7.3.4. By definition,

$$\left[B0^{k'-l-1}, B0^{k'-l}\right] = \text{(I)} + \text{(II)} + \text{(III)} + \text{(IV)}, \tag{7.4.6}$$

$$\text{(I)} = \sum_{i,j=0}^{l+k-k'} \alpha_i \alpha_j [M_{i+k'-l-1}^1, M_{j+k'-l}^1], \qquad \text{(II)} = \sum_{i=0}^{l+k-k'} \sum_{j=0}^{l} \alpha_i \beta_j [M_{i+k'-l-1}^1, M_{j+k'-l}^2],$$
$$\text{(III)} = \sum_{i=0}^{l} \sum_{j=0}^{l+k-k'} \beta_i \alpha_j [M_{i+k'-l-1}^2, M_{j+k'-l}^1], \qquad \text{(IV)} = \sum_{i,j=0}^{l} \beta_i \beta_j [M_{i+k'-l-1}^2, M_{j+k'-l}^2].$$

Then,

$$\text{(I)} = \sum_{i=k'-l}^{k} \alpha_{i+l-k'}^2 W_i^1 + \left(\sum_{i=2}^{l+k-k'} \sum_{j=0}^{i-2} + \sum_{i=0}^{l+k-k'-1} \sum_{j=i+1}^{l+k-k'} \right) \alpha_i \alpha_j [M_{i+k'-l-1}^1, M_{j+k'-l}^1], \tag{7.4.7}$$

as the bracket is zero if $j = i-1$. Moreover, the equation (7.4.3), applied with $b = M_{j+k'-l}^1$ and $\nu = i-j-1 \geq 1$ gives: for all $2 \leq i \leq l+k-k'$, $0 \leq j \leq i-2$,

$$[M_{i+k'-l-1}^1, M_{j+k'-l}^1] = -\sum_{1 \leq 2r+1 \leq i-j-1} \alpha_r^{i-j-1} W_{j+k'-l+r+1, i-j-2r-2}^1.$$

As $j + k' - l + r + 1 \leq k-1$, we obtain

$$\text{for all } 2 \leq i \leq l+k-k',\ 0 \leq j \leq i-2, \quad [M_{i+k'-l-1}^1, M_{j+k'-l}^1] \in \mathcal{N}_{k,k'}^{m,m'}. \tag{7.4.8}$$

Similarly, we obtain:

$$\text{for all } 0 \leq i \leq l+k-k'-1,\ i+1 \leq j \leq l+k-k', \quad [M_{i+k'-l-1}^1, M_{j+k'-l}^1] \in \mathcal{N}_{k,k'}^{m,m'}. \tag{7.4.9}$$

Thus, the equations (7.4.7), (7.4.8) and (7.4.9) give

$$\text{(I)} - \alpha_{l+k-k'}^2 W_k^1 \in \mathcal{N}_{k,k'}^{m,m'}. \tag{7.4.10}$$

We can manipulate the term (IV) in the same way and obtain

$$(\mathrm{IV}) - \beta_l^2 W_{k'}^2 \in \mathcal{N}_{k,k'}^{m,m'}. \tag{7.4.11}$$

Finally, we need to examine the cross terms (II) and (III).

$$(\mathrm{II}) = \alpha_{l+k-k'}\beta_l[M_{k-1}^1, M_{k'}^2] + \sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,l+k-k']\!]\times[\![0,l]\!]\\(i,j)\neq(l+k-k',l)}} \alpha_i\beta_j[M_{i+k'-l-1}^1, M_{j+k'-l}^2]. \tag{7.4.12}$$

Assume temporarily that $k \neq k'$. The equation (7.4.5), applied with $p = k'$ and $\nu = k-k'-1 \geq 0$ gives

$$[M_{k-1}^1, M_{k'}^2] = (-1)^{\lfloor\frac{k-k'}{2}\rfloor} C_{k+k'-1} - \sum_{r=0}^{k-k'-2} \gamma_r^{k-k'-1} C_{2k'+r,k-k'-1-r}.$$

As, in the sum, $2k'+r \leq k+k'-2$, one obtain

$$[M_{k-1}^1, M_{k'}^2] - (-1)^{\lfloor\frac{k-k'}{2}\rfloor} C_{k+k'-1} \in \mathcal{N}_{k,k'}^{m,m'}. \tag{7.4.13}$$

Using the Jacobi's formula, this equality is also true when $k = k'$. We expand on the basis the second term of the right-hand side of (7.4.12). We split the space of subscripts as

$$[\![0, l+k-k']\!] \times [\![0,l]\!] \setminus \{(l+k-k', l)\} = A \sqcup B \sqcup C \sqcup D \sqcup E \sqcup F,$$

with

$$A = \{(i,j);\ 1 \leq i \leq l-1,\ 0 \leq j \leq i-1\}, \quad B = \{(i,j);\ 0 \leq i \leq l-1,\ i \leq j \leq l-1\},$$

$$C = \{(i,j);\ l \leq i \leq l+k-k',\ 0 \leq j \leq l-1\}, \quad D = [\![0, l-1]\!] \times \{l\},$$
$$E = [\![l+1, l+k-k'-1]\!] \times \{l\}, \quad F = \{(l,l)\}.$$

Note that the spaces E and F are empty if $k = k'$. For all $(i,j) \in A$, one can apply (7.4.5) with $p = j+k'-l$ and $\nu = i-j-1$ to have

$$[M_{i+k'-l-1}^1, M_{j+k'-l}^2] = -\sum_{r=0}^{i-j-1} \gamma_r^{i-j-1} C_{2(j+k'-l)+r,i-j-1-r}.$$

As $2(j+k'-l)+r \leq k+k'-4$, one has

$$\forall (i,j) \in A, \quad [M_{i+k'-l-1}^1, M_{j+k'-l}^2] \in \mathcal{N}_{k,k'}^{m,m'}.$$

We can do the same manipulations for $(i,j) \in B$, C, D, E and F, thanks to the equations (7.4.4) and (7.4.5). Using, (7.4.13) in (7.4.12), one finally gets

$$(\mathrm{II}) - (-1)^{\lfloor\frac{k-k'}{2}\rfloor} \alpha_{l+k-k'}\beta_l C_{k+k'-1} \in \mathcal{N}_{k,k'}^{m,m'}. \tag{7.4.14}$$

With the same manipulations, one has

$$(\mathrm{III}) - (-1)^{\lfloor \frac{k-k'}{2} \rfloor} \alpha_{l+k-k'} \beta_l C_{k+k'-1} \in \mathcal{N}^{m,m'}_{k,k'}. \tag{7.4.15}$$

The equations (7.4.6), (7.4.10), (7.4.11), (7.4.14) and (7.4.15) lead to the conclusion. □

7.4.4 Relation between Sussmann's $\mathcal{S}(\theta)$-condition and Theorem 4.2.1

For $b = W_k^1$, we have $\sigma(b) = W_k^1 + W_k^2$ and our necessary condition also involves the Lie brackets W_k^1 and W_k^2. If $m = 1$ and the four points of Theorem 4.2.1 are not verified, then, for every $\theta \in [0,1]$, (1.5.2) does not hold for $\mathfrak{b} = W_k^1$

Indeed, let $k \in \mathbb{N}^*$, $m = 1$. We assume that

$$f_{W_k^1}(0), \quad f_{W_k^2}(0), \quad f_{C_{2k-1}}(0), \quad \mathcal{N}_k^1(f)(0) \quad \text{satisfy (BC)}.$$

Let us show that, for every $\theta \in [0,1]$, (1.5.2) is not verified for $\mathfrak{b} := W_k^1$. We assume the opposite: there exists $\theta \in [0,1]$ such that (1.5.2) holds for $\mathfrak{b} = W_k^1$. Then, $n_0(\mathfrak{b}) = 2k-1$ is odd, $n_1(\mathfrak{b}) = 2$, $n_2(\mathfrak{b}) = 0$ are even and $f_{\sigma(\mathfrak{b})}(0) = f_{W_k^1}(0) + f_{W_k^2}(0)$. Let $b \in \mathrm{Br}(X)$ be such $n(b) + \theta n_0(b) < n(\mathfrak{b}) + \theta n_0(\mathfrak{b}) = 2 + (2k-1)\theta$. Then,

$$n(b) < 2 + (2k-1)\theta \leq 2k+1.$$

Moreover, if $n(b) = 2$, then

$$2 + \theta n_0(b) < 2 + \theta(2k-1) \qquad \text{so} \qquad n_0(b) < 2k-1.$$

Let $\mathcal{E} := S_{[\![1,\pi(k,1)]\!]\setminus\{2\}}(X) \cup \{b \in \mathrm{Br}(X);\ n(b) = 2,\ n_0(b) < 2k-1\}$. As $\pi(k,1) = 2k+1$, the previous inequalities lead to $f_{\sigma(\mathfrak{b})}(0) \in \mathcal{E}(f)(0)$. As $\mathcal{E}(f)(0) \subset \mathcal{N}_k^1(f)(0)$, one obtains

$$\mathbb{P}\left(f_{W_k^1}(0)\right) + \mathbb{P}\left(f_{W_k^2}(0)\right) = 0,$$

where $\mathbb{P}$ is a linear form given by (BC). Thus,

$$0 \leq \mathbb{P}\left(f_{C_{2k-1}}(0)\right)^2 < \mathbb{P}\left(f_{W_k^1}(0)\right)\mathbb{P}\left(f_{W_k^2}(0)\right) = -\mathbb{P}\left(f_{W_k^1}(0)\right)^2 \leq 0.$$

This is a contradiction. Consequently, (1.5.2) is not verified for $\mathfrak{b} = W_k^1$.

CHAPTER 8

QUADRATIC OBSTRUCTIONS TO STLC FOR THE MULTI-INPUT BILINEAR SCHRÖDINGER EQUATION

SUMMARY. The purpose of this chapter is to give the complete proof of Theorem 5.1.6, introduced in Chapter 5. This result is proved in [Ghe25a]. The chapter is organized as follows: in Section 8.1, we provide the proof of the main theorem of Chapter 5. Some elements of proof are developed in Section 8.2.

8.1 Proof of the main theorem

One recalls that λ_j and φ_j are defined in (2.3.2). In all the document, for $j \in \mathbb{N}^*$, we will note

$$\omega_j := \lambda_j - \lambda_1 \quad \text{and} \quad \nu_j := \lambda_K - \lambda_j. \tag{8.1.1}$$

8.1.1 Expansion of the solution

We are going to make an asymptotic expansion of the solution to (2.1.1). Let $u \in L^2((0,T),\mathbb{R})^r$ be fixed controls. The first-order term $\Psi \in \mathcal{C}^0\left([0,T], H^3_{(0)}(0,1)\right)$ is the solution to the linearized system of (2.1.1) around the free trajectory $(\psi_1, u \equiv 0)$, *i.e.*

$$\begin{cases} i\partial_t \Psi(t,x) = -\partial_x^2 \Psi(t,x) - u(t)\cdot\mu(x)\psi_1(t,x), & t \in (0,T), x \in (0,1), \\ \Psi(t,0) = \Psi(t,1) = 0, & t \in (0,T), \\ \Psi(0,x) = 0, & x \in (0,1). \end{cases} \tag{8.1.2}$$

The solution is given by: $\forall t \in [0,T]$,

$$\Psi(t) = i \sum_{\ell=1}^{r} \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\langle \mu_\ell \varphi_1, \varphi_j \rangle \int_0^t u^\ell(\tau) e^{i\omega_j \tau} \mathrm{d}\tau \right) \psi_j(t). \tag{8.1.3}$$

We expand the development of the solution to the quadratic term. The second-order term $\xi \in \mathcal{C}^0 \left([0,T], H^3_{(0)}(0,1) \right)$ is the solution to the following system

$$\begin{cases} i\partial_t \xi(t,x) = -\partial_x^2 \xi(t,x) - u(t)\cdot\mu(x)\Psi(t,x), & t \in (0,T), x \in (0,1), \\ \xi(t,0) = \xi(t,1) = 0, & t \in (0,T), \\ \xi(0,x) = 0, & x \in (0,1). \end{cases} \tag{8.1.4}$$

The idea is that $\psi(T; u, \varphi_1) \simeq \psi_1(T) + \Psi(T) + \xi(T)$. Thus,

$$\Im \left\langle \psi(T; u, \varphi_1), \varphi_K e^{-i\lambda_1 T} \right\rangle \simeq 0 + 0 + \Im \left\langle \xi(T), \varphi_K e^{-i\lambda_1 T} \right\rangle, \tag{8.1.5}$$

the first term being 0 since it is real and the second one by hypothesis $(\mathbf{H})_{\mathbf{lin}}$. For $1 \leq \ell, L \leq r$, one defines $H_{\ell,L} : (t,s) \in [0,T]^2 \mapsto -e^{-i\omega_K T} \sum_{j=1}^{+\infty} c_j^{\ell,L} e^{i(\nu_j t + \omega_j s)} \in \mathbb{C}$.

Remark 8.1.1. *The kernels introduced in this chapter differ by a phase $e^{-i\omega_K T}$, compared with those introduced in Chapter 6 in the case where $r = 2$.*

We finally use the notation, for $f, g \in L^2((0,T), \mathbb{R})$, $1 \leq \ell, L \leq r$,

$$\mathcal{F}_T^{\ell,L}(f,g) := \int_0^T f(t) \left(\int_0^t H_{\ell,L}(t,\tau) g(\tau) \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}t.$$

With these notations and (8.1.3),

$$\left\langle \xi(T), \varphi_K e^{-i\lambda_1 T} \right\rangle = \sum_{\ell=1}^{r} \mathcal{F}_T^{\ell,\ell}(u^\ell, u^\ell) + \sum_{1 \leq \ell < L \leq r} \left(\mathcal{F}_T^{\ell,L}(u^\ell, u^L) + \mathcal{F}_T^{L,\ell}(u^L, u^\ell) \right). \tag{8.1.6}$$

8.1.2 Error estimates

We recall that the iterated primitives of a function are defined in 1.6.20. We use sharp error estimates to prove that the remainder term of the expansion (8.1.5) can be neglected compared to the drift $\|u_k\|^2_{L^2(0,T)}$. A rough error estimate – see for example Lemma 6.2.13 – involves the L^2-norm of the controls. As shown in [Bou23b; Bou24] in the single-input case, one can prove a better estimate involving the L^2-norm of the primitive u_1 of the controls by introducing the new state

$$\widetilde{\psi}((t,x); u, \varphi_1) := \psi((t,x); u, \varphi_1) e^{-iu_1(t)\cdot\mu(x)}.$$

which is the weak solution to

$$\begin{cases} i\partial_t \widetilde{\psi} = -\partial_x^2 \widetilde{\psi} - i\left[u_1(t)\cdot\mu''(x) + 2\left(u_1(t)\cdot\mu'(x)\right)\partial_x\right]\widetilde{\psi} + \left(u_1(t)\cdot\mu'(x)\right)^2 \widetilde{\psi}, \\ \widetilde{\psi}(t,0) = \widetilde{\psi}(t,1) = 0, \\ \widetilde{\psi}(0,x) = \varphi_1(x). \end{cases} \tag{8.1.7}$$

The well-posedness of the auxiliary system (8.1.7) is stated in [Bou23b, Proposition 4.2] in the case where $r = 1$ and can be adapted, without any additionnal difficulty, to our setting. We want to study the linear and quadratic expansions of (8.1.7) around the ground state. Linearizing (8.1.7), the first-order term $\widetilde{\Psi}$ is given by

$$\widetilde{\Psi}(t,x) = \Psi(t,x) - iu_1(t)\cdot\mu(x)\psi_1(t,x), \tag{8.1.8}$$

where Ψ is the solution to (8.1.2). Thus, $\widetilde{\Psi} \in \mathcal{C}^0([0,T], H^3 \cap H_0^1(0,1))$ is a weak solution to

$$\begin{cases} i\partial_t \widetilde{\Psi} = -\partial_x^2 \widetilde{\Psi} - i\left[u_1(t)\cdot\mu''(x) + 2\left(u_1(t)\cdot\mu'(x)\right)\partial_x\right]\psi_1, & (0,T)\times(0,1), \\ \widetilde{\Psi}(t,0) = \widetilde{\Psi}(t,1) = 0, & (0,T), \\ \widetilde{\Psi}(0,x) = 0, & (0,1). \end{cases}$$

Doing an expansion of order 2 of (8.1.7), the second-order term $\widetilde{\xi}$ is given by

$$\widetilde{\xi}(t,x) = \xi(t,x) - iu_1(t)\cdot\mu(x)\Psi(t,x) - \frac{\left(u_1(t)\cdot\mu(x)\right)^2}{2}\psi_1(t,x), \tag{8.1.9}$$

where ξ is the solution to (8.1.4). Then, $\widetilde{\xi} \in \mathcal{C}^0([0,T], H^3 \cap H_0^1(0,1))$ is a weak solution to

$$\begin{cases} i\partial_t \widetilde{\xi} = -\partial_x^2 \widetilde{\xi} - i\left[u_1(t)\cdot\mu''(x) + 2\left(u_1(t)\cdot\mu'(x)\right)\partial_x\right]\widetilde{\Psi} + \left(u_1(t)\cdot\mu'(x)\right)^2 \psi_1, \\ \widetilde{\xi}(t,0) = \widetilde{\xi}(t,1) = 0, \\ \widetilde{\xi}(0,x) = 0. \end{cases}$$

In [Bou23b, Lemma 4.6, Propositions 4.7 and 4.8], Bournissou proved estimates for the auxiliary system when $r = 1$. These results can be adapted, without any additionnal difficulty, to our case to our case, giving the following proposition.

Proposition 8.1.2. *For every $T > 0$, $u \in L^2((0,T),\mathbb{R})^r$, μ satisfying* $(\mathbf{H})_{\mathbf{conv}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{reg}}$ *and $p \in \mathbb{N}^*$ one has, as $\|u_1\|_{L^\infty(0,T)} \to 0$,*

$$\left\langle e^{iu_1(T)\cdot\mu}\left(\widetilde{\psi}(\cdot;u,\varphi_1) - \psi_1 - \widetilde{\Psi}\right)(T), \varphi_p\right\rangle = \mathcal{O}\left(\|u_1\|^2_{L^2(0,T)}\right),$$
$$\left\langle e^{iu_1(T)\cdot\mu}\left(\widetilde{\psi}(\cdot;u,\varphi_1) - \psi_1 - \widetilde{\Psi} - \widetilde{\xi}\right)(T), \varphi_p\right\rangle = \mathcal{O}\left(\|u_1\|^3_{L^2(0,T)}\right).$$

From these estimates, proved for the auxiliary system, we derive the following error estimates for the bilinear Schrödinger equation (2.1.1). This result can be adapted from [Bou23b, Proposition 4.9] in the multi-input case.

Proposition 8.1.3. *For every $T > 0$, $u \in L^2((0,T),\mathbb{R})^r$, μ satisfying* $(\mathbf{H})_{\mathbf{conv}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{reg}}$ *and*

$p \in \mathbb{N}^*$, *the following error estimates hold, as* $\|u_1\|_{L^\infty(0,T)} \to 0$,

$$\langle (\psi(\cdot; u, \varphi_1) - \psi_1 - \Psi)(T), \varphi_p \rangle = \mathcal{O}\left(\|u_1\|^2_{L^2(0,T)} + |u_1(T)|^2 \right), \tag{8.1.10}$$

$$\langle (\psi(\cdot; u, \varphi_1) - \psi_1 - \Psi - \xi)(T), \varphi_p \rangle = \mathcal{O}\left(\|u_1\|^3_{L^2(0,T)} + |u_1(T)|^3 \right). \tag{8.1.11}$$

The final step is to show that the boundary terms $(u_1^1(T), \cdots, u_1^r(T))$ can be neglected, as they are part of the dynamics. Unlike the previous steps, this one does not follow directly from Bournissou's work [Bou23b, Proposition 4.19], which was done for $r = 1$; therefore, we will explain the details. We recall that the sequences $c^{\ell,L}$ are introduced in Definition 5.1.1 and the quantities ω_j and ν_j are defined in (8.1.1).

Proposition 8.1.4. *For every* $T > 0$, $u \in L^2((0,T),\mathbb{R})^r$, μ *satisfying* $(\mathbf{H})_{\mathbf{conv}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{reg}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{null}}$ *and* $(\mathbf{H})_{\mathbf{pos}}$, *the following error estimate holds, as* $\|u_1\|_{L^\infty(0,T)} \to 0$,

$$\sum_{\ell=1}^{r} \left| u_1^\ell(T) \right| = \mathcal{O}\left(\sqrt{T}\, \|u_1\|_{L^2(0,T)} + \|\psi(T; u, \varphi_1) - \psi_1(T)\|_{L^2(0,1)} \right). \tag{8.1.12}$$

Proof. Let $(\alpha_\ell)_{\ell \in [\![1,r]\!]} \in \mathbb{R}^r$ be such that, for all $j \geq 1$, $\sum_{\ell=1}^{r} \alpha_\ell \langle \mu_\ell \varphi_1, \varphi_j \rangle = 0$. Then,

$$\sum_{\ell,L \in [\![1,r]\!]} C_{\ell,L} := \sum_{\ell,L \in [\![1,r]\!]} \alpha_\ell \alpha_L \sum_{j=1}^{+\infty} \left(c_j^{L,\ell} \omega_j^k \nu_j^{k-1} - c_j^{\ell,L} \omega_j^{k-1} \nu_j^k \right) = 0 - 0.$$

For all $1 \leq \ell \leq L \leq r$, one has by definition,

$$C_{\ell,L} = -\alpha_\ell \alpha_L \gamma_{2k-1}^{\ell,L}.$$

Moreover, if $1 \leq L \leq \ell \leq r$, using Corollary 8.2.5 with $p = k-1$ and $\nu = 1$, one has

$$C_{\ell,L} = \beta_0^1 \gamma_{2k-2}^{L,\ell} \omega_K - \beta_1^1 \gamma_{2k-1}^{L,\ell} = -\gamma_{2k-1}^{L,\ell},$$

using $(\mathbf{H})_{\mathbf{null}}$. Thus, we obtain $q(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) = 0$. Using $(\mathbf{H})_{\mathbf{pos}}$, one has $(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) = 0$. Then, $\left((\langle \mu_\ell \varphi_1, \varphi_j \rangle)_{j \geq 1} \right)_{\ell \in [\![1,r]\!]}$ is a linearly independent family. Consequently, there exist $j_1, \cdots, j_r \in \mathbb{N}^*$, pairwise distinct, such that $M := (\langle \mu_\ell \varphi_1, \varphi_{j_n} \rangle)_{(\ell,n) \in [\![1,r]\!] \times [\![1,r]\!]} \in GL_r(\mathbb{R})$. Then, using the remainder estimate (8.1.10), the expansion of the linearized system given by (8.1.3), an integration by parts and Cauchy–Schwarz's inequality, one finally gets, for all $j \geq 1$, as $\|u_1\|_{L^\infty(0,T)} \to 0$,

$$\begin{aligned} \left\langle \psi(T; u, \varphi_1) - \psi_1(T), \varphi_j e^{-i\lambda_1 T} \right\rangle &= i \sum_{\ell \in [\![1,r]\!]} \langle \mu_\ell \varphi_1, \varphi_j \rangle u_1^\ell(T) \\ &+ \mathcal{O}\left(\|u_1\|^2_{L^2(0,T)} + |u_1(T)|^2 + \sqrt{T}\, \|u_1\|_{L^2(0,T)} \right). \end{aligned}$$

Focusing on $j \in \{j_1, \cdots, j_{kr}\}$, we obtain

$$M(u_1^\ell(T)) = \mathcal{O}\left(\|u_1\|^2_{L^2(0,T)} + |u_1(T)|^2 + \sqrt{T}\, \|u_1\|_{L^2(0,T)} + \|\psi(T; u, \varphi_1) - \psi_1(T)\|_{L^2(0,1)} \right).$$

As M is invertible and $\|u_1\|_{L^\infty(0,T)} \to 0$, one obtains the desired result. $\square$

Using (8.1.12) in (8.1.10) and (8.1.11), we finally obtain the following error estimates on the linear/quadratic expansion of the solution.

Corollary 8.1.5. *For every $T>0$, $u \in L^2((0,T),\mathbb{R})^r$, μ satisfying $(\mathbf{H})_{\mathbf{conv}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{reg}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{null}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{pos}}$ and $p \in \mathbb{N}^*$, one has, as $\|u_1\|_{L^\infty(0,T)} \to 0$,*

$$\langle (\psi(\cdot;u,\varphi_1) - \psi_1 - \Psi)(T), \varphi_p\rangle = \mathcal{O}\left(\|u_1\|^2_{L^2(0,T)} + \|\psi(T;u,\varphi_1) - \psi_1(T)\|^2_{L^2(0,1)}\right), \tag{8.1.13}$$

$$\langle (\psi(\cdot;u,\varphi_1) - \psi_1 - \Psi - \xi)(T)\rangle = \mathcal{O}\left(\|u_1\|^3_{L^2(0,T)} + \|\psi(T;u,\varphi_1) - \psi_1(T)\|^3_{L^2(0,1)}\right). \tag{8.1.14}$$

8.1.3 A new expression for the quadratic expansion

The purpose of this section is to show the following proposition, which has already been proved in [Bou23b, Proposition 5.1] for $\ell = L$ with some minor adaptations required here.

Proposition 8.1.6. *Let $T>0$, $1 \leq \ell \leq L \leq r$ and $f,g \in L^2((0,T),\mathbb{R})$. If $(\mathbf{H})_{\mathbf{conv}}$ and $(\mathbf{H})_{\mathbf{null}}$ hold, then,*

$$\begin{aligned}\Im\left(\mathcal{F}_T^{\ell,L}(f,g) + \mathcal{F}_T^{L,\ell}(g,f)\right) &= (-1)^{k+1}\gamma^{\ell,L}_{2k-1}\int_0^T f_k(t)g_k(t)\cos(\omega_K(t-T))\mathrm{d}t \\ &+\mathcal{O}\left(\sum_{p=1}^k\left(|f_p(T)|^2 + |g_p(T)|^2\right) + T\,\|(f_k,g_k)\|^2_{L^2(0,T)}\right).\end{aligned} \tag{8.1.15}$$

We first prove the following lemma.

Lemma 8.1.7. *Let $n \in \mathbb{N}$ and $H \in \mathcal{C}^{2n}(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$. There exists a quadratic form S_n on $\mathbb{C}^{3n}$ such that for all $T>0$ and $f,g \in L^1(0,T)$,*

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t)\left(\int_0^t g(\tau)H(t,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}t &= -\sum_{p=1}^n\int_0^T f_p(t)g_{p-1}(t)\partial_1^{p-1}\partial_2^{p-1}H(t,t)\mathrm{d}t \\ -\sum_{p=1}^n\int_0^T f_p(t)g_p(t)\partial_1^p\partial_2^{p-1}H(t,t)\mathrm{d}t &+ \int_0^T f_n(t)\left(\int_0^t g_n(\tau)\partial_1^n\partial_2^n H(t,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}t \\ &+S_n\left(f_1(T),\cdots,f_n(T),g_1(T),\cdots,g_n(T),C_0^n(g),\cdots,C_{n-1}^n(g)\right),\end{aligned}$$

where $C_p^n(g) := \int_0^T g_n(\tau)\partial_1^p\partial_2^n H(T,\tau)\mathrm{d}\tau$.

Proof. We prove this lemma by induction on $n \in \mathbb{N}$. It holds for $n=0$ with $S_0 = 0$. Assume that the result is true for $n \in \mathbb{N}$, fixed. Let $H \in \mathcal{C}^{2(n+1)}(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$, $f,g \in L^1(0,T)$. With an integration by parts,

$$\begin{aligned}\int_0^T f_n(t)\left(\int_0^t g_n(\tau)\partial_1^n\partial_2^n H(t,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}t &= f_{n+1}(T)\int_0^T g_n(\tau)\partial_1^n\partial_2^n H(T,\tau)\mathrm{d}\tau \\ -\int_0^T f_{n+1}(t)&\left(g_n(t)\partial_1^n\partial_2^n H(t,t) + \int_0^t g_n(\tau)\partial_1^{n+1}\partial_2^n H(t,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Another integration by parts finally leads to

$$\int_0^T f_n(t)\left(\int_0^t g_n(\tau)\partial_1^n\partial_2^n H(t,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}t = f_{n+1}(T)C_n^n(g) - \int_0^T f_{n+1}(t)g_n(t)\partial_1^n\partial_2^n H(t,t)\mathrm{d}t$$
$$-\int_0^T f_{n+1}(t)g_{n+1}(t)\partial_1^{n+1}\partial_2^n H(t,t)\mathrm{d}t + \int_0^T f_{n+1}(t)\left(\int_0^t g_{n+1}(\tau)\partial_1^{n+1}\partial_2^{n+1}H(t,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}t.$$

A final integration by parts finally gives $C_p^n(g) = g_{n+1}(T)\partial_1^p\partial_2^n H(T,T) - C_p^{n+1}(g)$, for all $p \in [\![0,n]\!]$. Using the induction hypothesis, we obtain the result. □

Thanks to this lemma, we are now able to prove Proposition 8.1.6.

Proof of Proposition 8.1.6. Let $T>0$ and $1 \le \ell \le L \le r$. Using $(\mathbf{H})_{\mathbf{conv}}$, one has $H_{\ell,L}, H_{L,\ell} \in \mathcal{C}^{2k}(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$. First, note that for all $p \in [\![1,k]\!]$, for all $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}\partial_1^{p-1}\partial_2^{p-1}\left(H_{L,\ell} - H_{\ell,L}\right)(t,t) &= (-1)^{p-1}e^{i\omega_K(t-T)}\gamma_{2p-2}^{\ell,L},\\ \partial_1^{p-1}\partial_2^{p}H_{L,\ell}(t,t) - \partial_1^{p}\partial_2^{p-1}H_{\ell,L}(t,t) &= i(-1)^{p-1}e^{i\omega_K(t-T)}\gamma_{2p-1}^{\ell,L}.\end{aligned} \tag{8.1.16}$$

Let $f,g \in L^2((0,T),\mathbb{R})$ and $p \in [\![1,k]\!]$. With an integration by parts,

$$\int_0^T f_{p-1}(t)g_p(t)\partial_1^{p-1}\partial_2^{p-1}H_{L,\ell}(t,t)\mathrm{d}t = f_p(T)g_p(T)\partial_1^{p-1}\partial_2^{p-1}H_{L,\ell}(T,T)$$
$$-\int_0^T f_p(t)g_{p-1}(t)\partial_1^{p-1}\partial_2^{p-1}H_{L,\ell}(t,t)\mathrm{d}t - \int_0^T f_p(t)g_p(t)\left(\partial_1^p\partial_2^{p-1} + \partial_1^{p-1}\partial_2^p\right)H_{L,\ell}(t,t)\mathrm{d}t.$$

Then, applying Lemma 8.1.7 with $f \to g$, $g \to f$, $H_{L,\ell} \to H$, $k \to n$ and using the last equality, one gets

$$\begin{aligned}\int_0^T g(t)\left(\int_0^t f(\tau)H_{L,\ell}(t,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}t &= \sum_{p=1}^k \int_0^T f_p(t)g_{p-1}(t)\partial_1^{p-1}\partial_2^{p-1}H_{L,\ell}(t,t)\mathrm{d}t\\ +\sum_{p=1}^k\int_0^T f_p(t)g_p(t)\partial_1^{p-1}\partial_2^p H_{L,\ell}(t,t)\mathrm{d}t &+ \int_0^T g_k(t)\left(\int_0^t f_k(\tau)\partial_1^k\partial_2^k H_{L,\ell}(t,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}t\\ &+\mathcal{O}\left(\sum_{p=1}^k\left(|f_p(T)|^2 + |g_p(T)|^2\right) + T\left\|f_k\right\|^2_{L^2(0,T)}\right).\end{aligned} \tag{8.1.17}$$

To estimate $C_p^k(f)$, we used the boundness of $H_{L,\ell}$ and the Cauchy–Schwarz's inequality. Applying Lemma 8.1.7 again with $H_{\ell,L} \to H$, $k \to n$, using (8.1.16), (8.1.17) and the assumption $(\mathbf{H})_{\mathbf{null}}$, one gets

$$(-1)^{k+1}e^{i\omega_K T}\left(\mathcal{F}_T^{\ell,L}(f,g) + \mathcal{F}_T^{L,\ell}(g,f)\right) = i\gamma_{2k-1}^{\ell,L}\int_0^T f_k(t)g_k(t)e^{i\omega_K t}\mathrm{d}t$$
$$+\sum_{j=1}^{+\infty}\omega_j^k\nu_j^k\int_0^T e^{i\nu_j t}\left(c_j^{\ell,L}f_k(t)\left(\int_0^t g_k(\tau)e^{i\omega_j\tau}\mathrm{d}\tau\right) + c_j^{L,\ell}g_k(t)\left(\int_0^t f_k(\tau)e^{i\omega_j\tau}\mathrm{d}\tau\right)\right)\mathrm{d}t$$
$$+\mathcal{O}\left(\sum_{p=1}^k\left(|f_p(T)|^2 + |g_p(T)|^2\right) + T\left\|(f_k,g_k)\right\|^2_{L^2(0,T)}\right).$$

Using the Cauchy–Schwarz's inequality and taking the imaginary part, we obtain the result. □

8.1.4 Vectorial relations

The equations (8.1.6) and (8.1.15) give a quadratic expansion of the solution to (2.1.1). We then estimate the boundary terms $|u_p^\ell(T)|^2$ that appear. To do that, we need the following lemma, which is an equivalent in the infinite-dimensional case of Lemma 7.2.4.

Lemma 8.1.8. *Assume that the hypotheses* $(\mathbf{H})_{\mathbf{conv}}$*,* $(\mathbf{H})_{\mathbf{null}}$ *and* $(\mathbf{H})_{\mathbf{pos}}$ *hold. Then, the following family is* $\mathbb{R}$*-linearly independent in* $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$

$$\Big((\langle \mu_\ell \varphi_1, \varphi_j \rangle (-i\omega_j)^p)_{j\geq 1} \Big)_{(p,\ell)\in[\![0,k-1]\!]\times[\![1,r]\!]}$$

Proof. We use a proof technique similar to Proposition 8.1.4. By contradiction, assume that there exist $(\alpha_{p,\ell})_{(p,\ell)\in[\![0,k-1]\!]\times[\![1,r]\!]} \in \mathbb{R}^{k\times r} \setminus \{0\}$ s.t.

$$\forall j \geq 1, \qquad \sum_{p\in[\![0,k-1]\!]} \sum_{\ell\in[\![1,r]\!]} \alpha_{p,\ell} \langle \mu_\ell \varphi_1, \varphi_j \rangle (-i\omega_j)^p = 0.$$

Let $l_0 := \max\{p \in [\![0, k-1]\!];\ (\alpha_{p,1}, \cdots, \alpha_{p,r}) \neq 0\}$. By hypothesis, the following quantity is zero

$$\sum_{\ell,L\in[\![1,r]\!]} \sum_{p,q\in[\![0,l_0]\!]} \alpha_{p,\ell}\alpha_{q,L}(-i)^{p+q} \sum_{j=1}^{+\infty} \left(c_j^{L,\ell} \omega_j^{p+k-l_0} \nu_j^{q+k-l_0-1} - c_j^{\ell,L} \omega_j^{q+k-l_0-1} \nu_j^{p+k-l_0} \right) = 0.$$

We will denote this quantity by $\sum_{\ell,L\in[\![1,r]\!]} C_{\ell,L}$. Let $v := (v_j)_{j\geq 1}$ be a sequence of real numbers and $m, n \in \mathbb{N}$. Subject to convergence, we define

$$R_1^{m,n}(v) := \sum_{j=1}^{+\infty} v_j \omega_j^{m+k-l_0} \nu_j^{n+k-l_0-1} \quad \text{and} \quad R_2^{m,n}(v) := \sum_{j=1}^{+\infty} v_j \omega_j^{m+k-l_0-1} \nu_j^{n+k-l_0}.$$

By definition of R_1 and R_2, one has, for all $1 \leq \ell \leq L \leq r$,

$$C_{\ell,L} = \sum_{p=0}^{l_0} \alpha_{p,\ell}\alpha_{p,L}(-1)^{p+1}\gamma_{2(p+k-l_0)-1}^{\ell,L} + \sum_{\substack{p,q=0,\\ p\neq q}}^{l_0} \alpha_{p,\ell}\alpha_{q,L}(-i)^{p+q} \left(R_1^{p,q}(c^{L,\ell}) - R_2^{q,p}(c^{\ell,L}) \right).$$

For all $p \in [\![0, l_0-1]\!]$, for all $q \in [\![p+1, l_0]\!]$, Corollary 8.2.5 with $q-p-1 \to \nu$ and $p+k-l_0 \to p$ gives

$$R_1^{p,q}(c^{L,\ell}) - R_2^{q,p}(c^{\ell,L}) \in \operatorname{Span}\left(\gamma_{2(p+k-l_0)+r}^{\ell,L},\ r \in [\![0, q-p-1]\!] \right) \subset \mathbb{R}.$$

Moreover, $2(p+k-l_0) + r \leq 2k-2$. Using $(\mathbf{H})_{\mathbf{null}}$, this sum is zero. Finally, for all $p \in [\![1, l_0]\!]$, for all $q \in [\![0, p-1]\!]$, Corollary 8.2.5 with $p-q+1 \to \nu$ and $q+k-l_0-1 \to p$ gives

$$R_1^{p,q}(c^{L,\ell}) - R_2^{q,p}(c^{\ell,L}) \in \operatorname{Span}\left(\gamma_{2(q+k-l_0-1)+r}^{\ell,L},\ r \in [\![0, p-q+1]\!] \right).$$

Similarly, $2(q+k-l_0-1) + r \leq 2k-2$ so this sum is zero by $(\mathbf{H})_{\mathbf{null}}$. Finally,

$$C_{\ell,L} = \alpha_{l_0,\ell}\alpha_{l_0,L}(-1)^{l_0+1}\gamma_{2k-1}^{\ell,L}. \tag{8.1.18}$$

With similar computations, we prove that for all $1 \leq L \leq \ell \leq r$,

$$C_{\ell,L} = \alpha_{l_0,\ell}\alpha_{l_0,L}(-1)^{l_0+1}\gamma_{2k-1}^{L,\ell}. \tag{8.1.19}$$

As $\sum_{\ell,L\in[\![1,r]\!]} C_{\ell,L} = 0$, (8.1.18) and (8.1.19) lead to

$$\sum_{\ell=1}^{r} \gamma_{2k-1}^{\ell} \frac{\alpha_{l_0,\ell}^2}{2} + \sum_{1\leq \ell<L\leq r} \gamma_{2k-1}^{\ell,L}\alpha_{l_0,\ell}\alpha_{l_0,L} = 0, \quad i.e. \quad q(\alpha_{l_0,1},\cdots,\alpha_{l_0,r}) = 0.$$

Using $(\mathbf{H})_{\mathbf{pos}}$, $(\alpha_{l_0,\ell})_{\ell\in[\![1,r]\!]} = 0$. This is a contradiction with the choice of l_0. We then obtain the result. □

Remark 8.1.9. *The proof of Lemma 8.1.8 may seem a little mysterious at first sight, but there is a strict analogy with the result proved in the finite-dimensional case – see Lemma 7.2.4. Note that, if $\mu \in \mathcal{C}_c^\infty((0,1),\mathbb{R})^r$, then using Lemma B.2.1,*

$$\forall 1 \leq \ell \leq r,\ 0 \leq p \leq k-1, \quad (\langle \mu_\ell\varphi_1, \varphi_j\rangle(-i\omega_j)^p)_{j\geq 1} = i^p \left(\langle \underline{\mathrm{ad}}_A^p(\mu_\ell)\varphi_1, \varphi_j\rangle\right)_{j\geq 1}.$$

Consequently, we proved that the family $(\underline{\mathrm{ad}}_A^p(\mu_\ell)\varphi_1)_{(p,\ell)\in[\![0,k-1]\!]\times[\![1,r]\!]}$ is linearly independent. This is the same family as in the finite-dimensional case. Indeed, in Chapter 7, we consider $(\alpha_{p,\ell})_{(p,\ell)\in[\![0,k-1]\!]\times[\![1,r]\!]} \in \mathbb{R}^{k\times r}$ scalars, not all zero, such that

$$B\varphi_1 := \sum_{p\in[\![0,k-1]\!]} \sum_{\ell\in[\![1,r]\!]} \alpha_{p,\ell} i^p \underline{\mathrm{ad}}_A^p(\mu_\ell)\varphi_1 = 0.$$

Then, we define $l_0 := \max\{p \in [\![0,k-1]\!];\ (\alpha_{p,1},\cdots,\alpha_{p,r}) \neq 0\}$. As $B\varphi_1 = 0$, one has $\left[\underline{\mathrm{ad}}_A^{k-l_0-1}(B), \underline{\mathrm{ad}}_A^{k-l_0}(B)\right]\varphi_1 = 0$ and we expand this term. Actually, this is exactly what we did in the proof of Lemma 8.1.8, in a disguised way, by not assuming regularity on μ_ℓ since

$$\sum_{\ell,L\in[\![1,r]\!]} C_{\ell,L} = -\left[\underline{\mathrm{ad}}_A^{k-l_0-1}(B), \underline{\mathrm{ad}}_A^{k-l_0}(B)\right]\varphi_1.$$

8.1.5 Closed-loop estimates

Using Lemma 8.1.8, we can now estimate the boundary terms, as stated in the following proposition.

Proposition 8.1.10. *Assume that $(\mathbf{H})_{\mathbf{conv}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{reg}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{null}}$ and $(\mathbf{H})_{\mathbf{pos}}$ are satisfied. Then, as $\|u_1\|_{L^\infty(0,T)} \to 0$,*

$$\sum_{p\in[\![1,k]\!]} \sum_{\ell\in[\![1,r]\!]} \left|u_p^\ell(T)\right| = \mathcal{O}\left(\|u_1\|_{L^2(0,T)}^2 + \sqrt{T}\,\|u_k\|_{L^2(0,T)} + \|\psi(T;u,\varphi_1) - \psi_1(T)\|_{L^2(0,1)}\right).$$

Proof. By Lemma 8.1.8, there exist $j_1,\cdots,j_{kr} \in \mathbb{N}^*$, pairwise distinct, such that

$$M := (\langle \mu_\ell\varphi_1, \varphi_{j_n}\rangle(-i\omega_{j_n})^p)_{((p,\ell),n)\in[\![0,k-1]\!]\times[\![1,r]\!]\times[\![1,rk]\!]} \in GL_{kr}(\mathbb{C}).$$

Then, using the sharp remainder estimate (8.1.13) and the expansion of the linearized system given by (8.1.3), one has for all $j \geq 1$, as $\|u_1\|_{L^\infty(0,T)} \to 0$,

$$\left\langle \psi(T; u, \varphi_1) - \psi_1(T), \varphi_j e^{-i\lambda_1 T} \right\rangle = i \sum_{\ell=1}^{r} \langle \mu_\ell \varphi_1, \varphi_j \rangle \int_0^T u^\ell(t) e^{i\omega_j(t-T)} \mathrm{d}t$$
$$+\mathcal{O}\left(\|u_1\|^2_{L^2(0,T)} + \|\psi(T; u, \varphi_1) - \psi_1(T)\|^2_{L^2(0,1)} \right).$$

Using integrations by parts and Cauchy–Schwarz's inequality, one gets, for all $j \geq 1$,

$$\left\langle \psi(T; u, \varphi_1) - \psi_1(T), \varphi_j e^{-i\lambda_1 T} \right\rangle = i \sum_{p \in [\![0,k-1]\!]} \sum_{\ell \in [\![1,r]\!]} \langle \mu_\ell \varphi_1, \varphi_j \rangle (-i\omega_j)^p u^\ell_{p+1}(T)$$
$$+\mathcal{O}\left(\|u_1\|^2_{L^2(0,T)} + \sqrt{T} \|u_k\|_{L^2(0,T)} + \|\psi(T; u, \varphi_1) - \psi_1(T)\|^2_{L^2(0,1)} \right).$$

Focusing on $j \in \{j_1, \cdots, j_{kr}\}$, we finally obtain

$$M \left(u^\ell_p(T) \right)_{\substack{p \in [\![1,k]\!] \\ \ell \in [\![1,r]\!]}} = \mathcal{O}\left(\|u_1\|^2_{L^2(0,T)} + \sqrt{T} \|u_k\|_{L^2(0,T)} + \|\psi(T; u, \varphi_1) - \psi_1(T)\|_{L^2(0,1)} \right).$$

As M is invertible, one obtains the desired result. □

8.1.6 Interpolation inequality

In this paper, we expand the solution to the Schrödinger equation (2.1.1) to the second-order term. The remainder term is given by (8.1.14) and is estimated as $\mathcal{O}\left(\|u_1\|^3_{L^2(0,T)} \right)$. The purpose of the following lemma is to compare this error term with the drift size $\|u_k\|^2_{L^2(0,T)}$.

Lemma 8.1.11. *Assume that $k \geq 2$. There exists $C > 0$ such that, for all $T > 0$, $f \in H^{2k-3}((0,T), \mathbb{R})$,*

$$\|f_1\|^3_{L^2(0,T)} \leq C \left(1 + T^{-2k+3} \right) \|f\|_{H^{2k-3}(0,T)} \|f_k\|^2_{L^2(0,T)}.$$

Proof. We apply the Gagliardo-Nirenberg interpolation inequalities – see [Gag59; Nir59] – with $j = k-1$, $l = 3k-3$, $\alpha = \frac{1}{3}$, $p = q = r = s = 2$ et $\varphi = f_k$ to obtain

$$\|f_1\|^3_{L^2(0,T)} \leqslant C \left\| f^{(2k-3)} \right\|_{L^2(0,T)} \|f_k\|^2_{L^2(0,T)} + C T^{-3(k-1)} \|u_k\|^3_{L^2(0,T)}.$$

Moreover,

$$\|u_k\|_{L^2(0,T)} \leqslant T^k \|u\|_{L^2(0,T)} \leqslant t^k \|u\|_{H^{2k-3}(0,T)}.$$

Thus, we obtain the desired result. □

8.1.7 Proof of the drift

We prove Theorem 5.1.6 as a consequence of the following more precise statement.

Theorem 8.1.12. *Let $k, K, r \in \mathbb{N}^*$, μ be functions satisfying $(\mathbf{H})_{\mathbf{conv}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{reg}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{lin}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{null}}$ and $(\mathbf{H})_{\mathbf{pos}}$. If $k \geq 2$ (resp. $k = 1$), there exist $C, T^* > 0$ such that for all $T \in (0, T^*)$, there exists $\eta > 0$ such that for all $u \in H^{2k-3}((0,T), \mathbb{R})^r$ (resp. $u \in L^2((0,T), \mathbb{R})^r$) with $\|u\|_{H^{2k-3}(0,T)} \leq \eta$*

(resp. $\|u_1\|_{L^\infty(0,T)} \leq \eta$*),*

$$(-1)^{k+1} sgn(\gamma^1_{2k-1}) \Im \left\langle \psi(T;u,\varphi_1), \varphi_K e^{-i\lambda_1 T} \right\rangle \geq C \|u_k\|^2_{L^2} - C \|\psi(T;u,\varphi_1) - \psi_1(T)\|^2_{L^2}. \tag{8.1.20}$$

Remark 8.1.13. *Theorem 8.1.12 shows that there exists* $0 < R < 1$ *such that the following targets cannot be reached by the solution to* (2.1.1)

$$\forall \delta \in (0,R), \qquad \psi_f := \left(\sqrt{1-\delta^2}\varphi_1 + i(-1)^k sgn(\gamma^1_{2k-1}) \delta \varphi_K \right) e^{-i\lambda_1 T}.$$

Indeed, if there exist controls u *such that* $\psi(T;u,\varphi_1) = \psi_f$*, the equation* (8.1.20) *leads to*

$$-\delta \geq K \|u_k\|^2_{L^2(0,T)} - 2K(1-\sqrt{1-\delta^2}) \geq -2K\delta^2.$$

This is impossible when $\delta \to 0$*. Thus, we obtain Theorem 5.1.6.*

Proof of Theorem 8.1.12. Using $(\mathbf{H})_{\mathbf{lin}}$ and the remainder estimate (8.1.14), the quadratic expansion of the solution gives, as $\|u_1\|_{L^\infty(0,T)} \to 0$,

$$\Im \left\langle \psi(T;u,\varphi_1), \varphi_K e^{-i\lambda_1 T} \right\rangle = \Im \langle \xi(T), \varphi_K e^{-i\lambda_1 T} \rangle + \mathcal{O}\left(\|u_1\|^3_{L^2} + \|\psi(T;u,\varphi_1) - \psi_1(T)\|^3_{L^2} \right).$$

Using (8.1.6) and Proposition 8.1.6, one gets

$$\Im \langle \psi(T;u,\varphi_1), \varphi_K e^{-i\lambda_1 T} \rangle = (-1)^{k+1} \int_0^T q(u_k(t)) \cos(\omega_K(t-T)) \mathrm{d}t$$
$$+\mathcal{O}\left(\sum_{p \in [\![1,k]\!]} \sum_{\ell \in [\![1,r]\!]} |u_p^\ell(T)|^2 + T\|u_k\|^2_{L^2(0,T)} + \|u_1\|^3_{L^2(0,T)} + \|\psi(T;u,\varphi_1) - \psi_1(T)\|^3_{L^2(0,1)} \right).$$

We use Proposition 8.1.10 to estimate the boundary terms. We obtain, as $\|u_1\|_{L^\infty(0,T)} \to 0$,

$$\begin{aligned} \Im \left\langle \psi(T;u,\varphi_1), \varphi_K e^{-i\lambda_1 T} \right\rangle &= (-1)^{k+1} \int_0^T q(u_k(t)) \cos(\omega_K(t-T)) \mathrm{d}t \\ &+\mathcal{O}\left(T\|u_k\|^2_{L^2(0,T)} + \|u_1\|^3_{L^2(0,T)} + \|\psi(T;u,\varphi_1) - \psi_1(T)\|^2_{L^2(0,1)} \right). \end{aligned} \tag{8.1.21}$$

Let $T^* := \frac{\pi}{3\omega_K}$ if $K \neq 1$, $T^* = +\infty$ else. Let $T \in (0,T^*)$. By $(\mathbf{H})_{\mathbf{pos}}$ and Remark 5.1.4, there exists $C_2 > 0$ such that $\mathrm{sgn}(\gamma^1_{2k-1}) q(a) \geq 4C_2 \|a\|^2$, for every $a \in \mathbb{R}^r$. Thus,

$$\mathrm{sgn}(\gamma^1_{2k-1}) \int_0^T q(u_k(t)) \cos(\omega_K(t-T)) \mathrm{d}t \geqslant 2C_2 \|u_k\|^2_{L^2(0,T)}. \tag{8.1.22}$$

First obstruction – $k=1$: using (8.1.21), we immediately obtain

$$\Im \left\langle \psi(T;u,\varphi_1), \varphi_K e^{-i\lambda_1 T} \right\rangle = \int_0^T q(u_1(t)) \cos(\omega_K(t-T)) \mathrm{d}t$$
$$+\mathcal{O}\left(\left(T + \|u_1\|_{L^\infty(0,T)} \right) \|u_1\|^2_{L^2(0,T)} + \|\psi(T;u,\varphi_1) - \psi_1(T)\|^2_{L^2(0,1)} \right).$$

Then, there exist $C_1, T_1 > 0$ such that, for all $T \in (0,T_1)$, there exists $\eta_1 > 0$ such that, for all

$u \in L^2((0,T),\mathbb{R})^r$ satisfying $\|u_1\|_{L^\infty(0,T)} < \eta_1$,

$$\left|\Im\left\langle \psi(T;u,\varphi_1), \varphi_K e^{-i\lambda_1 T}\right\rangle - \int_0^T q(u_1(t))\cos(\omega_K(t-T))\mathrm{d}t\right|$$
$$\leq C_1\left(T + \|u_1\|_{L^\infty(0,T)}\right)\|u_1\|^2_{L^2(0,T)} + C_1\|\psi(T;u,\varphi_1) - \psi_1(T)\|^2_{L^2(0,1)}.$$

We fix $T_f := \min\left(T_1, T^*, \frac{C_2}{2C_1}\right)$ and $\eta := \min(\eta_1, \frac{C_2}{2C_1})$. This equation together with (8.1.22) conclude the proof.

Other obstructions – $k \geq 2$: using the interpolation inequality proved in Lemma 8.1.11 in (8.1.21), one gets, as $\|u_1\|_{L^\infty(0,T)} \to 0$,

$$\Im\left\langle \psi(T;u,\varphi_1), \varphi_K e^{-i\lambda_1 T}\right\rangle = (-1)^{k+1}\int_0^T q(u_k(t))\cos(\omega_K(t-T))\mathrm{d}t$$
$$+\mathcal{O}\left((T + (1+T^{-2k+3})\|u\|_{H^{2k-3}(0,T)})\|u_k\|^2_{L^2(0,T)} + \|\psi(T;u,\varphi_1) - \psi_1(T)\|^2_{L^2(0,1)}\right).$$

Then, there exist $C_1, T_1 > 0$ such that, for all $T \in (0,T_1)$, there exists $\eta_1 > 0$ such that, for all $u \in H^{2k-3}((0,T),\mathbb{R})^r$ satisfying $\|u_1\|_{L^\infty(0,T)} < \eta_1$,

$$\begin{aligned}&\left|\Im\left\langle \psi(T;u,\varphi_1), \varphi_K e^{-i\lambda_1 T}\right\rangle - (-1)^{k+1}\int_0^T q(u_k(t))\cos(\omega_K(t-T))\mathrm{d}t\right| \\ &\leq C_1\left(\left(T + (1+T^{-2k+3}\right)\|u\|_{H^{2k-3}(0,T)})\|u_k\|^2_{L^2(0,T)} + \|\psi(T;u,\varphi_1) - \psi_1(T)\|^2_{L^2(0,1)}\right).\end{aligned} \tag{8.1.23}$$

Let $T_f := \min\left(T_1, T^*, \frac{C_2}{3C_1}\right)$. For all $T \in (0,T_f)$, we define $\eta := \min(\eta_1, \frac{C_2}{3C_1}, \frac{C_2}{3C_1}T^{2k-3})$. Then, for all $u \in H^{2k-3}((0,T),\mathbb{R})^r$ with $\|u\|_{H^{2k-3}(0,T)} \leq \eta$, the estimate (8.1.23) leads to

$$\left|\Im\left\langle \psi(T;u,\varphi_1), \varphi_K e^{-i\lambda_1 T}\right\rangle - (-1)^{k+1}\int_0^T q(u_k(t))\cos(\omega_K(t-T))\mathrm{d}t\right|$$
$$\leq C_2\|u_k\|^2_{L^2(0,T)} + C_1\|\psi(T;u,\varphi_1) - \psi_1(T)\|^2_{L^2(0,1)}.$$

This equation together with (8.1.22) lead to the desired result. □

8.2 Postponed proofs

8.2.1 Existence of $\mu_1, \cdots, \mu_r$ verifying the hypotheses

Theorem 8.2.1. *Let $k, K, r \in \mathbb{N}^*$. There exist $\mu_1, \cdots, \mu_r$ satisfying* $(\mathbf{H})_{\mathbf{reg}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{conv}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{lin}}$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{null}}$ *and* $(\mathbf{H})_{\mathbf{pos}}$.

We use arguments very similar to those developed in [Bou24; Bou23b; Ghe25b]. That is why we will only give a proof skeleton for $r = 2$.

Ideas of proof. We prove more precisely the existence of $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{C}_c^\infty(0,1)$ such that the previous assumptions are satisfied. If $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{C}_c^\infty(0,1)$, $(\mathbf{H})_{\mathbf{reg}}$ is already verified. This is also the case for $(\mathbf{H})_{\mathbf{conv}}$ by Remark 5.1.2. In Chapter 6, using a trick that divides function supports into two parts, we have explained how to guarantee the existence of functions $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{C}_c^\infty(0,1)$ so that the following equalities hold

$$\langle \mu_1\varphi_1, \varphi_K\rangle = \langle \mu_2\varphi_1, \varphi_K\rangle = 0, \tag{8.2.1}$$

$$\forall 1 \leq p \leq 2k-2,\ \forall 1 \leq \ell \leq L \leq 2, \quad \gamma_p^{\ell,L} = 0, \tag{8.2.2}$$

$$\gamma_{2k-1}^{1,2} = 0 \tag{8.2.3}$$

As a consequence, $(\mathbf{H})_{\mathbf{lin}}$ and $(\mathbf{H})_{\mathbf{null}}$ are satisfied. Moreover using Remark 5.1.5, as $\gamma_{2k-1}^{1,2} = 0$, the assumption $(\mathbf{H})_{\mathbf{pos}}$ becomes

$$\gamma_{2k-1}^1 \gamma_{2k-1}^2 > 0.$$

Then, we want to guarantee that (8.2.1), (8.2.2), (8.2.3), $\gamma_{2k-1}^1 > 0$ and $\gamma_{2k-1}^2 > 0$ can be satisfied simultaneously to conclude the proof. This is what Bournissou did in [Bou23b, Theorem A.4]. By adapting her method to our setting, we obtain the claimed result. $\square$

8.2.2 Some series expansions

We recall that ω_j and ν_j are defined in (8.1.1).

Definition 8.2.2. *Let $a := (a_j)_{j\geq 1}, b := (b_j)_{j\geq 1}$ be sequences of real numbers and $l \in \mathbb{N}$ s.t. $\left(a_j j^{2l}\right)_{j\geq 1}, \left(b_j j^{2l}\right)_{j\geq 1} \in \ell^1(\mathbb{N}^*)$. We define $\gamma_l(a,b) := \sum_{j=1}^{+\infty}\left(a_j \omega_j^{\lfloor \frac{l}{2}\rfloor}\nu_j^{\lfloor \frac{l+1}{2}\rfloor} - b_j \omega_j^{\lfloor \frac{l+1}{2}\rfloor}\nu_j^{\lfloor \frac{l}{2}\rfloor}\right)$.*

Remark 8.2.3. *We recall that $\gamma_p^{\ell,L}$ is specified in Definition 5.1.3. If $(\mathbf{H})_{\mathbf{conv}}$ holds,*

$$\forall 0 \leq p \leq 2k-1,\ 1 \leq \ell \leq L \leq r, \qquad \gamma_p^{\ell,L} = \gamma_p\left(c^{\ell,L}, c^{L,\ell}\right).$$

Lemma 8.2.4. *Let $\nu \in \mathbb{N}$. There exist coefficients $(\beta_l^\nu)_{l\in[\![0,\nu]\!]} \in \mathbb{Z}^{\nu+1}$ such that, for every $p \in \mathbb{N}$ and $a := (a_j)_{j\geq 1}, b := (b_j)_{j\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ verifying $\sum_{j=1}^{+\infty}(|a_j| + |b_j|)\, j^{2(2p+\nu)} < +\infty$,*

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\left(a_j\omega_j^{p+\nu}\nu_j^p - b_j\omega_j^p\nu_j^{p+\nu}\right) = \sum_{l=0}^{\nu}\beta_l^\nu(-1)^l\gamma_{2p+l}(a,b)\,\omega_K^{\nu-l}.$$

Proof. We prove this statement by induction on $\nu \in \mathbb{N}$. *Initialisation.* For $\nu = 0$, the desired equality is true by definition with $\beta_0^0 = 1$. For $\nu = 1$, one can notice that $\omega_K - \nu_j = \omega_j$. Then,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{+\infty}\left(a_j\omega_j^{p+1}\nu_j^p - b_j\omega_j^p\nu_j^{p+1}\right) &= \sum_{j=1}^{+\infty} a_j\omega_j^p\nu_j^p(\omega_K - \nu_j) - \sum_{j=1}^{+\infty} b_j\omega_j^p\nu_j^p(\omega_K - \omega_j)\\ &= \omega_K\gamma_{2p}(a,b) - \gamma_{2p+1}(a,b).\end{aligned}$$

We obtain the result with $\beta_0^1 = \beta_1^1 = 1$. *Induction step:* assume that the result holds for ν and $\nu+1$. Let $p \in \mathbb{N}$, $(a_j)_{j\geq 1}, (b_j)_{j\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ be such that $\sum_{j=1}^{+\infty}(|a_j| + |b_j|)\, j^{2(2p+\nu+2)} < +\infty$. Using the same strategy,

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\left(a_j\omega_j^{p+\nu+2}\nu_j^p - b_j\omega_j^p\nu_j^{p+\nu+2}\right) = \omega_K\sum_{j=1}^{+\infty}\left(a_j\omega_j^{p+\nu+1}\nu_j^p - b_j\omega_j^p\nu_j^{p+\nu+1}\right)$$
$$-\sum_{j=1}^{+\infty}\left((a_j\omega_j\nu_j)\,\omega_j^{p+\nu}\nu_j^p - (b_j\omega_j\nu_j)\,\omega_j^p\nu_j^{p+\nu}\right).$$

We use the equality $\gamma_{2p+l}\left((a_j\omega_j\nu_j)_{j\geq 1},(b_j\omega_j\nu_j)_{j\geq 1}\right) = \gamma_{2(p+1)+l}(a,b)$ and the induction hypothesis to obtain the result, with $\beta_l^{\nu+2} = \beta_l^{\nu+1} - \beta_{l-2}^{\nu}$. ☐

Corollary 8.2.5. *Assume that* $(\mathbf{H})_{\mathbf{conv}}$ *holds. Let* $\nu \in \mathbb{N}$*, there exist* $(\beta_l^\nu)_{l\in[\![0,\nu]\!]}, (\delta_l^\nu)_{l\in[\![0,\nu]\!]} \in \mathbb{Z}^{\nu+1}$ *such that, for every* $p \in \mathbb{N}$ *satisfying* $2p+\nu \leq 2k-1$*, for every* $1 \leq \ell \leq L \leq r$*,*

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\left(c_j^{\ell,L}\omega_j^{p+\nu}\nu_j^p - c_j^{L,\ell}\omega_j^p\nu_j^{p+\nu}\right) = \sum_{l=0}^{\nu}\beta_l^\nu(-1)^l\gamma_{2p+l}^{\ell,L}\omega_K^{\nu-l},$$

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\left(c_j^{L,\ell}\omega_j^{p+\nu}\nu_j^p - c_j^{\ell,L}\omega_j^p\nu_j^{p+\nu}\right) = \sum_{l=0}^{\nu}\delta_l^\nu(-1)^l\gamma_{2p+l}^{\ell,L}\omega_K^{\nu-l}.$$

Moreover, $\beta_0^1 = \beta_1^1 = 1$.

Proof. The first point is a direct consequence of Lemma 8.2.4 with $a = c^{\ell,L}$ and $b = c^{L,\ell}$. The second one can be proved in the same way (induction). ☐

Remark 8.2.6. *Assume that* $\mu_1,\cdots,\mu_r \in \mathcal{C}_c^\infty(0,1)$ *so that* $(\mathbf{H})_{\mathbf{conv}}$ *holds by Remark 5.1.2. Then, for all* $p,\nu \in \mathbb{N}$ *with* $2p+\nu \leq 2k-1$*, for all* $1 \leq \ell \leq L \leq r$*, a bracket computation gives*

$$\left\langle[\underline{\mathrm{ad}}_A^p(\mu_\ell),\underline{\mathrm{ad}}_A^{p+\nu}(\mu_L)]\varphi_1,\varphi_K\right\rangle = (-1)^\nu\sum_{j=1}^{+\infty}\left(c_j^{\ell,L}\omega_j^{p+\nu}\nu_j^p - c_j^{L,\ell}\omega_j^p\nu_j^{p+\nu}\right). \tag{8.2.4}$$

Using (8.2.4) *and Proposition B.2.3, the first expansion of Corollary 8.2.5 can be written*

$$\left\langle[\underline{\mathrm{ad}}_A^p(\mu_\ell),\underline{\mathrm{ad}}_A^{p+\nu}(\mu_L)]\varphi_1,\varphi_K\right\rangle$$
$$=\sum_{l=0}^{\nu}\beta_l^\nu(-1)^l\left\langle\underline{\mathrm{ad}}_A^{\nu-l}\left(\left[\underline{\mathrm{ad}}_A^{p+\lfloor\frac{l+1}{2}\rfloor}(\mu_\ell),\underline{\mathrm{ad}}_A^{p+\lfloor\frac{l}{2}\rfloor}(\mu_L)\right]\right)\varphi_1,\varphi_K\right\rangle.$$

Thus, Corollary 8.2.5 is the equivalent of Lemma 7.4.6 in the infinite-dimensional case. Moreover, the sequences defined in Corollary 8.2.5 and Lemma 7.4.6 are the same.

Part IV

Annexes

Annexe A : Some ideas about the proofs of the representation formula of Theorem 1.6.17 and Corollary 1.6.18

We consider the formal differential equation

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = y(t)\left(X_0 + \sum_{\ell=1}^{r} u^\ell(t) X_\ell\right), \\ y(0) = 1, \end{cases} \tag{A.0.1}$$

whose solution is a formal series valued function $y : \mathbb{R}_+ \to \widehat{\mathcal{A}}(X)$ – see [BLBM23, Section 2.2]. By [BLBM23, Section 2.4, Theorem 41], for every $t > 0$, there exists $\mathcal{Z}_\infty(t; X, u) \in \widehat{\mathcal{L}}(X)$ such that

$$y(t) = \exp(tX_0)\exp\left(\mathcal{Z}_\infty(t; X, u)\right). \tag{A.0.2}$$

If $\mathcal{B} \subset \mathrm{Br}(X)$ is a Hall set, there exists a unique family $(\eta_b)_{b\in\mathcal{B}}$ of maps $\mathbb{R}_+ \times L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})^r \to \mathbb{R}$, called coordinates of the pseudo-first kind associated with $\mathcal{B}$ and they satisfy the announced homogeneity properties in (1.6.3). Moreover, by [BLBM23, Section 2.5], for every $t > 0$ and $u \in L^1((0,t), \mathbb{R})^r$,

$$y(t) = \overleftarrow{\prod_{b\in\mathcal{B}}} e^{\xi_b(t,u)b}. \tag{A.0.3}$$

Let $\mathcal{B}$ be a Hall set as in Proposition 1.6.22. We deduce from (A.0.2), (A.0.3) and the maximality of X_0 in $\mathcal{B}$ that

$$\exp\left(\mathcal{Z}_\infty(t; X, u)\right) = \overleftarrow{\prod_{b\in\mathcal{B}\setminus\{X_0\}}} e^{\xi_b(t,u)b}.$$

By applying the multivariate CBHD formula [BLBM23, Proposition 34] to this expression, one obtains $\eta_b = \xi_b$ for every $b \in \mathcal{B}_1$ and for every $b \in \mathcal{B}_2$,

$$\eta_b(t,u) = \xi_b(t,u) + \frac{1}{2}\sum \delta_{(b_1,b_2),b}\xi_{b_1}(t,u)\xi_{b_2}(t,u)$$

where the sum is indexed by the set $\{b_1 > b_2 \in \mathcal{B}_1;\ b \in \mathrm{supp}(b_1,b_2)\}$ and $\delta_{(b_1,b_2),b}$ denotes the coefficient of b in the expansion of (b_1,b_2) on the basis $\mathcal{B}$. We recall that the support is introduced in Definition 7.1.6. In particular this sum is finite and involves only elements $b_1, b_2 \in \mathcal{B}_1$ such that $n_0(b_1) + n_0(b_1) = n_0(b)$.

The estimate (1.6.7) is proved in [BLBM23, Proposition 161]. The transition from Theorem 1.6.17 to Corollary 1.6.18 is made by Lemma C.0.1. The absolute convergence is proved in [BLBM23, Proposition 103] and relies on [BBM22, Theorem 1.9].

Let $\mu \in L^2(0,1)$. We recall that A is the operator defined in (2.3.1) and we define B as the multiplication operator by μ in $L^2(0,1)$.

B.1 Definition of Lie brackets in infinite dimension

Lemma B.1.1. *Let $k \in \mathbb{N}$, $\mu \in W^{2k,\infty}(0,1)$ with all its derivatives of odd order less than or equal to $2k-3$ that vanish at the boundary. Then, for all $\varphi \in H^{2k}_{(0)}(0,1)$, $\underline{\mathrm{ad}}^k_A(B)\varphi$ is well-defined in $L^2(0,1)$. Moreover,*

$$\underline{\mathrm{ad}}^k_A(B)\varphi = \sum_{l=0}^{k} \alpha^k_l \mu^{(2k-l)} \varphi^{(l)},$$

with the definitions of the scalar $(\alpha^k_l)_{0\le l\le k}$ given in (6.4.1).

Proof. We prove this lemma by induction on k. The case $k=0$ is immediate, because B is an operator on $L^2(0,1)$ when $\mu \in L^\infty(0,1)$. Assume that the result is true for a fixed k. We consider $\mu \in W^{2k+2,\infty}(0,1)$ such that $\mu^{(2l+1)}|_{\{0,1\}} = 0$ for $0 \le l \le k-1$. Let $\varphi \in H^{2k+2}_{(0)}(0,1)$. Then,

1. $A\varphi \in H^{2k}_{(0)}(0,1)$, so $\underline{\mathrm{ad}}^k_A(B)(A\varphi)$ is well-defined, by the induction hypothesis.
2. We now prove that $\underline{\mathrm{ad}}^k_A(B)\varphi \in H^2_{(0)}(0,1)$. By induction hypothesis, one has the equality $\underline{\mathrm{ad}}^k_A(B)\varphi = \sum_{l=0}^{k} \alpha^k_l \mu^{(2k-l)} \varphi^{(l)}$. Then, one has $\underline{\mathrm{ad}}^k_A(B)\varphi \in H^2(0,1)$. Moreover, for all $l \in [\![0,k]\!]$,
   a. if l is odd, $l = 2i+1$ and $\mu^{(2k-2i-1)}\varphi^{(l)}|_{\{0,1\}} = 0$ because $2k-2i-1 \le 2k-1$ so $\mu^{(2k-2i-1)}|_{\{0,1\}} = 0$,
   b. otherwise, l is even, $\mu^{(2k-l)}\varphi^{(l)}|_{\{0,1\}} = 0$ because $l \le k$ and $\varphi \in H^{2k+2}_{(0)}(0,1)$.

   Then, the bracket is well-defined in $L^2(0,1)$. By induction, we obtain the result.

$\square$

Proposition B.1.2. *Let $k \in \mathbb{N}^*$, $\mu \in W^{4k-2,\infty}(0,1)$ with all its derivatives of odd order less than or equal to $4k-5$ that vanish at the boundary. Then, for all $\varphi \in H^{3k-1}_{(0)}(0,1)$ the operator $[\underline{\mathrm{ad}}^{k-1}_A(B), \underline{\mathrm{ad}}^k_A(B)]\varphi$ is well-defined in $L^2(0,1)$.*

Proof. Let $\varphi \in H^{3k-1}_{(0)}(0,1)$. Then $\varphi \in H^{2k}_{(0)}(0,1)$ so $\underline{\mathrm{ad}}^k_A(B)\varphi$ and $\underline{\mathrm{ad}}^{k-1}_A(B)\varphi$ are well-defined by Proposition B.1.1 and one has to prove that

1. $\underline{\mathrm{ad}}_A^{k-1}(B)\varphi \in H^{2k}_{(0)}(0,1)$. One recalls that $\underline{\mathrm{ad}}_A^{k-1}(B)\varphi = \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_l^{k-1} \mu^{(2k-l-2)} \varphi^{(l)}$. According to the regularity of φ and μ, this expansion gives $\underline{\mathrm{ad}}_A^{k-1}(B)\varphi \in H^{2k}(0,1)$. Then, using Leibniz formula, for all $j \in [\![0, k-1]\!]$, $l \in [\![0, k-1]\!]$,

$$\left(\mu^{(2k-l-2)}\varphi^{(l)}\right)^{(2j)} = \sum_{i=0}^{2j} \binom{2j}{i} \mu^{(2k-l-2+i)} \varphi^{(l+2j-i)}.$$

Each term of this sum vanish at $x = 0, 1$. Indeed,

   a. if i and l have the same parity, $l+2j-i$ is even and $l+2j-i \leq k-1+2(k-1) = 3k-3$ so $\varphi^{(l+2j-i)}|_{\{0,1\}} = 0$,

   b. otherwise, $2k-l-2+i$ is odd and $2k-l-2+i \leq 2k-2+2j-1 \leq 4k-5$ so $\mu^{(2k-l-2+i)}|_{\{0,1\}} = 0$.

2. $\underline{\mathrm{ad}}_A^{k}(B)\varphi \in H^{2k-2}_{(0)}(0,1)$. This is proven in the same way as point 1.

Consequently, the operator $\left[\underline{\mathrm{ad}}_A^{k-1}(B), \underline{\mathrm{ad}}_A^{k}(B)\right]$ is well-defined in $L^2(0,1)$. ☐

Then, if $2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 3 \leq p-1$, Proposition B.1.2 ensures that the brackets in (3.2.1) and (3.2.2) are well-defined in $L^2(0,1)$.

Proposition B.1.3. *Let $k \in \mathbb{N}$, $\mu_1, \mu_2 \in W^{2k,\infty}(0,1)$ with all their derivatives of odd order less than or equal to $2k-3$ that vanish at the boundary Then, for all $\varphi \in H^{k+\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}_{(0)}(0,1)$, $\left[\underline{\mathrm{ad}}_A^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}(B_1), \underline{\mathrm{ad}}_A^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}(B_2)\right] \varphi$ is well-defined in $L^2(0,1)$.*

This proposition can be proved in the same way as the previous one. Similarly, if $n-2 \leq p-1$, the brackets in (3.2.3) are well-defined, thanks to Proposition B.1.3.

B.2 Computation of Lie brackets for the Schrödinger equation

Lemma B.2.1. *Let $k \in \mathbb{N}$ and $\mu \in W^{2k,\infty}(0,1)$ be such that $\mu^{(2l+1)}|_{\{0,1\}} = 0$ for $0 \leq l \leq k-2$. Then, for all $p, q \in \mathbb{N}^*$,*

$$\left\langle \underline{\mathrm{ad}}_A^{k}(B)\varphi_p, \varphi_q \right\rangle = (\lambda_p - \lambda_q)^k \langle \mu\varphi_p, \varphi_q \rangle .$$

Proof. Let $k \in \mathbb{N}$. As $\varphi_p, \varphi_q \in H^{2k+2}_{(0)}(0,1)$, one has

$$\left\langle \underline{\mathrm{ad}}_A^{k+1}(B)\varphi_p, \varphi_q \right\rangle = \left\langle [\underline{\mathrm{ad}}_A^{k}(B), A]\varphi_p, \varphi_q \right\rangle = \left\langle (\lambda_p I_d - A)\underline{\mathrm{ad}}_A^{k}(B)\varphi_p, \varphi_q \right\rangle .$$

Using the symmetry property of A,

$$\left\langle \underline{\mathrm{ad}}_A^{k+1}(B)\varphi_p, \varphi_q \right\rangle = \left\langle \underline{\mathrm{ad}}_A^{k}(B)\varphi_p, (\lambda_p I_d - A)\varphi_q \right\rangle = (\lambda_p - \lambda_q) \left\langle \underline{\mathrm{ad}}_A^{k}(B)\varphi_p, \varphi_q \right\rangle .$$

Moreover, the result in true for $k = 0$. An induction concludes the proof. ☐

Proposition B.2.2. *Let $k \in \mathbb{N}^*$, $K \geq 2$ and $\mu \in W^{4k-2,\infty}(0,1)$ be such that $\mu^{(2l+1)}|_{\{0,1\}} = 0$ for $0 \leq l \leq 2k-3$. Then,*

$$\left\langle [\underline{\mathrm{ad}}_A^{k-1}(B), \underline{\mathrm{ad}}_A^{k}(B)]\varphi_1, \varphi_K \right\rangle = 2(-1)^k A_k^1.$$

Proof. By definition,

$$2(-1)^k A_k^1 = \sum_{j=1}^{+\infty} c_j(\lambda_j - \lambda_1)^{k-1}(\lambda_K - \lambda_j)^k - \sum_{j=1}^{+\infty} c_j(\lambda_j - \lambda_1)^{k}(\lambda_K - \lambda_j)^{k-1}.$$

Using Lemma B.2.1, we obtain

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\left\langle \underline{\mathrm{ad}}_A^{k-1}(B)\varphi_j, \varphi_1 \right\rangle \left\langle \underline{\mathrm{ad}}_A^{k}(B)\varphi_K, \varphi_j \right\rangle - \left\langle \underline{\mathrm{ad}}_A^{k}(B)\varphi_j, \varphi_1 \right\rangle \left\langle \underline{\mathrm{ad}}_A^{k-1}(B)\varphi_K, \varphi_j \right\rangle \right).$$

Using the symmetry of the operators, we get

$$2(-1)^k A_k^1 = (-1)^{k-1} \left\langle \underline{\mathrm{ad}}_A^{k-1}(B)\varphi_1, \underline{\mathrm{ad}}_A^{k}(B)\varphi_K \right\rangle + (-1)^{k-1} \left\langle \underline{\mathrm{ad}}_A^{k}(B)\varphi_1, \underline{\mathrm{ad}}_A^{k-1}(B)\varphi_K \right\rangle.$$

Then,

$$2(-1)^k A_k^1 = -\left\langle \underline{\mathrm{ad}}_A^{k}(B)\left(\underline{\mathrm{ad}}_A^{k-1}(B)\varphi_1\right), \varphi_K \right\rangle + \left\langle \underline{\mathrm{ad}}_A^{k-1}(B)\left(\underline{\mathrm{ad}}_A^{k}(B)\varphi_1\right), \varphi_K \right\rangle.$$

Finally,

$$2(-1)^k A_k^1 = \left\langle [\underline{\mathrm{ad}}_A^{k-1}(B), \underline{\mathrm{ad}}_A^{k}(B)]\varphi_1, \varphi_K \right\rangle.$$

This equality concludes the proof. □

Proposition B.2.3. *Let $k \in \mathbb{N}$, $K \geq 2$ and $\mu_1, \mu_2 \in W^{2k,\infty}(0,1)$ such that ${\mu_i}^{(2l+1)}|_{\{0,1\}} = 0$ for $0 \leq l \leq k-2$ and $i \in \{1,2\}$. Then,*

$$\left\langle \left[\underline{\mathrm{ad}}_A^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}(B_1), \underline{\mathrm{ad}}_A^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}(B_2)\right] \varphi_1, \varphi_K \right\rangle = (-1)^k \gamma_k.$$

Proof. Using Lemma B.2.1, we notice that

$$\gamma_k = \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\left\langle \underline{\mathrm{ad}}_A^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}(B_1)\varphi_K, \varphi_j \right\rangle \left\langle \underline{\mathrm{ad}}_A^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}(B_2)\varphi_j, \varphi_1 \right\rangle - \left\langle \underline{\mathrm{ad}}_A^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}(B_2)\varphi_K, \varphi_j \right\rangle \left\langle \underline{\mathrm{ad}}_A^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}(B_1)\varphi_j, \varphi_1 \right\rangle \right)$$

As $(\varphi_j)_{j\geq 1}$ is an orthonormal basis of L^2 and thanks to the symmetry/skew-symmetry of the operator,

$$\gamma_k = (-1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \left\langle \underline{\mathrm{ad}}_A^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}(B_1)\varphi_K, \underline{\mathrm{ad}}_A^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}(B_2)\varphi_1 \right\rangle - (-1)^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} \left\langle \underline{\mathrm{ad}}_A^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}(B_2)\varphi_K, \underline{\mathrm{ad}}_A^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}(B_1)\varphi_1 \right\rangle.$$

Once again, using the symmetry/skew-symmetry of the operator,

$$\gamma_k = (-1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} \left\langle \left[\underline{\mathrm{ad}}_A^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}(B_1), \underline{\mathrm{ad}}_A^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}(B_2) \right] \varphi_1, \varphi_K \right\rangle .$$

This equality completes the proof. □

Lemma C.0.1. *Let $\delta > 0$ and $z \in \mathcal{C}^1(B_\delta; \mathbb{R}^d)$ be such that $\|z\|_\infty \leq \delta$. We note $x(\cdot; z, 0)$ the solution to the system* $\begin{cases} x' &= z(x) \\ x(0) &= 0 \end{cases}$. *Then,*

$$\|x(1; z, 0) - z(0)\| \leq \|z(0)\| \, \|Dz\|_\infty \, e^{\|Dz\|_\infty}.$$

Proof. This lemma is proved in [BLBM23, Lemma 160]. $\square$

Lemma C.0.2. *Let $\delta > 0$ and $f_0, f_1, f_2 : B(0, 2\delta) \to \mathbb{R}^d$ be real-analytic functions, with $f_0(0) = 0$. There exists $r(\delta) > 0$, such that, for all $T_1 < T < T_1 + 1$, $p \in B(0, r(\delta))$ and $u, v \in L^\infty(T_1, T)$ with $\|u\|_{L^\infty}, \|v\|_{L^\infty} < r(\delta)$, one has*

$$\forall t \in [T_1, T], \quad x(T; (u,v), p, T_1) \in B(0, \delta). \tag{C.0.1}$$

Proof. Let $C := \sup_{z \in \overline{B(0,\delta)}} \|Df_0(z)\|$, $r(\delta) := \dfrac{\delta}{6e^C \left(1 + \max_{i \in [\![1,2]\!]} \left(\|f_i\|_{L^\infty\left(\overline{B(0,\delta)}\right)}\right)\right)}$. Let $p \in B(0, r(\delta))$ and $u, v \in L^\infty(T_1, T)$ with $\|u\|_{L^\infty}, \|v\|_{L^\infty} < r(\delta)$. By contradiction, we assume that (C.0.1) is false. One considers

$$\tau = \sup\{t \in [T_1, T], \ \forall s \in [T_1, t], \ \|x(s; (u,v), p, T_1)\| < \delta\}.$$

The time τ is well defined. By construction, for all $t \in [T_1, \tau[$, $\|x(t; (u,v), p, T_1)\| < \delta$ and $\|x(\tau; (u,v), p, T_1)\| = \delta$. Then, for all $t \in [T_1, \tau]$,

$$\|x(t; (u,v), p, T_1)\| \leq \int_{T_1}^t \|f_0(x(s; (u,v), p, T_1)) - f_0(0)\| \, \mathrm{d}s$$
$$+ \|p\| + \|u\|_{L^\infty(T_1,t)} \|f_1\|_{L^\infty\left(\overline{B(0,\delta)}\right)} + \|v\|_{L^\infty(T_1,t)} \|f_2\|_{L^\infty\left(\overline{B(0,\delta)}\right)}.$$

Thus, using the Mean Value Theorem and the Grönwall's inequality, one obtains, for all $t \in [T_1, \tau]$,

$$\|x(t; (u,v), p, T_1)\| \leq e^C \left(\|p\| + \|u\|_{L^\infty(T_1,t)} \|f_1\|_{L^\infty\left(\overline{B(0,\delta)}\right)} + \|v\|_{L^\infty(T_1,t)} \|f_2\|_{L^\infty\left(\overline{B(0,\delta)}\right)}\right). \tag{C.0.2}$$

Taking $t \to \tau^-$, we obtain a contradiction. $\square$

Corollary C.0.3. *Let $\delta > 0$ and $f_0, f_1, f_2 : B(0, 2\delta) \to \mathbb{R}^d$ be real-analytic functions, with $f_0(0) = 0$. There exists $r(\delta), C(\delta) > 0$, such that, for all $T_1 < T < T_1 + 1$, $p \in B(0, r(\delta))$ and $u, v \in L^\infty(T_1, T)$ with $\|u\|_{L^\infty}, \|v\|_{L^\infty} < r(\delta)$, one has*

$$\|x(T; (u,v), p, T_1)\| \leq C(\delta) \left(\|p\| + \|(u,v)\|_{L^\infty}\right).$$

Proof. Using Lemma C.0.2, there exists $r(\delta) > 0$ *s.t.* the solution stays in $B(0, \delta)$. Then, Grönwall's lemma gives (C.0.2), for $t \in [T_1, T]$. One obtains the result. $\square$

Lemma C.0.4. *Let $\delta > 0$ and $f_0 : B(0, 2\delta) \to \mathbb{R}^d$ be a real-analytic function, with $f_0(0) = 0$. There exists $C > 0$, $\varepsilon > 0$ such that, for all $T_1 < T < T_1 + 1$ and $p \in B(0, \varepsilon)$,*

$$\left\| x(T; (0,0), p, T_1) - e^{(T-T_1)Df_0(0)} p \right\| \leq C \|p\|^2 .$$

Proof. By definition, there exists $h > 0$, *s.t.* for all $x \in B(0, h)$,

$$\|f_0(x) - f_0(0) - Df_0(0)x\| \leq \left(\frac{1}{2} \left\| D^2 f_0(0) \right\| + 1 \right) \|x\|^2 . \tag{C.0.3}$$

Let $p \in B(0, \varepsilon)$ with $\varepsilon = \min(r(\delta), r(h))$, where $r(\delta)$ and $r(h)$ are defined by Lemma C.0.2. Using the Duhamel's principle,

$$\begin{aligned} &\left\| x(T, (0,0), p, T_1) - e^{(T-T_1)Df_0(0)} p \right\| \\ \leq &\int_{T_1}^{T} \left\| e^{(T-s)Df_0(0)} \right\| \|f_0(x(s, (0,0), p, T_1)) - Df_0(0)x(s, (0,0), p, T_1)\| \, \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Thank to the choice of ε, one can use (C.0.3) and Corollary C.0.3 gives the result

$$\left\| x(T, (0,0), p, T_1) - e^{(T-T_1)Df_0(0)} p \right\| \leq \left(\frac{1}{2} \left\| D^2 f_0(0) \right\| + 1 \right) C(\delta)^2 e^{\|Df_0(0)\|} \|p\|^2 .$$

$\square$

Lemma C.0.5. *Let $\delta > 0$ and $f_0, f_1, f_2 : B(0, 2\delta) \to \mathbb{R}^d$ be real-analytic functions, with $f_0(0) = 0$. There exists $C, \varepsilon > 0$, such that, for all $T_1 < T < T_1 + 1$, $p \in B(0, \varepsilon)$ and $u, v \in L^\infty(T_1, T)$ with $\|u\|_{L^\infty}, \|v\|_{L^\infty} < \varepsilon$, one has*

$$\|x(T; (u,v), p, T_1) - x(T; (u,v), 0, T_1) - x(T; (0,0), p, T_1)\| \leq C \left(\|p\| \|(u,v)\|_{L^\infty} + \|p\|^2 \right).$$

Proof. By definition, there exists $C, h > 0$, *s.t.* for all $x \in B(0, h)$, $k \in B(0, \delta)$, $\eta \in \mathbb{R}^d$

$$\|f_0(x + k) - f_0(k) - Df_0(k)x\| \leq C \|x\|^2 , \tag{C.0.4}$$

$$\|Df_0(x)\eta - Df_0(0)\eta\| \leq C \|x\| \|\eta\| . \tag{C.0.5}$$

Let $p \in B(0, \varepsilon)$, $u, v \in L^\infty(T_1, T)$ with $\|u\|_{L^\infty}, \|v\|_{L^\infty} < \varepsilon$, where $\varepsilon := \min(r(\delta/3), r(h/3))$ is given by Lemma C.0.2. For simplicity, we use the notations: $x := x(\cdot; (u,v), p, T_1)$, $x_{u,v} := x(\cdot; (u,v), 0, T_1)$ and $x_p := x(\cdot; (0,0), p, T_1)$. Let $z := x - x_{u,v} - x_p$. By definition, z is solution to the following affine system

$$\begin{aligned} z' = &(f_0(z + x_{u,v} + x_p) - f_0(x_{u,v} + x_p)) + (f_0(x_{u,v} + x_p) - f_0(x_{u,v}) - f_0(x_p)) \\ &+ u\,(f_1(z + x_{u,v} + x_p) - f_1(x_{u,v})) + v\,(f_2(z + x_{u,v} + x_p) - f_2(x_{u,v})) , \end{aligned} \tag{C.0.6}$$

with $z(T_1) = 0$. Then, we majorise each term of the integral formulation of this equation. The first one: using the Mean Value Theorem, for all $t \in (T_1, T)$,

$$\left\| \int_{T_1}^{t} (f_0(z(s) + x_{u,v}(s) + x_p(s)) - f_0(x_{u,v}(s) + x_p(s)))\,\mathrm{d}s \right\| \leq C_1 \int_{T_1}^{t} \|z(s)\|\,\mathrm{d}s, \tag{C.0.7}$$

with $C_1 := \sup_{z \in \overline{B(0,\delta)}} \|Df_0(z)\|$. We split the second term as

$$\begin{aligned} &\int_{T_1}^{t} \|f_0(x_{u,v}(s) + x_p(s)) - f_0(x_{u,v}(s)) - Df_0(x_{u,v}(s))(x_p(s))\|\,\mathrm{d}s \\ &+ \int_{T_1}^{t} \|Df_0(x_{u,v}(s))(x_p(s)) - Df_0(0)(x_p(s))\|\,\mathrm{d}s + \int_{T_1}^{t} \|f_0(x_p(s)) - Df_0(0)(x_p(s))\|\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Using (C.0.4) with $x = x_p(s)$, $k = x_{u,v}(s)$ or $k = 0$ and (C.0.5) with $x = x_{u,v}(s)$ and $\eta = x_p(s)$, the term is bounded by

$$C \int_{T_1}^{t} \|x_p(s)\|^2\,\mathrm{d}s + C \int_{T_1}^{t} \|x_p(s)\|\,\|x_{u,v}(s)\|\,\mathrm{d}s.$$

Then, using Corollary C.0.3 for $x_{u,v}$ and x_p, one has the following upper bound

$$CC(\varepsilon)^2 \|p\|^2 + CC(\varepsilon)^2 \|p\|\,\|(u,v)\|_{L^\infty}. \tag{C.0.8}$$

For the third term, once again, using the Mean Value Theorem, for all $t \in (T_1, T)$,

$$\left\| \int_{T_1}^{t} u(s)\,(f_1(z(s) + x_{u,v}(s) + x_p(s)) - f_1(x_{u,v}(s)))\,\mathrm{d}s \right\| \leq C_2 \int_{T_1}^{t} \|u(s)\,(z(s) + x_p(s))\|\,\mathrm{d}s,$$

with $C_2 := \sup_{z \in \overline{B(0,\delta)}} \|Df_1(z)\|$. Using Corollary C.0.3 with x_p, one gets

$$\left\| \int_{T_1}^{t} u\,(f_1((z + x_{u,v} + x_p)) - f_1(x_{u,v})) \right\| \leq C_2 \|u\|_{L^\infty} \left(\int_{T_1}^{t} \|z(s)\|\,\mathrm{d}s + C(\varepsilon)\,\|p\| \right). \tag{C.0.9}$$

Similarly, for every $t \in (T_1, T)$,

$$\left\| \int_{T_1}^{t} v\,(f_2((z + x_{u,v} + x_p)) - f_2(x_{u,v})) \right\| \leq C_3 \|v\|_{L^\infty} \left(\int_{T_1}^{t} \|z(s)\|\,\mathrm{d}s + C(\varepsilon)\,\|p\| \right), \tag{C.0.10}$$

with $C_3 := \sup_{z \in \overline{B(0,\delta)}} \|Df_2(z)\|$. Finally, using the estimations (C.0.7), (C.0.8), (C.0.9) and (C.0.10) in the integral formulation of (C.0.6), one has, for every $t \in (T_1, T)$,

$$\begin{aligned} \|z(t)\| \leq (C_1 + (C_2 + C_3)\,\|(u,v)\|_{L^\infty}) \int_{T_1}^{t} \|z(s)\|\,\mathrm{d}s + (C_2 + C_3)C(\varepsilon)\,\|p\|\,\|(u,v)\|_{L^\infty} \\ + CC(\varepsilon)^2 \|p\|^2 + CC(\varepsilon)^2 \|p\|\,\|(u,v)\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

The Grönwall's lemma gives the result. □

Hermes and Kawski proved in [HK87, Theorem 6] that for single-input control-affine systems of the form $x' = f_0(x) + uf_1(x)$, if for some Lie bracket V of f_0 and f_1, $V(0)$ is a tangent vector in the sense of Remark 3.3.3, then $[V, f_0](0)$ is also a tangent vector. The purpose of this appendice is to extend this property with the definition of tangent vector introduced by Bournissou and recalled in Definition 3.3.2. This fact has already been observed and manually proven in [Bou24] for the bilinear Schrödinger equation with one control.

Proposition D.0.1. *Assume that there exists $b \in \mathrm{Br}(X)$ such that $f_b(0)$ is a small-time continuously approximately reachable vector associated with vector variations $\Xi(T)$ such that $\|\cdot\|_{L^\infty(0,T)} \leq \|\cdot\|_{E_T}$. Then, $f_{(b,X_0)}(0)$ is a small-time continuously approximately reachable vector associated with vector variations* $T \in [0, +\infty) \mapsto \begin{cases} \dfrac{e^{2T\mathrm{D}f_0(0)} - I_d}{2T}\Xi(T) & \text{if } T > 0 \\ \mathrm{D}f_0(0)f_b(0) & \text{if } T = 0 \end{cases}$.

Proof. Let $\rho > 0$, $(u_\alpha)_{\alpha \in (-\rho,\rho)}$ be the family of controls associated with the vector $f_b(0)$. By definition, there exists a continuous map $\Xi : [0, +\infty[\to X$ with $\Xi(0) = \xi$ such that for all $T > 0$, there exist $C, s > 0$ such that,

$$\forall \alpha \in (-\rho, \rho), \qquad \|x(T; u_\alpha, 0, 0) - \alpha\Xi(T)\|_X \leq C|\alpha|^{1+s} \qquad \text{with} \qquad \|u_\alpha\|_{E_T} \leq C|\alpha|^s.$$

Then,

$$x(2T; u_\alpha \# 0_{[T,2T]}, 0, 0) = x\left(2T; 0_{[T,2T]}, x(T; u_\alpha, 0, 0), T\right).$$

Thus, by Lemma C.0.4,

$$\left\|x(2T; u_\alpha \# 0_{[T,2T]}, 0, 0) - \alpha e^{T\mathrm{D}f_0(0)}\Xi(T)\right\| \leq |||e^{T\mathrm{D}f_0(0)}||| \, \|x(T; u_\alpha, 0, 0) - \alpha\Xi(T)\| + C|\alpha|^2.$$

Finally,

$$\left\|x(2T; u_\alpha \# 0_{[T,2T]}, 0, 0) - \alpha e^{T\mathrm{D}f_0(0)}\Xi(T)\right\| \leq C|\alpha|^{1+s}.$$

Using the same strategy,

$$x(3T; u_\alpha \# 0_{[T,2T]} \# u_\beta, 0, 0) = x\left(T; u_\beta, x(2T; u_\alpha \# 0_{[T,2T]}, 0, 0), 0\right).$$

We use Lemma C.0.5 to obtain

$$\begin{aligned} x(3T; u_\alpha \# 0_{[T,2T]} \# u_\beta, 0, 0) &= x(T; u_\beta, 0, 0) + x\left(T; 0, x(2T; u_\alpha \# 0_{[T,2T]}, 0, 0), 0\right) \\ &+ \mathcal{O}\left(\left\|x(2T; u_\alpha \# 0_{[T,2T]}, 0, 0)\right\|^2 + \left\|x(2T; u_\alpha \# 0_{[T,2T]}, 0, 0)\right\| \|u_\beta\|_{L^\infty}\right). \end{aligned}$$

As $\|\cdot\|_{L^\infty} \leq \|\cdot\|_{E_T}$, one gets

$$x(3T; u_\alpha \# 0_{[T,2T]} \# u_\beta, 0, 0) = x(T; u_\beta, 0, 0) + x\left(T; 0, x(2T; u_\alpha \# 0_{[T,2T]}, 0, 0), 0\right) + \mathcal{O}(|\alpha|^{1+s}).$$

As in the first step, Lemma C.0.4 leads to

$$\left\| x\left(T; 0, x(2T; u_\alpha \# 0_{[T,2T]}, 0, 0), 0\right) - e^{T\mathrm{D}f_0(0)} x(2T; u_\alpha \# 0_{[T,2T]}, 0, 0) \right\| \leq C|\alpha|^{1+s}.$$

Thus,

$$\left\| x(3T; u_\alpha \# 0_{[T,2T]} \# u_\beta, 0, 0) - \left(\alpha e^{2T\mathrm{D}f_0(0)} + \beta I_d\right) \Xi(T) \right\| \leq C|(\alpha, \beta)|^{1+s}.$$

We choose $\alpha = \frac{z}{2T}$, $\beta = -\alpha$, to obtain: for all $z \in (-\rho, \rho)$,

$$\|x(3T; v_z, 0, 0) - zh(T)\| \leq C|z|^{1+s},$$

with $v_z := u_{\frac{z}{2T}} \# 0_{[T,2T]} \# u_{-\frac{z}{2T}}$. and $h : T \in [0, +\infty) \mapsto \begin{cases} \dfrac{e^{2T\mathrm{D}f_0(0)} - I_d}{2T} \Xi(T) & \text{if } T > 0 \\ \mathrm{D}f_0(0) f_b(0) & \text{if } T = 0 \end{cases}$. Note that $\|v_z\| \leq C|z|^s$. One easily checks that h is a continuous function. Finally, as $f_0(0) = 0$,

$$f_{(b,X_0)}(0) = \mathrm{D}f_0(0) f_b(0).$$

We obtain the result. $\square$

The interested reader may refer to [BL10, Appendix B] for an introduction to solving trigonometric moment problems. The purpose of this appendix is to generalize this result to the case of systems with two controls. To prove the main result of Chapter 3, one might attempt to carry out both steps simultaneously, *i.e.* controlling the linearized system and the dominant part of the quadratic term. The proof is ultimately written differently, but this approach led to the following result.

In this appendix, $(H, \|\cdot\|)$ is a separable Hilbert space over $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ and $(\xi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ a family of vectors of H satisfying $\xi_j \neq 0$ for every $j \in \mathbb{Z}$.

Lemma E.0.1. *Let $\theta = (\xi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ be a Riesz basis of $\overline{Span(\theta)}$ and $g \in H \setminus \overline{Span(\theta)}$. Then, $\theta' = ((\xi_j)_{j\in\mathbb{Z}}, g)$ is a Riesz basis of $\overline{Span(\theta')}$.*

Proof. First step : let us show that θ' is minimal. Assume that there exists $j_0 \in \mathbb{Z}$ such that $\xi_{j_0} \in \overline{\mathrm{Span}((\xi_j)_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{j_0\}}, g)}$. Then, for every $n \in \mathbb{N}^*$, there exists $\varphi_n \in \mathrm{Span}((\xi_j)_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{j_0\}}, g)$ s.t.

$$\|\xi_{j_0} - \varphi_n\| \leq \frac{1}{n}, \tag{E.0.1}$$

with $\varphi_n = \sum_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{j_0\}} c_j^n \xi_j + \lambda_n g$ where $(c_j^n)_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{j_0\}}$ is a scalar sequence with finite support and $\lambda_n \in \mathbb{K}$. If there exists $n_0 \in \mathbb{N}^*$ such that for all $n \geq n_0$, $\lambda_n = 0$, then one has $\xi_{j_0} \in \overline{\mathrm{Span}((\xi_j)_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{j_0\}})}$. This is impossible because θ is minimal. Therefore,

$$\#\{n \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda_n \neq 0\} = +\infty.$$

Let $(\lambda_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ be a subsequence satisfying $\lambda_{\psi(n)} \neq 0$ for every $n \in \mathbb{N}^*$. Noticing that for n large enough,

$$|\lambda_{\psi(n)}| \geq \frac{1}{\|g\|} \left| \left\| \sum_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{j_0\}} c_j^{\psi(n)} \xi_j - \xi_{j_0} \right\| - \frac{1}{\psi(n)} \right| \geq \frac{d(\xi_{j_0}, \mathrm{Span}((\xi_j)_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{j_0\}}))}{2\,\|g\|} =: d,$$

we finally obtain by (E.0.1) that, for n sufficiently large,

$$\left\| g - \frac{1}{\lambda_{\psi(n)}} \left(\xi_{j_0} - \sum_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{j_0\}} c_j^{\psi(n)} \xi_j \right) \right\| \leq \frac{1}{\lambda_{\psi(n)}\psi(n)} \leq \frac{1}{nd}.$$

Thus, $g \in \overline{\mathrm{Span}((\xi_j)_{j\in\mathbb{Z}})}$, this is a contradiction.

Second step : We show that

$$J|_{\overline{\mathrm{Span}(\theta')}} : f \in \overline{\mathrm{Span}(\theta')} \mapsto ((f, \xi_j)_{j\in\mathbb{Z}}, (f, g)) \in l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{K}) \times \mathbb{K}$$

is an isomorphism. Because the family θ' is minimal, we can consider $\{(\zeta)_{j\in\mathbb{Z}}, g'\}$ the biorthogonal family to θ' in $\overline{\mathrm{Span}(\theta')}$. Notice that $J|_{\overline{\mathrm{Span}(\theta)}}$ is an isomorphism, because θ is a Riesz basis. Let $((d_j)_{j\in\mathbb{Z}}, d) \in l^2(\mathbb{Z},\mathbb{K}) \times \mathbb{K}$. We define $f := \left(J|_{\overline{\mathrm{Span}(\theta)}}\right)^{-1}((d_j)_{j\in\mathbb{Z}}) + \lambda g'$, with $\lambda \in \mathbb{K}$. First, $f \in \overline{\mathrm{Span}(\theta')}$. Then,

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad (f, \xi_j) = d_j + \lambda(g', \xi_j) = d_j,$$

$$(f,g) = \left(\left(J|_{\overline{\mathrm{Span}(\theta)}}\right)^{-1}((d_j)_{j\in\mathbb{Z}}), g\right) + \lambda(g', g) = \left(\left(J|_{\overline{\mathrm{Span}(\theta)}}\right)^{-1}((d_j)_{j\in\mathbb{Z}}), g\right) + \lambda,$$

which is equal to d for a good choice of λ. Then $J|_{\overline{\mathrm{Span}(\theta')}}$ is onto. The map is continuous. The map is also one-to-one : if $u, v \in \overline{\mathrm{Span}(\theta')}$ with $J|_{\overline{\mathrm{Span}(\theta')}}(u) = J|_{\overline{\mathrm{Span}(\theta')}}(v)$, then

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad (u - v, \xi_j) = 0 \qquad \text{and} \qquad (u - v, g) = 0.$$

Consequently, $u - v \in \overline{\mathrm{Span}(\theta')} \cap \mathrm{Span}(\theta')^{\perp} = \{0\}$. Thus, $u = v$. □

Lemma E.0.2. *For all $T > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$, the family $\left((e^{i\omega_j \cdot})_{j\in\mathbb{Z}}, (\cdot^i)_{i\in[\![1,k]\!]}\right)$ is a Riesz basis of $L^2(0,T)$.*

Proof. We prove the result by induction on $k \in \mathbb{N}^*$. For $k = 1$, according to Lemma E.0.1, it suffices to show that $t \notin \overline{\mathrm{Span}(e^{i\omega_j \cdot})_{j\in\mathbb{Z}}}$. It's well known – see [BL10, Appendic B - Corollary 6]. Assume that the lemma is true for a fixed k. Thanks to Lemma E.0.1, it is sufficient to show that $\cdot^{k+1} \notin \overline{\mathrm{Span}((e^{i\omega_j \cdot})_{j\in\mathbb{Z}}, (\cdot^i)_{i\in[\![1,k]\!]})}$ to obtain the result for $k+1$. Assume that

$$\cdot^{k+1} \in \overline{\mathrm{Span}((e^{i\omega_j \cdot})_{j\in\mathbb{Z}}, (\cdot^i)_{i\in[\![1,k]\!]})}. \tag{E.0.2}$$

Then,

$$\forall j \geq k+1, \quad \cdot^j \in \overline{\mathrm{Span}((e^{i\omega_j \cdot})_{j\in\mathbb{Z}}, (\cdot^i)_{i\in[\![1,k+1]\!]})}^{\|\cdot\|_\infty}. \tag{E.0.3}$$

By Stone-Weierstrass theorem, $\{1, \cdot^j,\ j \geq k+1\}$ is dense in $\mathcal{C}^0([0,T])$. This is the case for $L^2(0,T)$ too. Consequently, (E.0.2) and (E.0.3) ensure that $\left((e^{i\omega_j \cdot})_{j\in\mathbb{Z}}, (\cdot^i)_{i\in[\![1,k]\!]}\right)$ is dense in $L^2(0,T)$. This is a contradiction. □

The main statement of this Appendix is the following one.

Theorem E.0.3. *Let $T > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$, $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}^*} \in h^3(\mathbb{N}^*)$ and $(d_i)_{i\in[\![1,k]\!]} \in \mathbb{R}^k$ be such that*

$$\exists C > 0, \quad \forall j \geq \mathbb{N}^*, \quad |\langle \mu_1 \varphi_1, \varphi_j \rangle| + |\langle \mu_2 \varphi_1, \varphi_j \rangle| \geq \frac{C}{j^3}. \tag{E.0.4}$$

There exists $u, v \in L^2(0,1)$ such that

$$\forall j \geq \mathbb{N}^*, \quad i\langle \mu_1 \varphi_1, \varphi_j \rangle \int_0^1 u(t) e^{i\omega_j t} \mathrm{d}t + i\langle \mu_2 \varphi_1, \varphi_j \rangle \int_0^1 v(t) e^{i\omega_j t} \mathrm{d}t = \psi_j, \tag{E.0.5}$$

$$\forall i \in [\![1,k]\!], \quad \int_0^1 u_i(t) v(t) \mathrm{d}t = d_i. \tag{E.0.6}$$

Proof. Let J_1 and J_2 be defined as

$$J_1 = \left\{ j \in \mathbb{N}^*,\ |\langle \mu_1 \varphi_1, \varphi_j \rangle| \geq \frac{C}{2j^3} \right\}, \qquad J_2 = \left\{ j \in \mathbb{N}^*,\ |\langle \mu_2 \varphi_1, \varphi_j \rangle| \geq \frac{C}{2j^3} \right\} \cap J_1^c$$

such that $J_1 \sqcup J_2 = \mathbb{N}^*$. We define $u_{|[0,\frac{1}{2}]} = 1$. Now, we solve the moment problem in u on the interval $[\frac{1}{2}, 1]$, *i.e.* we find u in $[\frac{1}{2}, 1]$ with

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{\frac{1}{2}}^{1} u(t) e^{i\omega_j t} \mathrm{d}t = -i \frac{\psi_j \mathbb{1}_{j \in J_1}}{\langle \mu_1 \varphi_1, \varphi_j \rangle} - \int_0^{\frac{1}{2}} u(t) e^{i\omega_j t} \mathrm{d}t.$$

The term in the right-hand size of this equation is $l^2(\mathbb{N}^*)$, then, we can find such u thanks to the classical theory of moment problems – see [BL10]. For v, we impose $v_{|[\frac{1}{2},1]} = 0$ and we solve in $[0, \frac{1}{2}]$ the equations

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\frac{1}{2}} v(t) e^{i\omega_j t} \mathrm{d}t = -i \frac{\psi_j \mathbb{1}_{j \in J_2}}{\langle \mu_2 \varphi_1, \varphi_j \rangle}, \qquad \forall i \in [\![1, k]\!], \quad \int_0^1 v(t) t^i \mathrm{d}t = d_i i!.$$

In $[0, \frac{1}{2}]$, the family $\theta := \left((e^{i\omega_j \cdot})_{j \in \mathbb{Z}}, (\cdot^i)_{i \in [\![1,k]\!]} \right)$ is a Riesz basis of $L^2(0, \frac{1}{2})$ and we can find a such $v \in \overline{\mathrm{Span}(\theta)} \subset L^2(0, \frac{1}{2})$ thanks to the classical theory of moments. $\square$

Corollary E.0.4. *Let $T > 0$, $k, l \in \mathbb{N}^*$, $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}^*} \in h^3(\mathbb{N}^*)$ and $(d_i)_{i \in [\![1,k]\!]} \in \mathbb{R}^k$ be such that* (E.0.4) *holds and assume that $\langle \mu_2 \varphi_1, \varphi_1 \rangle \neq 0$. Then, there exists $u, v \in L^2(0,1)$ such that* (E.0.5) *and* (E.0.6) *are satisfied, with*

$$\forall i \in [\![1, l]\!], \quad u_i(1) = 0.$$

Proof. Note that,

$$\forall i \in [\![1, l]\!], \quad u_i(1) = \int_0^1 t^{i-1} u(t) \mathrm{d}t = 0.$$

We define

$$J_1 = \left\{ j \in \mathbb{N}^*, \ \langle \mu_1 \varphi_1, \varphi_j \rangle \geq \frac{C}{2j^3} \right\} \setminus \{1\}, \qquad J_2 = \left\{ j \in \mathbb{N}^*, \ \langle \mu_2 \varphi_1, \varphi_j \rangle \geq \frac{C}{2j^3} \right\} \cap J_1^c$$

such that $J_1 \sqcup J_2 = \mathbb{N}^*$. As before, we define $u_{|[0,\frac{1}{2}]} = 1$ and solve the moment problem in $[\frac{1}{2}, 1]$ with the boundary conditions (we use the fact that because $\langle \mu_2 \varphi_1, \varphi_1 \rangle \neq 0$ in order not to have an incompatibility in the system). Then, we solve the moment problem in v as before. $\square$

Abstract. In this appendix, we aim is to generalize the main Theorem 4.2.1 of Chapter 4 to the case of affine systems (1.1.1) with r controls.

The generalized result is the following one.

Theorem F.0.1. *Let $f_0, \cdots, f_r$ be analytic vector fields over $\mathbb{R}^d$ such that $f_0(0) = 0$. Let $k, m \in \mathbb{N}^*$. We define the integer*

$$\pi(k,m) := 1 + \left\lceil \frac{2k}{m} \right\rceil,$$

and the set

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_k^m := S_{[\![1,\pi(k,m)]\!]\setminus\{2\}}(X) \cup \left\{W_{j,l}^{\ell};\ \ell \in [\![1,r]\!], j \in [\![1,k-1]\!], l \in \mathbb{N}\right\}\\ \cup \left\{C_{j,l}^{\ell,L};\ \ell, L \in [\![1,r]\!] \text{ such that } \ell < L, j \in [\![0,2k-2]\!], l \in \mathbb{N}\right\}.\end{aligned}$$

If there exists a linear form $\mathbb{P}$ on $\mathbb{R}^d$ such that $\mathbb{P}|_{\mathcal{N}_k^m(f)(0)} \equiv 0$ and

$$q : a \in \mathbb{R}^d \mapsto \sum_{\ell=1}^{r} \mathbb{P}\left(f_{W_k^\ell}(0)\right)\frac{a_\ell^2}{2} + \sum_{1\leq \ell<L\leq r} \mathbb{P}\left(f_{C_{2k-1}^{\ell,L}}(0)\right) a_\ell a_L \text{ is a definite quadratic form on } \mathbb{R}^r \tag{$\star$}$$

then, for every $p \in [1,+\infty]$, the control-affine system (1.1.1) has a drift along the vector $sgn\left(\mathbb{P}\left(f_{W_k^1}(0)\right)\right)\sum_{\ell=1}^{r} f_{W_k^\ell}(0)$ parallel to $\mathcal{N}_k^m(f)(0)$ with strength $\|u_k\|_{L^2}^2$ as $(t, t^\alpha \|u\|_{W^{m,p}}) \to 0$, with $\alpha = \frac{\pi(k,m)-2k}{\pi(k,m)-1}$.

For, that, we adopt the same approach as the one described in Section 4.3.3. Note that this result can be generalized for system with asymmetric drifts. In the rest of this appendix, $k, m, r \in \mathbb{N}^*$ are fixed integers and we assume that there exists a linear form $\mathbb{P}$ such that $\mathbb{P}|_{\mathcal{N}_k^m(f)(0)} \equiv 0$ and $(\star)$ holds.

F.1 Dominant part of the logarithm

We use Corollary 7.1.10 to extract the main terms from the dynamics. This is the goal of the following statement.

Lemma F.1.1. *As* $(t, \|u\|_{L^1}) \to 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\mathcal{Z}_{\pi(k,m)}(t; f, u)(0) = \sum_{\ell=1}^{r} \mathbb{P}\left(f_{W_k^\ell}(0)\right)\xi_{W_k^\ell}(t,u) + \sum_{1\leq \ell < L \leq r} \mathbb{P}\left(f_{C_{2k-1}^{\ell,L}}(0)\right)\xi_{C_{2k-1}^{\ell,L}}(t,u) \\ +\mathcal{O}\left(t\|u_k\|_{L^2}^2 + \sum_{p\in[\![1,k]\!]}\sum_{\ell\in[\![1,r]\!]}|u_p^\ell(t)|^2\right).\end{aligned} \tag{F.1.1}$$

Proof. We apply Corollary 7.1.10 with $M = \pi(k,m)$, $\mathcal{N} = \mathcal{N}_k^m$, $L = \sigma = 2k+2$ and $r = \frac{r(r+1)}{2}$.

1. *Estimates on the main terms:* let $b \in \mathcal{B}_{[\![1,\pi(k,m)]\!]}$ be such that $b \notin \mathcal{N}_k^m \cup \left\{W_k^\ell;\ 1 \leq \ell \leq r\right\} \cup \left\{C_{2k-1}^{\ell,L};\ 1 \leq \ell < L \leq r\right\}$. Then, $n(b) = 2$ and
   (a) if $b \in \mathcal{B}_{2,bad}$, $b = W_{j,l}^\ell$ with $\ell \in [\![1,r]\!]$ and $j > k$ or ($j = k$ and $l \geq 1$). Consequently, $|b| \geq 2k+2$ and the estimate (7.1.5) with $p = 1$ and $j_0 = k$ gives (7.1.11) with $\Xi(t,u) = t\|u_k\|_{L^2}^2$,
   (b) if $b \in \mathcal{B}_{2,good}$, $b = C_{j,l}^{\ell,L}$ with $1 \leq \ell < L \leq r$ and $j > 2k-1$ or ($j = 2k-1$ and $l \geq 1$). Similarly, $|b| \geq 2k+2$ and the estimate (7.1.7) with $p = q = 2$ and $k' = k$ gives (7.1.11) with $\Xi(t,u) = t\|u_k\|_{L^2}^2$ as $k - 2 - \lfloor \frac{j}{2} \rfloor < 0$.
2. *Estimates of cross terms:* let $b_1 \geq \cdots \geq b_q \in \mathcal{B} \setminus \{X_0\}$ be such that $n(b_1) + \cdots + n(b_q) \leq \pi(k,m)$ and $\operatorname{supp}\mathcal{F}(b_1, \cdots, b_q) \not\subset \mathcal{N}_k^m$. For $i \in [\![1,q]\!]$,
   (a) if $b_i = M_p^\ell$ with $\ell \in [\![1,r]\!]$ and $p \in [\![0,k-1]\!]$, then by (1.6.14), $|\xi_{b_i}(t,u)| = \left|u_{p+1}^\ell(t)\right|$. Then, (7.1.12) is verified with $\Xi(t,u) = \sum_{\substack{p\in[\![1,k]\!],\\ \ell\in[\![1,r]\!]}} |u_p^\ell(t)|^2$, $\sigma_i = j+1$ and $\alpha_i = \frac{1}{2}$.
   (b) If $b_i = M_j^\ell$ with $\ell \in [\![1,r]\!]$ and $j \geq k$, $|b_i| \geq k+1$ and the estimate (7.1.3) with $j_0 = k$ and $p = 2$ gives

$$|\xi_{b_i}(t,u)| \leq \frac{(ct)^{|b_i|}}{|b_i|!}t^{-(k+1)}t^{\frac{1}{2}}\|u_k\|_{L^2} = \frac{(ct)^{|b_i|}}{|b_i|!}t^{-(k+1)}\left(t\|u_k\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

   We obtain (7.1.12) with $\sigma_i = k+1$ and $\alpha_i = \frac{1}{2}$.

   Since $\operatorname{supp}\mathcal{F}(b_1, \cdots, b_q) \not\subset \mathcal{N}_k^m$, one has $q = 2$ and $b_1, b_2 \in \mathcal{B}_1$. Then, as $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, we can apply Corollary 7.1.10 and we obtain the desired equality.

□

F.2 Algebraic relations

Lemma F.2.1 (A bracket relation)**.** *For all* $l \in [\![0,k-1]\!]$, *for all* $(\alpha_{p,\ell})_{\substack{p\in[\![0,l]\!],\\ \ell\in[\![1,r]\!]}} \in \mathbb{R}^{(l+1)\times r}$, *one considers the bracket*

$$B := \sum_{\substack{p\in[\![0,l]\!],\\ \ell\in[\![1,r]\!]}} \alpha_{p,\ell} M_p^\ell.$$

Then, the following expansion holds

$$\left[B0^{k-l-1}, B0^{k-l}\right] \in \sum_{\ell=1}^{r} \alpha_{l,\ell}^2 W_k^\ell + 2\sum_{1\leq\ell<L\leq r} \alpha_{l,\ell}\alpha_{l,L} C_{2k-1}^{\ell,L} + \mathcal{N}_k^m.$$

Proof. We compute in the quotient space $\mathcal{L}(X)/\{\mathrm{E}(b), b \in \mathrm{Br}(X),\ n(b) = 2,\ n_0(b) < 2k-1\}$. We note $\bar{a}$ the class of $a \in \mathcal{L}(X)$ in this quotient. Expending the bracket, one has

$$\left[B0^{k-l-1}, B0^{k-l}\right] = \sum_{\substack{p,p' \in [\![0,l]\!],\\ \ell,\ell' \in [\![1,r]\!]}} \alpha_{p,\ell}\alpha_{p',\ell'}[M^{\ell}_{p+k-l-1}, M^{\ell'}_{p'+k-l}].$$

We note that, for all $(\ell,\ell') \in [\![1,r]\!]^2$,

$$\forall p, p' \in [\![0,l]\!] \text{ such that } p+p' < 2l, \quad n_0\left(\left[M^{\ell}_{p+k-l-1}, M^{\ell'}_{p'+k-l}\right]\right) < 2k-1.$$

Using this remark,

$$\overline{[B0^{k-l-1}, B0^{k-l}]} = \sum_{\ell,\ell' \in [\![1,r]\!]} \alpha_{l,\ell}\alpha_{l,\ell'}\overline{[M^{\ell}_{k-1}, M^{\ell'}_{k}]}.$$

Finally, using the Jacobi's inequality

$$\overline{[B0^{k-l-1}, B0^{k-l}]} = \sum_{\ell=1}^{r} \alpha_{l,\ell}^2 \overline{W^{\ell}_k} + \sum_{1 \le \ell' < \ell \le r} \alpha_{l,\ell}\alpha_{l,\ell'}\overline{C^{\ell',\ell}_{2k-1}} + \sum_{1 \le \ell < \ell' \le r} \alpha_{l,\ell}\alpha_{l,\ell'}\left(\overline{C^{\ell,\ell'}_{2k-2,1}} + \overline{C^{\ell,\ell'}_{2k-1}}\right).$$

As $\mathcal{L}(X)$ is a graded Lie algebra, $\mathcal{B}_{2,2k-2} := \mathcal{B}_2 \cap \{\mathrm{E}(b);\ b \in \mathrm{Br}(X),\ n(b) = 2,\ n_0(b) < 2k-1\}$ generates all the elements $\mathrm{E}(b)$ with $n(b) = 2$ and $n_0(b) < 2k-1$. The elements of $\mathcal{B}_{2,2k-2}$ are in $\mathcal{N}^m_k$. Finally, as $C^{\ell,\ell'}_{2k-2,1} \in \mathcal{N}^m_k$, the desired result follows. □

Using this expansion result, we are now able to prove the following algebraic properties.

Lemma F.2.2. *Let* $\nu(k,m) := \left\lfloor \frac{\pi(k,m)}{2} \right\rfloor$. *Then,*

1. *the family* $\left(f_{M^{\ell}_p}(0);\ p \in [\![0,k-1]\!], \ell \in [\![1,r]\!]\right)$ *is linearly independent,*
2. *if* $\nu(k,m) \ge 2$, *Span* $\left(f_{M^{\ell}_p}(0);\ p \in [\![0,k-1]\!], \ell \in [\![1,r]\!]\right) \cap S_{[\![2,\nu(k,m)]\!]}(f)(0) = \{0\}$.

Proof. We prove the second point: assume by contradiction that there exist $(\alpha_{p,\ell})_{\substack{p \in [\![0,k-1]\!],\\ \ell \in [\![1,r]\!]}}$ not all zero and $B \in S_{[\![2,\nu(k,m)]\!]}(X)$ such that $f_{B_1}(0) = 0$, with

$$B_1 := \sum_{\substack{p \in [\![0,k-1]\!],\\ \ell \in [\![1,r]\!]}} \alpha_{p,\ell} M^{\ell}_p + B.$$

Let $K = \max\{p \in [\![0,k-1]\!];\ (\alpha_{p,\ell})_{\ell \in [\![1,r]\!]} \neq 0\}$. As $f_0(0) = 0$, $f_{B_2}(0) = 0$, with

$$B_2 := \left[B_1 0^{k-1-K}, B_1 0^{k-K}\right] \in \sum_{\ell=1}^{r} \alpha_{K,\ell}^2 W^{\ell}_k + 2\sum_{1 \le \ell < L \le r} \alpha_{K,\ell}\alpha_{K,L} C^{\ell,L}_{2k-1} + \mathcal{N}^m_k + S_{[\![3,2\nu(k,m)]\!]}(X),$$

the expansion is given by Lemma F.2.1 with $l = K$. As $\pi(k,m) \ge 2\nu(k,m)$ and $\nu(k,m) \ge 2$, one has $S_{[\![3,2\nu(k,m)]\!]}(X) \subseteq S_{[\![1,\pi(k,m)]\!] \setminus \{2\}}(X) \subseteq \mathcal{N}^m_k$. Thus, we obtain

$$\sum_{\ell=1}^{r} \alpha_{K,\ell}^2 \mathbb{P}\left(f_{W^{\ell}_k}(0)\right) + 2\sum_{1 \le \ell < L \le r} \alpha_{K,\ell}\alpha_{K,L}\mathbb{P}\left(f_{C^{\ell,L}_{2k-1}}(0)\right) = 0, \quad i.e. \quad q(\alpha_{K,1}, \cdots, \alpha_{K,r}) = 0.$$

Thus, using the hypothesis $(\star)$, one obtain $(\alpha_{K,\ell})_{\ell\in[\![1,r]\!]} = 0$. This is a contradiction. The same approach gives the proof of the first point with $B = 0$. □

F.3 Closed-loop estimates

Using the algebraic properties proved in the previous section, we are now able to estimate the boundary terms $(u_p^\ell(t))_{\substack{p\in[\![1,k]\!],\\ \ell\in[\![1,r]\!]}}$ that appear in the expansion (F.1.1).

Lemma F.3.1. *Let $\nu(k,m) := \left\lfloor \frac{\pi(k,m)}{2} \right\rfloor$. Then, as $(t, \|u\|_{L^1}) \to 0$,*

$$\sum_{\substack{p\in[\![1,k]\!],\\ \ell\in[\![1,r]\!]}} \left|u_p^\ell(t)\right| = \mathcal{O}\left(t^{\frac{1}{2}} \|u_k\|_{L^2} + \|u\|_{L^1}^{\nu(k,m)+1} + \|x(t;u)\|\right). \tag{F.3.1}$$

Proof. Let $p^* \in [\![0, k-1]\!]$ and $\ell^* \in [\![1,r]\!]$. By Lemma F.2.2, one can consider a linear form $\mathcal{P}$ such that $\mathcal{P}(f_{M_{p^*}^{\ell^*}}(0)) = 1$ and $\mathcal{P}_{|\mathcal{N}(f)(0)} \equiv 0$, with $\mathcal{N} := \mathcal{B}_{[\![2,\nu(k,m)]\!]} \cup \{M_p^\ell;\ p \in [\![0,k-1]\!], \ell \in [\![1,r]\!]\} \setminus \{M_{p^*}^{\ell^*}\}$. Now, we use Corollary 7.1.10 with $M = \nu(k,m)$, $L = k+1$, $r = 1$ and $\mathfrak{b}_1 = M_{p^*}^{\ell^*}$. Indeed, for all $b \in \mathcal{B}_{[\![1,\nu(k,m)]\!]}$ such that $b \notin \mathcal{N} \cup \{\mathfrak{b}_1\}$, necessarily, $n(b) = 1$ and $b = M_j^\ell$ for $j \geq k$ and $\ell \in [\![1,r]\!]$. Thus, estimate (7.1.3) with $j_0 = k$ and $p = 2$ gives

$$|\xi_b(t,u)| \leq \frac{(ct)^{|b|}}{|b|!} t^{-(k+1)} \left(t^{\frac{1}{2}} \|u_k\|_{L^2}\right).$$

Then, (7.1.11) holds with $\Xi(t,u) = t^{\frac{1}{2}} \|u_k\|_{L^2}$ and $\sigma = k+1$. Moreover, there is no cross terms. Then, Corollary 7.1.10 leads to the equality

$$\mathcal{P}\mathcal{Z}_{\nu(k,m)}(t;f,u)(0) = u_{p^*+1}^{\ell^*}(t) + \mathcal{O}\left(t^{\frac{1}{2}} \|u_k\|_{L^2}\right).$$

Using the Magnus formula given by Corollary 1.6.18 with $M = \nu(k,m)$, we finally get

$$\mathcal{P}x(t;u) = u_{p^*+1}^{\ell^*}(t) + \mathcal{O}\left(t^{\frac{1}{2}} \|u_k\|_{L^2} + \|u\|_{L^1}^{\nu(k,m)+1} + \|x(t;u)\|^{1+\frac{1}{\nu(k,m)}}\right).$$

We obtain the result. □

F.4 Proof of the drift

We can now use the Magnus-type representation formula given by Corollary 1.6.18, the expansion of $\mathbb{P}\mathcal{Z}_{\pi(k,m)}(t,f,u)(0)$ given by Lemma F.1.1, the estimate of Lemma F.3.1 and the interpolation inequality given by Lemma 7.2.6 to prove Theorem F.0.1.

Proof of Theorem F.0.1. Let $p \in [1,+\infty]$. We will write π instead of $\pi(k,m)$. The Magnus-type expansion formula given by Corollary 1.6.18 with $M = \pi$, the equalities (1.6.15) and (1.6.16) and (F.1.1) give, as $(t, \|u\|_{L^1}) \to 0$,

$$\mathbb{P}x(t;u) = \int_0^t q(u^1, \cdots, u^r)(t)\mathrm{d}t + \mathcal{O}\left(t\,\|u_k\|_{L^2}^2 + \sum_{\substack{p\in[\![1,k]\!],\\ \ell\in[\![1,r]\!]}} \left|u_p^\ell(t)\right| + \|u\|_{L^1}^{\pi+1} + \|x(t;u)\|^{1+\frac{1}{\pi}} \right). \tag{F.4.1}$$

Using in (F.4.1) the closed-loop estimates (F.3.1), the interpolation inequality (7.2.5) and the fact that $\|u\|_{L^1}^{2\nu+2} = \mathcal{O}\left(\|u\|_{L^1}^{\pi+1}\right)$ as $\|u\|_{L^1} \to 0$, we finally obtain

$$\mathbb{P}x(t;u) = \int_0^t q(u^1, \cdots, u^r)(t)\mathrm{d}t + \mathcal{O}\left(\left(t + t^{\pi-2k}\,\|u\|_{W^{m,p}}^{\pi-1}\right)\|u_k\|_{L^2}^2 + \|x(t;u)\|^{1+\frac{1}{\pi}}\right).$$

By definition, there exist $C, \rho > 0$ such that, for every $t \in (0,\rho)$, there exists $\eta > 0$ *s.t.* for every $u \in W^{m,p}((0,t),\mathbb{R})^r$ with $\|u\|_{W^{m,p}} \leq \eta$,

$$\left|\mathbb{P}x(t;u) - \int_0^t q(u^1, \cdots, u^r)(t)\mathrm{d}t\right| \leq C\left(\left(t + t^{\pi-2k}\,\|u\|_{W^{m,p}}^{\pi-1}\right)\|u_k\|_{L^2}^2 + \|x(t;u)\|^{1+\frac{1}{\pi}}\right). \tag{F.4.2}$$

Using the hypothesis $(\star)$, there exists $K > 0$ such that

$$\operatorname{sgn}\left(\mathbb{P}\left(f_{W_k^1}(0)\right)\right)\int_0^t q(u^1, \cdots, u^r)(t)\mathrm{d}t \geq K\,\|u_k\|_{L^2}^2. \tag{F.4.3}$$

Thus, for all $t \in \left(0, \min\left(\rho, \frac{K}{4C}\right)\right)$, $u \in W^{m,p}((0,t),\mathbb{R})$, with $\|u\|_{W^{m,p}} \leq \min\left(\eta, \left(t^{2k-\pi}\frac{K}{4C}\right)^{\frac{1}{\pi-1}}\right)$, the equalities (F.4.2) and (F.4.3) lead to

$$\operatorname{sgn}\left(\mathbb{P}\left(f_{W_k^1}(0)\right)\right)\mathbb{P}x(t;u) \geq \frac{K}{2}\,\|u\|_{L^2} - C\,\|x(t;u)\|^{1+\frac{1}{\pi}}.$$

Then, the system (1.1.1) has a drift along $\operatorname{sgn}\left(\mathbb{P}\left(f_{W_k^1}(0)\right)\right)\sum_{\ell=1}^r f_{W_k^\ell}(0)$ parallel to $\mathcal{N}_k^m(f)(0)$ with strength $\|u_k\|_{L^2}^2$ as $(t, t^\alpha\,\|u\|_{W^{m,p}}) \to 0$. This concludes the proof of Theorem F.0.1. $\square$

Bibliography

[AG93] Andrei Agrachev and Revaz Gamkrelidze, « Local controllability and semigroups of diffeomorphisms », *in*: *Acta Applicandae Mathematica* 32 (1993), pp. 1–57.

[Agr90] Andrei Agrachev, « Quadratic mappings in geometric control theory », *in*: *Journal of Mathematical Sciences* 51 (1990), pp. 2667–2734.

[BBM22] Karine Beauchard, Jérémy Le Borgne, and Frédéric Marbach, « Growth of structure constants of free Lie algebras relative to Hall bases », *in*: *Journal of Algebra* 612 (2022), pp. 281–378.

[BCC12] Nabile Boussaid, Marco Caponigro, and Thomas Chambrion, « Small time reachable set of bilinear quantum systems », *in*: *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* (2012), pp. 1083–1087.

[BCC20] Nabile Boussaïd, Marco Caponigro, and Thomas Chambrion, « Regular propagators of bilinear quantum systems », *in*: *Journal of Functional Analysis* 278 (2020), p. 108412.

[BCT14] Karine Beauchard, Jean-Michel Coron, and Holger Teismann, « Minimal time for the bilinear control of Schrödinger equations », *in*: *Systems and Control Letters* 71 (2014), pp. 1–6.

[BCT18] Karine Beauchard, Jean-Michel Coron, and Holger Teismann, « Minimal time for the approximate bilinear control of Schrödinger equations », *in*: *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 41 (2018), pp. 1831–1844.

[Bea05] Karine Beauchard, « Local controllability of a 1D Schrödinger equation », *in*: *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 84 (2005), pp. 851–956.

[BL10] Karine Beauchard and Camille Laurent, « Local controllability of 1D linear and nonlinear Schrödinger equations with bilinear control », *in*: *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 94 (2010), pp. 520–554.

[BLBM23] Karine Beauchard, Jérémy Le Borgne, and Frédéric Marbach, « On expansions for nonlinear systems Error estimates and convergence issues », *in*: *Comptes Rendus. Mathématique* 361 (2023), pp. 97–189.

[BLBS24] Ugo Boscain, Kévin Le Balc'h, and Mario Sigalotti, « Schrödinger eigenfunctions sharing the same modulus and applications to the control of quantum systems », *in*: *Mathematics of Control, Signals, and Systems* (2024), pp. 1–35.

[BM14] Karine Beauchard and Morgan Morancey, « Local controllability of 1D Schrödinger equations with bilinear control and minimal time », *in*: *Mathematical Control and Related Fields* 4 (2014), pp. 125–160.

[BM18] Karine Beauchard and Frédéric Marbach, « Quadratic obstructions to small-time local controllability for scalar-input systems », *in*: *Journal of Differential Equations* 264 (2018), pp. 3704–3774.

[BM20] Karine Beauchard and Frédéric Marbach, « Unexpected quadratic behaviors for the small-time local null controllability of scalar-input parabolic equations », *in*: *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 136 (2020), pp. 22–91.

[BM24] Karine Beauchard and Frédéric Marbach, « A unified approach of obstructions to small-time local controllability for scalar-input systems », *in*: *Journal of Dynamical and Control Systems, to appear* (2024), arXiv: 2205.14114.

[BMP25] Karine Beauchard, Frédéric Marbach, and Thomas Perrin, « An obstruction to small-time local controllability for a bilinear Schrödinger equation », (2025), arXiv: 2501.03882.

[BMS82] John M. Ball, Jerrold E. Marsden, and Marshall Slemrod, « Controllability for Distributed Bilinear Systems », *in*: *SIAM Journal on Control and Optimization* 20 (1982), pp. 575–597.

[Bos+12] Ugo Boscain, Marco Caponigro, Thomas Chambrion, and Mario Sigalotti, « A Weak Spectral Condition for the Controllability of the Bilinear Schrödinger Equation with Application to the Control of a Rotating Planar Molecule », *in*: *Communications in Mathematical Physics* 311 (2012), pp. 423–455.

[Bou23a] Mégane Bournissou, « Local controllability of the bilinear 1D Schrödinger equation with simultaneous estimates », *in*: *Mathematical Control and Related Fields* 13 (2023), pp. 1047–1080.

[Bou23b] Mégane Bournissou, « Quadratic behaviors of the 1D linear Schrödinger equation with bilinear control », *in*: *Journal of Differential Equations* 351 (2023), pp. 324–360.

[Bou24] Mégane Bournissou, « Small-time local controllability of the bilinear Schrödinger equation, despite a quadratic obstruction, thanks to a cubic term », *in*: *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* 30 (2024).

[BP24] Karine Beauchard and Eugenio Pozzoli, « An example of a small-time globally approximately controllable bilinear Schrödinger equation », *in*: *Annales de l'I.H.P., to appear* (2024), arXiv: 2407.05698.

[Bro13] Roger Brockett, « Controllability with quadratic drift », *in*: *Mathematical Control and Related Fields* 3 (2013), pp. 433–446.

[CC04] Jean-Michel Coron and Emmanuelle Crépeau, « Exact boundary controllability of a nonlinear KdV equation with critical lengths », *in*: *Journal of the European Mathematical Society* 006 (2004), pp. 367–398.

[CC09] Eduardo Cerpa and Emmanuelle Crépeau, « Boundary controllability for the nonlinear Korteweg-de Vries equation on any critical domain », *in*: *Annales de l'I.H.P. Analyse non linéaire* 26 (2009), pp. 457–475.

[Cer07] Eduardo Cerpa, « Exact Controllability of a Nonlinear Korteweg–de Vries Equation on a Critical Spatial Domain », *in*: *SIAM Journal on Control and Optimization* 46 (2007), pp. 877–899.

[Cer14] Eduardo Cerpa, « Control of a Korteweg-de Vries equation: A tutorial », *in*: *Mathematical Control and Related Fields* 4 (2014), pp. 45–99.

[Cha+08] Thomas Chambrion, Paolo Mason, Mario Sigalotti, and Ugo Boscain, « Controllability of the discrete-spectrum Schrödinger equation driven by an external field », *in*: *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis* 26 (2008), pp. 329–349.

[Che57] Kuo-Tsai Chen, « Integration of Paths, Geometric Invariants and a Generalized Baker- Hausdorff Formula », *in*: *Annals of Mathematics* 65 (1957), pp. 163–178.

[Cho41] Wei-Liang Chow, « Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung », *in*: *Mathematische Annalen* 117 (1941), pp. 98–105.

[CKN22] Jean-Michel Coron, Armand Koenig, and Hoai-Minh Nguyen, « On the small-time local controllability of a KdV system for critical lengths », *in*: *Journal of the European Mathematical Society* 26 (2022), pp. 1193–1253.

[Cor06] Jean-Michel Coron, « On the small-time local controllability of a quantum particle in a moving one-dimensional infinite square potential well », *in*: *Comptes Rendus Mathematique* 342 (2006), pp. 103–108.

[Cor07] Jean-Michel Coron, « Control and Nonlinearity », Mathematical Surveys and Monographs, vol. 136, (2007).

[CP23] Thomas Chambrion and Eugenio Pozzoli, « Small-time bilinear control of Schrödinger equations with application to rotating linear molecules », *in*: *Automatica* 153 (2023), p. 111028.

[CT19] Thomas Chambrion and Laurent Thomann, « A topological obstruction to the controllability of nonlinear wave equations with bilinear control term », *in*: *SIAM Journal on Control and Optimization* 57 (2019), pp. 2315–2327.

[Dio+99] Claude M. Dion, Arne Keller, Osman Atabek, and André D. Bandrauk, « Laser-induced alignment dynamics of HCN: Roles of the permanent dipole moment and the polarizability », *in*: *Phys. Rev. A* 59 (1999), pp. 1382–1391.

[DN21] Alessandro Duca and Vahagn Nersesyan, « Bilinear control and growth of Sobolev norms for the nonlinear Schrödinger equation », *in*: *Journal of the European Mathematical Society* (2021), pp. 1–20.

[DN25] Alessandro Duca and Vahagn Nersesyan, « Local exact controllability of the 1D nonlinear Schrödinger equation in the case of Dirichlet boundary conditions », *in*: *SIAM Journal on Control and Optimization* 63 (2025), S20–S36.

[DP24] Alessandro Duca and Eugenio Pozzoli, « Small-time controllability for the nonlinear Schrödinger equation on $\mathbb{R}^N$ via bilinear electromagnetic fields », *in*: *SIAM Journal on Control and Optimization* 63 (2024), S37–S52.

[EP09] Sylvain Ervedoza and Jean-Pierre Puel, « Approximate controllability for a system of Schrödinger equations modeling a single trapped ion », *in*: *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis* 26 (2009), pp. 2111–2136.

[Fli81] Michel Fliess, « Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives », *in*: *Bulletin de la Société Mathématique de France* 109 (1981), pp. 3–40.

[Gag59] Emilio Gagliardo, « Ulteriori proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabili », *in*: *Ric. Mat.* 8 (1959), pp. 24–51.

[Ghe24] Théo Gherdaoui, « Quadratic obstructions to small-time local controllability for multi-input systems », *in*: *Journal of Dynamical and Control Systems, Springer, to appear* (2024), arXiv: 2412.17384.

[Ghe25a] Théo Gherdaoui, « Quadratic obstructions to Small-Time Local Controllability for the multi-input bilinear Schrödinger equation », (2025), arXiv: 2502.14999.

[Ghe25b] Théo Gherdaoui, « Small-Time Local Controllability of the multi-input bilinear Schrödinger equation thanks to a quadratic term », *in*: *ESAIM: COCV* 31 (2025), p. 44.

[Gir+24] Giraldi, Laetitia, Lissy, Pierre, Moreau, Clément, and Pomet, Jean-Baptiste, « Necessary conditions for local controllability of a particular class of systems with two scalar controls », *in*: *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* 30 (2024).

[Her63] Robert Hermann, « On the Accessibility Problem in Control Theory », *in*: *International Symposium on Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics* (1963), pp. 325–332.

[Her82] Henry Hermes, « Control systems which generate decomposable Lie algebras », *in*: *Journal of Differential Equations* 44 (1982), pp. 166–187.

[HH87] Matthias Kawski Henry Hermes, « Local controllability of a single input, affine system », *in*: *Nonlinear Controllability and Optimal Control* 109 (1987), pp. 235–248.

[HK87] Henry Hermes and Matthias Kawski, « Local controllability of a single input, affine system », *in*: *Nonlinear analysis and application* (1987), pp. 235–248.

[HL02] R.M. Hirschorn and A.D. Lewis, « Geometric local controllability: second-order conditions », *in*: 1 (2002), pp. 368–369.

[ILT06] Reinhard Illner, Horst Lange, and Holger Teismann, « Limitations on the control of Schrödinger equations », *in*: *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* 12 (2006), pp. 615–635.

[Kaw00] Matthias Kawski, « High-Order Small-Time Local Controllability », *in*: *Nonlinear Controllability and Optimal Control* 133 (2000), pp. 431–467.

[Kre73] Arthur J. Krener, « On the Equivalence of Control Systems and the Linearization of Nonlinear Systems », *in*: *SIAM Journal on Control* 11 (1973), pp. 670–676.

[Kro87] Daniel Krob, « Codes limites et factorisations finies du monoïde libre », *in*: *RAIRO - Theoretical Informatics and Applications - Informatique Théorique et Applications* 21 (1987), pp. 437–467.

[Mar18] Frédéric Marbach, « An obstruction to small time local null controllability for a viscous Burgers' equation », *in*: *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* 51 (2018), pp. 1129–1177.

[MN13] Morgan Morancey and Vahagn Nersesyan, « Global exact controllability of a 1D Schrödinger equations with a polarizability term », *in*: *Comptes Rendus Mathematique* (2013), pp. 425–429.

[Mor14] Morgan Morancey, « Simultaneous local exact controllability of 1D bilinear Schrödinger equations », *in*: *Annales de l'I.H.P. Analyse non linéaire* 31 (2014), pp. 501–529.

[MS10] Paolo Mason and Mario Sigalotti, « Generic controllability properties for the bilinear Schrödinger equation », *in*: *Communications in Partial Differential Equations* 35 (2010), pp. 685–706.

[Nag66] Tadashi Nagano, « Linear differential systems with singularities and an application to transitive Lie algebras », *in*: *Journal of the Mathematical Society of Japan* 18 (1966), pp. 398 –404.

[Ner10] Vahagn Nersesyan, « Global approximate controllability for Schrödinger equation in higher Sobolev norms and applications », *in*: *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire* 27 (2010), pp. 901–915.

[Nir59] Louis Nirenberg, « On elliptic partial differential equations », *in*: *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Scienze Fisiche e Matematiche* Ser. 3, 13 (1959), pp. 115–162.

[NN12] Vahagn Nersesyan and Hayk Nersisyan, « Global exact controllability in infinite time of Schrödinger equation », *in*: *Journal de Mathématiques Pures et Appliqués* 97 (2012), pp. 295–317.

[NX25] Jingrui Niu and Shengquan Xiang, « Small-time local controllability of a KdV system for all critical lengths », (2025), arXiv: `2501.13640`.

[Ras38] Petr K. Rashevski, « About connecting two points of complete non-holonomic space by admissible curve », *in*: *Uch. Zapiski ped. inst. Libknexta* 2 (1938), pp. 83–94.

[Ros97] Lionel Rosier, « Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain », *in*: *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* 2 (1997), pp. 33–55.

[Ste86] Gianna Stefani, « On the local controllability of a scalar-input control system », *in*: *Theory and applications of nonlinear control systems (Stockholm, 1985)* (1986), pp. 167–179.

[Sus83] Héctor J. Sussmann, « Lie Brackets and Local Controllability: A Sufficient Condition for Scalar-Input Systems », *in*: *SIAM Journal on Control and Optimization* 21 (1983), pp. 686–713.

[Sus87] Héctor J. Sussmann, « A General Theorem on Local Controllability », *in*: *SIAM Journal on Control and Optimization* 25 (1987), pp. 158–194.

[Tur00] Gabriel Turinici, « On the controllability of bilinear quantum systems », *in*: *Mathematical models and methods for ab initio Quantum Chemistry* (2000), pp. 75–92.

COLLEGE DOCTORAL BRETAGNE | MATHS, TELECOMS INFORMATIQUE, SIGNAL SYSTEMES, ELECTRONIQUE

école normale supérieure rennes

Titre : Contrôle de systèmes non linéaires multi-commandés.

Mot clés : Théorie du contrôle, Équation de Schrödinger bilinéaire, EDO, système de dimension infinie, contrôlabilité locale exacte en temps petits, développement de Taylor.

Résumé : Cette thèse est consacrée à l'étude des relations entre la contrôlabilité exacte des EDP non linéaires et la théorie du contrôle des EDO basée sur les crochets de Lie. Notre analyse est centrée sur la contrôlabilité des systèmes affines en dimension finie et de l'équation de Schrödinger sur un intervalle borné, avec des conditions de bord de Dirichlet et des contrôles bilinéaires. On étudie plus précisément la contrôlabilité locale en temps petit (STLC) autour d'un équilibre lorsque le système linéarisé n'est pas contrôlable en examinant le rôle du terme quadratique du développement de la solution. Nos contributions reposent sur une nouvelle formule de représentation de l'état d'une EDO de type Magnus.

Dans un premier temps, on utilise cette formule et la présence de deux contrôles pour récupérer les directions perdues au linéaire grâce au terme quadratique. On redémontre ainsi un cas particulier de la condition suffisante $\mathcal{S}(\theta)$ de STLC avec une preuve plus adaptée aux EDP. Nous présentons ensuite un cadre fonctionnel permettant d'observer ce phénomène sur l'équation de Schrödinger.

Dans un second temps, on montre un résultat d'obstruction à la contrôlabilité sur des systèmes affines à plusieurs contrôles. Sous des hypothèses favorables, on montre que le terme quadratique crée une dérive quantifiée en norme H^{-k} des contrôles, empêchant la H^{2k}-STLC, avec $k \in \mathbb{N}^*$. L'adaptation de ce phénomène (raffiné) à l'équation de Schrödinger constitue une troisième partie.

Title: Control of multi-control nonlinear systems

Keywords: Control theory, bilinear Schrödinger equation, ODEs, infinite-dimensional systems, small-time local exact controllability, power series expansion.

Abstract: This thesis investigates the relationship between exact controllability of nonlinear PDEs and control theory of ODEs *via* Lie brackets. The analysis focuses on affine systems in finite dimensions and the Schrödinger equation with Dirichlet boundary conditions and bilinear controls. It specifically addresses small-time local controllability (STLC) around an equilibrium, examining the role of the quadratic term in the solution when the linearized system is not controllable. The contributions are based on a new Magnus-type representation formula for the state of ODEs.

In the first part, this formula and the use of two controls recover lost directions through the quadratic term. Actually, we reprove a particular case of the sufficient condition $\mathcal{S}(\theta)$ of STLC with a proof designed for PDEs. We then give a functional framework to observe this phenomenon on the Schrödinger equation.

In the second part, an obstruction result to STLC is shown for multi-input control-affine systems. Under appropriate assumptions, the quadratic term induces a drift quantified in the H^{-k} norm of the controls, preventing H^{2k}-STLC, with $k \in \mathbb{N}^*$. The third part adapts this phenomenon to the Schrödinger equation.