

E.N.S. DE RENNES
U.F.R. DE MATHÉMATIQUES DE RENNES

STAGE DE M2

**Un résultat positif de contrôlabilité en temps
petit d'un système non linéaire à deux
contrôles**

Théo GHERDAOUI

Encadré par : Frédéric MARBACH

Année scolaire 2021-2022

Sommaire

1	Systèmes linéaires de dimension finie	3
1.1	Contexte et définitions	3
1.2	Théorème de Kalman	3
1.3	Forme normale de Brunovsky	5
2	Test linéaire	7
2.1	Contexte et définitions	7
2.2	Théorème du test linéaire	8
3	Systèmes affines	9
3.1	Définitions	9
3.2	Introduction aux crochets de Lie : motivations	9
3.3	Quelques résultats sur les systèmes affines	10
3.3.1	Quelques éléments sur les crochets de Lie	10
3.3.2	Une condition nécessaire de contrôlabilité	11
3.3.3	Retour sur le cas des systèmes linéaires à coefficients constants	12
3.3.4	Cas des systèmes affines sans drift	12
3.3.5	Retour sur la décomposition de Brunovsky	13
4	Éléments d'algèbre	13
4.1	Premières définitions	14
4.2	Bases de Hall	15
4.2.1	Définitions	15
4.2.2	Une application	15
4.3	Formules de Magnus, Sussmann, coordonnées de premières et de secondes espèces	16
4.3.1	Équations formelles et formule de Magnus	16
4.3.2	Formule de Sussmann	17
4.3.3	Évaluation selon un champ de vecteurs	19
5	Problème de moments	20
6	Vers un nouveau résultat	25

Introduction

Ce document a pour but de synthétiser l'étude que j'ai menée dans le cadre de mon stage de M2. L'objectif final est d'établir un résultat positif de contrôlabilité d'un système affine, quadratique à deux contrôles.

En première approche, on peut penser la contrôlabilité comme la question de la possibilité d'ajuster un paramètre d'une équation différentielle ordinaire ou d'une équation aux dérivées partielles, permettant à la solution de cette dernière d'atteindre une cible préalablement définie.

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser au cas des systèmes linéaires, en dimension finie. C'est un cadre simple, totalement compris, des conditions nécessaires et suffisantes sont connues et établies rapidement dans ce rapport. Dans un deuxième temps, nous évoquerons rapidement le test linéaire, qui permet dans certaines situations de déduire à partir des informations du linéarisé d'un système, des informations sur ce dernier. Dans une troisième partie, nous centrerons notre étude sur la question de la contrôlabilité des systèmes affines. Modulo la régularité du contrôle, on peut ramener l'étude d'un système quelconque de dimension finie à un système affine. C'est donc un cadre particulièrement important. Quelques conditions nécessaires et quelques conditions suffisantes sont connues. On s'attardera à évoquer le cas particulier des systèmes sans drift, totalement compris. Dans la partie quatre, nous nous intéresserons à une formule de représentation approchée de la solution d'une équation sous la forme d'une série de crochets formels, ce qui nous sera utile pour la suite. Dans la cinquième partie, nous présenterons la résolution d'un problème de moments. Enfin, dans la dernière partie, nous présenterons les ébauches d'un théorème sur lequel nous travaillons actuellement. Il s'agit d'un théorème déjà connu, dont la preuve est nouvelle, et est à l'heure actuelle, à figoler.

Enfin, je tiens tout particulièrement à remercier Frédéric Marbach qui s'est montré très disponible, investi, et qui a su m'accorder du temps, dans la bonne humeur. J'ai le plaisir de continuer en thèse avec Karine Beauchard et lui-même; ce n'est que le début d'une aventure!

1 Systèmes linéaires de dimension finie

1.1 Contexte et définitions

Soit $T_0 < T_1$, et $n, m \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse ici à la contrôlabilité de systèmes linéaires sous la forme :

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \text{ pour } t \in (T_0, T_1) \\ x(T_0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

où $A \in L^\infty((T_0, T_1), \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, $B \in L^\infty((T_0, T_1), \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}))$, et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. La variable x est appelé l'état du système, et la variable u le **contrôle**, dans $L^2((T_0, T_1), \mathbb{R}^m)$.

On travaille ici avec une notion de solution douce. Plus précisément :

Définition 1 (*Solutions*)

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $a \in L^\infty((T_0, T_1), \mathbb{R}^n)$, et $b \in L^1((T_0, T_1), \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. Alors, $x : [T_0, T_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une solution du système :

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \text{ pour } t \in (T_0, T_1) \\ x(T_0) = x_0 \end{cases} \quad (2)$$

si $x \in C^0([T_0, T_1], \mathbb{R}^n)$, et,

$$\forall t \in [T_0, T_1], \quad x(t) = x_0 + \int_{T_0}^t (a(s)x(s) + b(s)) ds.$$

Une variante du théorème de Cauchy-Lipschitz (défaut de continuité en temps) assure l'existence et l'unicité de la solution globale du système linéaire (2) proposé précédemment.

On formalise maintenant la notion de contrôlabilité :

Définition 2 (*Contrôlabilité*)

Le système (1) est dit **contrôlable** entre T_0 et T_1 sur \mathbb{R}^n si pour tout $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe $u \in L^2((T_0, T_1), \mathbb{R}^m)$ telle que la solution x de (1) vérifie $x(T_1) = x_1$.

Remarque 1. On appelle x_1 l'état cible.

1.2 Théorème de Kalman

Rappel. Pour $A \in L^\infty((T_0, T_1), \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, la résolvante du système différentiel $x'(t) = A(t)x(t)$ est l'application $R_A : (t_1, t_2) \in [T_0, T_1]^2 \mapsto R_A(t_1, t_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, vérifiant : $\forall t_2 \in [T_0, T_1]$, $R_A(\cdot, t_2)$ est la solution de $M'(t) = A(t)M(t)$ avec la condition initiale $M(t_2) = I_n$.

On introduit la matrice **grammienne** du système. Elle jouera un rôle fondamental dans l'étude de la contrôlabilité du système :

Définition 3 (*Matrice grammienne*)

On appelle matrice grammienne associée au système (1), la matrice :

$$\mathfrak{G} = \int_{T_0}^{T_1} R_A(T_1, s)B(s)^t B(s)^t R_A(T_1, s) ds,$$

où $R_A(\cdot, \cdot)$ est la résolvante du système (1).

Remarque 2. La formule de Duhamel fournit l'expression de la solution de (1) :

$$\forall t \in [T_0, T_1], \quad x(t) = R_A(t, T_0)x_0 + \int_{T_0}^t R_A(t, s)B(s)u(s)ds.$$

Ainsi, le système est contrôlable ssi $F_{T_0, T_1} : \left[\begin{array}{ccc} L^2((T_0, T_1), \mathbb{R}^m) & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ u & \mapsto & \int_{T_0}^{T_1} R_A(T_1, s)B(s)u(s)ds \end{array} \right]$ est surjective. Un calcul direct montre que $F_{T_0, T_1}^* : \left[\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \rightarrow & L^2((T_0, T_1), \mathbb{R}^m) \\ y & \mapsto & {}^t B^t R_A(T_1, \cdot) \end{array} \right]$. Dans un cadre hilbertien, une application linéaire continue $L : (H_1, \|\cdot\|_1) \rightarrow (H_2, \|\cdot\|_2)$ est surjective ssi son adjoint vérifie : $\exists C > 0, \forall x \in H_2, C \|x\|_2 \leq \|L^*(x)\|_1$ (voir [7]). Or, $\forall y \in \mathbb{R}^n, \|F_{T_0, T_1}^*(y)\|_{L^2}^2 = {}^t y \mathfrak{S} y$. Ceci justifie l'introduction de la matrice grammienne.

Remarque 3. $\forall x \in \mathbb{R}^n, {}^t x \mathfrak{S} x = \int_{T_0}^{T_1} |{}^t B(s) R(T_1, s)x|^2 ds$, donc $\mathfrak{S} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Theorème 1

Soient $T_0 < T_1, n, m \in \mathbb{N}^*, A \in L^\infty((T_0, T_1), \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $B \in L^\infty((T_0, T_1), \mathcal{M}_{n, m}(\mathbb{R}))$. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) Le système (1) est contrôlable entre T_0 et T_1 sur \mathbb{R}^n .
- (2) La matrice grammienne est inversible.

Démonstration : Si le système est contrôlable entre T_0 et T_1 sur $\mathbb{R}^n, F_{T_0, T_1}$ est surjective, donc il existe $C > 0$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}^n, {}^t y \mathfrak{S} y \geq C \|y\|^2$, donc $\mathfrak{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$. Réciproquement, si $\mathfrak{S} \in GL_n(\mathbb{R})$, par la remarque 3, $\mathfrak{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, ainsi, $C = \min_{\lambda \in \sigma(\mathfrak{S})} \lambda > 0$ convient, et montre que F_{T_0, T_1} est surjective, i.e. que le système est contrôlable entre T_0 et T_1 sur \mathbb{R}^n . ■

Le théorème suivant fournit une caractérisation algébrique plus maniable dans le cas où le système est à coefficients constants :

Theorème 2 (de Kalman)

Soient $T_0 < T_1, n, m \in \mathbb{N}^*, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n, m}(\mathbb{R})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) Le système (1) est contrôlable entre T_0 et T_1 sur \mathbb{R}^n .
- (2) $\text{Vect}(A^i B u, i \in \{0, \dots, n-1\}, u \in \mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n$.

Remarques. 1. la condition est appelée condition de Kalman.

2. on déduit de (2) que la contrôlabilité d'un système linéaire à coefficients constants ne dépend pas de l'intervalle de temps.

Démonstration : Remarquons premièrement que dans le cas des systèmes linéaires à coefficients constants, $R_A(t, s) = e^{A(t-s)}$.

(2) \Rightarrow (1) : on raisonne par contraposée. Soit $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $\mathfrak{S} y = 0$. Alors ${}^t y \mathfrak{S} y = 0$, donc $k(t) = {}^t y e^{A(T_1-t)} B$ est nulle sur $[T_0, T_1]$. Donc, pour $l \in \mathbb{N}, (-1)^l k^{(l)}(T_1) = {}^t y A^l B = 0$. La condition de Kalman n'est pas vérifiée, puisque y est dans l'orthogonal du sous-espace vectoriel en question.

(1) \Rightarrow (2) : on raisonne à nouveau par contraposée. Soit $y \in \text{Vect}(A^i B u, i \in \{0, \dots, n-1\}, u \in \mathbb{R}^m)^\perp$, non nul, on montre que l'on peut remonter les calculs précédents, pour cela, on utilise le théorème de Cayley-Hamilton et l'analyticité de k . ■

1.3 Forme normale de Brunovsky

On se place toujours dans le cas des systèmes linéaires à coefficients constants en dimension finie, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et l'équation différentielle :

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3)$$

Theorème 3 (Forme normale de Brunovsky)

Si le système (3) est contrôlable, et si B est de rang m , alors il existe $M \in GL_n(\mathbb{R})$, $K \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, et $N \in GL_m(\mathbb{R})$ telles que les variables $z = Mx$ et $v = N^{-1}(u - Kz)$ vérifient :

$$z = (y_1, y_1', \dots, y_1^{(\alpha_1-1)}, \dots, y_m, y_m', \dots, y_m^{(\alpha_m-1)}),$$

et

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, y_i^{(\alpha_i)} = v_i.$$

Matriciellement, l'équation (3) se reformule dans les variables (z, v) en :

$$z'(t) = \begin{pmatrix} J_{\alpha_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{\alpha_2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{\alpha_m} \end{pmatrix} z(t) + \begin{pmatrix} g_{\alpha_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{\alpha_2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & g_{\alpha_m} \end{pmatrix} v(t), \quad (4)$$

où

$$J_{\alpha_i} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\alpha_i}(\mathbb{R}) \text{ et } g_{\alpha_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\alpha_i,1}(\mathbb{R}),$$

$$\text{et } \sum_{i=1}^m \alpha_i = n.$$

Remarque 4. Ce théorème permet de ramener, modulo un changement d'état, l'étude d'un système contrôlable à celle d'un système diagonal par blocs, avec les blocs constitués de systèmes intégrateurs, c'est-à-dire de la forme :

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_p' = v \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} x_1' = v_{p-1} \\ x_2' = v_{p-2} \\ \vdots \\ x_p' = v \end{cases},$$

où v_i désigne la $i^{\text{ième}}$ primitive de v . L'état intègre successivement le contrôle de l'équation. C'est un exemple de système plat. Le problème de moments est alors reformulé en la recherche d'une fonction dont on a prescrit les conditions au bord ainsi que celles de ses dérivées.

Démonstration : Première étape : on effectue une manipulation par blocs sur les matrices qui va permettre de se ramener à des dimensions inférieures, afin de raisonner ensuite par récurrence.

Par hypothèse, $rg(B) = m$ donc on peut partitionner l'état $x(t) \in \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{n-m} \oplus \mathbb{R}^m$, on note alors $x = (x_r, x_u)$. Écrivons (3) par blocs sous la forme $A = \begin{pmatrix} A_{rr} & A_{ru} \\ A_{ur} & A_{uu} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B_r \\ B_u \end{pmatrix}$ avec $A_{rr} \in \mathcal{M}_{n-m}(\mathbb{R})$, $A_{ru} \in \mathcal{M}_{n-m,m}(\mathbb{R})$, $A_{ur} \in \mathcal{M}_{m,n-m}(\mathbb{R})$, $A_{uu} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, $B_r \in \mathcal{M}_{n-m,m}(\mathbb{R})$ et $B_u \in Gl_m(\mathbb{R})$.

$$\text{Ainsi, (3)} \Leftrightarrow \begin{cases} x_r' &= A_{r,r}x_r + A_{r,u}x_u + B_ru \\ x_u' &= A_{u,r}x_r + A_{u,u}x_u + B_uu \end{cases}.$$

On obtient

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (x_r - B_r B_u^{-1} x_u) &= (A_{rr} - B_r B_u^{-1} A_{ur}) x_r + (A_{ru} - B_r B_u^{-1} A_{uu}) x_u \\ x_u' &= A_{ur} x_r + A_{uu} x_u + B_u u \end{cases}.$$

Ainsi, en notant $\tilde{x}_r = x_r - B_r B_u^{-1} x_u$, $\tilde{x}_u = x_u$, $\tilde{u} = A_{ur} x_r + A_{uu} x_u + B_u u$, $\tilde{A}_r = A_{rr} - B_r B_u^{-1} A_{ur}$ et $\tilde{A}_u = (A_{rr} - B_r B_u^{-1} A_{ur}) B_r B_u^{-1} + (A_{ru} - B_r B_u^{-1} A_{uu})$, on obtient :

$$\begin{cases} \tilde{x}_r' &= \tilde{A}_r \tilde{x}_r + \tilde{A}_u \tilde{x}_u \\ \tilde{x}_u' &= \tilde{u} \end{cases}.$$

On interprète la première ligne de système comme un nouveau système différentiel du type (3) ayant pour état \tilde{x}_r de taille $n - m < n$ et le contrôle \tilde{x}_u de taille m . Ceci permet de raisonner par récurrence sur $n \geq 1$.

Deuxième étape : mise en forme de la récurrence : le résultat est acquis au rang $n = 1$. On suppose que le résultat est vrai pour toutes les dimensions d'état inférieure ou égale à $n - 1$. Considérons le système (3). L'étape décrite précédemment permet de se ramener au système :

$$\begin{cases} x_r' &= A_r x_r + A_u x_u \\ x_u' &= u \end{cases},$$

avec $A_r \in \mathcal{M}_{n-m}(\mathbb{R})$ et $A_u \in \mathcal{M}_{n-m,m}(\mathbb{R})$, d'état $x_r \in \mathbb{R}^{n-m}$ et de contrôle $x_u \in \mathbb{R}^m$.

On montre par un calcul par blocs que $(A_u, A_r A_u, \dots, A_r^{n-m-1} A_u)$ est de rang $n - m < n$. Afin d'appliquer l'hypothèse de récurrence, il faut que le rang de A_u soit plein, ce qui n'est pas forcément le cas. Ceci nous conduit à effectuer la manipulation suivante : en note $\bar{m} = rg(A_u)$, et $\bar{m} \leq m$, on peut effectuer la même manipulation que précédemment ($\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{\bar{m}} \oplus \mathbb{R}^{m-\bar{m}}$) pour obtenir le système :

$$\begin{cases} x_r' &= A_r x_r + \bar{A}_u \bar{x}_u \\ \bar{x}_u' &= \bar{u} \\ \tilde{x}_u' &= \tilde{u} \end{cases},$$

avec $Px_u = (\bar{x}_u, \tilde{x}_u)$, où P est inversible, $(\bar{u}, \tilde{u}) = Pu$, $\bar{u} \in \mathbb{R}^{\bar{m}}$ et \bar{A}_u est de rang \bar{m} . Ainsi, l'hypothèse de récurrence s'applique : on peut trouver $M \in Gl_{n-m}(\mathbb{R})$, $K \in \mathcal{M}_{\bar{m},n-m}(\mathbb{R})$ et $N \in Gl_{\bar{m}}(\mathbb{R})$ telles que la première ligne du système soit mise sous forme de Brunovsky en les variables (z, \bar{v}) définies par $z = Mx_r$ et $\bar{v} = N^{-1}(\bar{x}_u - Kz)$.

Introduisons enfin le changement d'état

$$\begin{pmatrix} x_r \\ \bar{x}_u \\ \tilde{x}_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^{-1} & 0 & 0 \\ K & N & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{v} \\ \tilde{x}_u \end{pmatrix},$$

$$\bar{u} = KM^{-1} (A_r x_r + \bar{A}_u \bar{x}_u) + N\bar{v}.$$

Le contrôle (\bar{v}, \tilde{u}) permet de conclure. ■

2 Test linéaire

2.1 Contexte et définitions

Soit $T > 0, n, m \in \mathbb{N}^*$, et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. On considère le système :

$$x'(t) = f(x(t), u(t)) \quad (5)$$

où $u \in L^\infty((0, T), \mathbb{R}^m)$ est le contrôle du système.

Définition 4 (*Trajectoire*)

On appelle trajectoire de l'équation différentielle (5), la donnée de $(x, u) \in \mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{R}^n) \times L^\infty((0, T), \mathbb{R}^m)$ vérifiant pour tout $(t_1, t_2) \in [0, T]^2$,

$$x(t_2) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(x(s), u(s)) ds.$$

Lemme 1 (*Unicité*)

Soit $T > 0, u \in L^\infty((0, T), \mathbb{R}^m)$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors, il existe au plus une fonction $x \in \mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{R}^n)$ telle que (x, u) soit une trajectoire de (5) vérifiant $x(0) = x_0$.

Démonstration : Soit x, y deux telles fonctions. Alors, pour tout $t \in [0, T]$, on a :

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|\partial_1 f\|_\infty^K \int_0^t \|x(s) - y(s)\| ds,$$

où $K = \overline{B_{\mathbb{R}^n}(0, \max(\|x\|_\infty^{[0, T]}, \|y\|_\infty^{[0, T]})} \times \overline{B_{\mathbb{R}^m}(0, \|u\|_\infty^{[0, T]}}$. Le lemme de Gronwall conclut. ■

Lemme 2 (*Existence*)

Soit $T > 0, u \in L^\infty((0, T), \mathbb{R}^m)$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$, alors, il existe $0 < T' \leq T$ et $x \in \mathcal{C}^0([0, T'], \mathbb{R}^n)$ telle que (x, u) est une trajectoire de l'équation différentielle (5) avec la donnée initiale $x(0) = x_0$.

Démonstration : Soit $r > 0$, et $M_r := \sup \left\{ |f(x, v)|, x \in \overline{B_{\mathbb{R}^n}(x_0, r)}, v \in \overline{B_{\mathbb{R}^m}(0, \|u\|_\infty^{[0, T]}} \right\}$. On définit $T_r = r/M_r$ et $X_r = \left\{ x \in \mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{R}^n), x(0) = x_0, \forall t \in [0, T], x(t) \in \overline{B_{\mathbb{R}^n}(x_0, r)} \right\}$. On définit enfin :

$$\theta : x \in X_r \mapsto \left(t \mapsto x_0 + \int_0^t f(x(s), u(s)) ds \right) \in X_r.$$

On montre que θ est bien définie, $\theta(X_r) \subset X_r$, puis que : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall (x, y) \in X_r^2, \forall t \in [0, T]$,

$$\|\theta^k(x)(t) - \theta^k(y)(t)\| \leq \frac{\alpha^k}{k!} t^k \|x - y\|_\infty^{[0, T]},$$

où $\alpha = \sup \left\{ \|Df(x, v)\|, x \in \overline{B_{\mathbb{R}^n}(x_0, r)}, v \in \overline{B_{\mathbb{R}^m}(0, \|u\|_\infty^{[0, T]}} \right\}$. On conclut à l'aide du théorème du point fixe de Banach. ■

Les deux lemmes précédents permettent d'affirmer l'existence et l'unicité locale d'une trajectoire passant par un point donné. On définit maintenant la contrôlabilité locale autour d'une trajectoire :

Définition 5 (*Small Time Locally Controllable (STLC)*)

Soit $T > 0$ et (\bar{x}, \bar{u}) une trajectoire de (5) sur $[0, T]$. On dit que le système (5) est localement contrôlable autour de (\bar{x}, \bar{u}) si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x_0, x_1)$ vérifiant $\|x_0 - \bar{x}(0)\| \leq$

$\delta, \|x_1 - \bar{x}(T)\| \leq \delta$, il existe une trajectoire sur $[0, T]$ telle que $x(0) = x_0, x(T) = x_1$ et $\forall t \in [0, T], \|u(t) - \bar{u}(t)\| \leq \varepsilon$.

Remarque 5. Lorsque (x_e, u_e) est un point d'équilibre du système, i.e. $f(x_e, u_e) = 0$, on définit la contrôlabilité autour d'un point d'équilibre comme la contrôlabilité autour de la trajectoire constante (x_e, u_e) .

2.2 Théorème du test linéaire

Theorème 4 (*Test linéaire*)

Soit $T > 0$ et (\bar{x}, \bar{u}) une trajectoire de (5) sur $[0, T]$. Si le système linéaire :

$$y'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(t), \bar{u}(t))y(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}(t), \bar{u}(t))v(t) \quad (6)$$

est contrôlable (sur $[0, T]$), alors le système (5) est localement contrôlable autour de (\bar{x}, \bar{u}) .

Exemple 1. Soit $(\bar{x}, \bar{u}) : t \in [0, 2\pi] \mapsto \left(\begin{pmatrix} \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \\ t \end{pmatrix}, 1 \right)$. Le système $\begin{cases} x'_1 = \cos(x_3) \\ x'_2 = \sin(x_3) \\ x'_3 = u \end{cases}$ est-il contrôlable sur $[0, 2\pi]$ autour de la trajectoire (\bar{x}, \bar{u}) ?

Le système est équivalent à $x'(t) = f(x(t), u(t))$ où $f : (x, u) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(x_3) \\ \sin(x_3) \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On

remarque que $A(t) := \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin(t) \\ 0 & 0 & \cos(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B := \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Puisque

A dépend du temps, on ne peut pas utiliser le théorème de Kalman ; calculons la grammienne du système, $\mathfrak{S} = \int_0^{2\pi} R_A(2\pi, s)B^t B^t R_A(2\pi, s)ds$. Puisque, pour tout t, s , $A(t)A(s) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} =$

$A(s)A(t)$, la résolvante $R_A(2\pi, t) = \exp\left(\int_t^{2\pi} A(s)ds\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 - \cos(t) \\ 0 & 1 & -\sin(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ après calculs. Ainsi

$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \pi$, de déterminant valant $2\pi^3 \neq 0$. On conclut à la contrôlabilité du système linéarisé, puis à la contrôlabilité locale par test linéaire.

Remarque 6. La condition de contrôlabilité du système linéarisé n'est pas nécessaire. En effet, le système $\begin{cases} x'_1 = u \\ x'_2 = x_1^3 \end{cases}$ est localement contrôlable autour de l'équilibre $(0, 0)$ mais son linéarisé ne

l'est pas. Le système est équivalent à $x'(t) = f(x(t), u(t))$ où $f : (x, u) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ x_1^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, et

$A := \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$, $B := \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La condition de Kalman n'est pas remplie.

Démonstration (Idées) : On pose $\mathcal{F} : (a, u) \in \mathbb{R}^n \times L^\infty((0, T), \mathbb{R}^m) \mapsto (a, x(T)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, où x est la solution associée au contrôle u , et à la condition initiale a . On montre à l'aide du critère d'explosion en temps fini que \mathcal{F} est bien définie sur un voisinage de $(\bar{x}(0), \bar{u})$. On montre enfin que \mathcal{F} est différentiable en $(\bar{x}(0), \bar{u})$ puis que $d\mathcal{F}(\bar{x}(0), \bar{u})(p, v) = (p, y(T))$, où y est la solution de (6) avec la condition initiale $y(0) = p$. L'énoncé assure la surjectivité de la différentielle. On conclut par application du théorème d'inversion locale. ■

3 Systèmes affines

3.1 Définitions

On va désormais centrer notre étude sur le cas des systèmes affines.

Définition 6 (Systèmes affines)

On appelle système affine tout système de la forme

$$x'(t) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(x), \quad (7)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état, et $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$, le contrôle.

On appelle **drift** le terme f_0 .

Remarquons premièrement que si $x' = f(x, u)$ est un système différentiel, alors $y := \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$ vérifie $y' = \begin{pmatrix} f(y) \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(y) \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^m v_i \begin{pmatrix} 0_n \\ (\delta_{i,j})_{1 \leq j \leq m} \end{pmatrix}$ en posant $v := u'$. On a donc, transformé un système différentiel quelconque en un système affine sur $\mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{R}^m$, modulo la régularité du contrôle. On ne perd donc pas en généralité en se focalisant sur les systèmes affines.

3.2 Introduction aux crochets de Lie : motivations

Afin de caractériser la contrôlabilité, on introduit la notion de crochet de Lie.

Définition 7 (Crochet de Lie)

Soit Ω un ouvert non vide de \mathbb{R}^n , et $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux champs de vecteurs \mathcal{C}^1 . On définit le crochet de Lie de X, Y , noté $[X, Y]$ comme valant :

$$[X, Y] : x \in \Omega \mapsto DY(x)(X(x)) - DX(x)(Y(x)) \in \mathbb{R}^n.$$

$[X, Y] \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Remarque 7. Si $X : x \in \mathbb{R}^n \mapsto Ax \in \mathbb{R}^n$ et $Y : x \in \mathbb{R}^n \mapsto Bx \in \mathbb{R}^n$ où $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $[X, Y](x) = (BA - AB)x$ correspond à un commutateur.

Voici quelques motivations qui justifient l'introduction des crochets de Lie : (voir [3])

- On cherche à lire la contrôlabilité d'une équation sur l'expression de sa solution. On sait que si $x'(t) = A(t)x(t)$ avec A vérifiant pour tout t, s , $A(t)A(s) = A(s)A(t)$, alors la solution est donnée par $x(t) = \exp\left(\int_0^t A(s)ds\right)x(0)$. Sinon, le manque de commutativité empêche d'obtenir une expression simple de la solution. Il est donc naturel d'introduire un outil mesurant le défaut de commutativité, à savoir les crochets de Lie. On verra de plus que la formule de Magnus fournit une formule de représentation approchée de la solution selon les crochets de Lie.

- Les crochets de Lie sont des mouvements naturels ; en effet : dans le cas d'un système affine **sans dérive** :

$$x' = u_1 f_1(x) + u_2 f_2(x), \quad x(0) = 0 \quad (8)$$

(prenons $m = 2$ pour simplifier les calculs), montrons qu'on peut bouger selon la direction $\pm[f_1, f_2](0)$.

Lemme 3

Soit $\eta \in \mathbb{R}$. Supposons que $\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \end{pmatrix}$, alors la solution x de (8) vérifie :

$$x(t) = x(0) + \eta f_1(x(0))t + \frac{t^2}{2} \eta^2 df_1(x(0))(f_1(x(0))) + \mathcal{O}_0(t^3).$$

Démonstration : On a $x(t) = x(0) + \eta \int_0^t f_1(x(s))ds$, donc $|x(t) - x(0)| = \mathcal{O}_0(t)$. En substituant, on obtient : $x'(t) = \eta f_1(x(0) + \mathcal{O}_0(t)) = \eta f_1(x(0)) + \mathcal{O}_0(t)$, donc $x(t) = x(0) + \eta f_1(x(0))t + \mathcal{O}_0(t^2)$. En substituant une dernière fois, on obtient :

$$x'(t) = \eta f_1(x(0) + \eta f_1(x(0))t + \mathcal{O}_0(t^2)) = \eta (f_1(x(0)) + df_1(x(0))(\eta f_1(x(0))t) + \mathcal{O}_0(t^2)).$$

Ainsi, en intégrant, on conclut. ■

Alors, avec le contrôle $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbb{1}_{(0,\varepsilon)} + \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \mathbb{1}_{(\varepsilon,2\varepsilon)} + \begin{pmatrix} -\eta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbb{1}_{(2\varepsilon,3\varepsilon)} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\eta_2 \end{pmatrix} \mathbb{1}_{(3\varepsilon,4\varepsilon)}$, on obtient en itérant le lemme précédent :

$$x(4\varepsilon) = \eta_1 \eta_2 \varepsilon^2 [f_1, f_2](0) + \mathcal{O}_0(\varepsilon^3).$$

Dans le cas des systèmes **avec dérive**, du type

$$x' = f_0(x) + u f_1(x), \quad x(0) = 0 \tag{9}$$

(prenons $m = 1$ pour simplifier les calculs), tous les mouvements ne sont pas possibles. Exemple : pour le système $\begin{cases} x_1' = u \\ x_2' = x_1^2 \end{cases}$, on a $f_0(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}$ et $f_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le calcul direct donne $[f_1, [f_0, f_1]](0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, et on ne peut pas bouger dans cette direction, puisque $x_2' \geq 0$, donc $x_2(t) \geq x_2(0)$.

Néanmoins, on peut toujours bouger dans la direction $\pm [f_0, f_1](0)$. En effet, un calcul similaire montre que pour le contrôle $u(t) = -\eta \mathbb{1}_{(0,\varepsilon)}(t) + \eta \mathbb{1}_{(\varepsilon,2\varepsilon)}(t)$, la solution de (9) vérifie $x(2\varepsilon) = \eta \varepsilon^2 [f_0, f_1](0) + \mathcal{O}_0(\varepsilon^3)$. On peut retrouver ce calcul en utilisant la relation de Baker–Campbell–Hausdorff, et le lemme de Grönwall.

- L'information concernant la STLC est contenue dans l'évaluation des crochets en 0. En effet, si $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un \mathcal{C}^∞ difféomorphisme vérifiant $\varphi(0) = 0$, alors le changement de variable $y = \varphi(x)$ transforme (9) en :

$$y' = \underbrace{d\varphi(\varphi^{-1}(y))(f_0(\varphi^{-1}(y)))}_{:=g_0(y)} + u \underbrace{d\varphi(\varphi^{-1}(y))(f_1(\varphi^{-1}(y)))}_{:=g_1(y)}, \quad y(0) = 0,$$

qui est un système affine. De plus, un calcul direct montre que $[g_0, g_1](0) = d\varphi(0)([f_0, f_1](0))$, et de même pour les autres crochets. Pour deux systèmes difféomorphes, l'information contenue dans l'évaluation en zéro des crochets de Lie est inchangée.

Réciproquement, le théorème de Krener (voir [6]) montre que, si $x' = f_0(x) + u f_1(x)$ et $y' = g_0(y) + u g_1(y)$ sont deux systèmes affines analytiques, et s'il existe $L \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, tel que $[g_0, g_1](0) = L[f_0, f_1](0)$, et de même pour tous les autres crochets, alors il existe φ , un difféomorphisme local, vérifiant $\varphi(0) = 0$ tel que $y(t) = \varphi \circ x(t)$ pour tout $u \in L^\infty$ et t assez petit. On peut également tirer de cette preuve l'égalité en état petit.

3.3 Quelques résultats sur les systèmes affines

3.3.1 Quelques éléments sur les crochets de Lie

Proposition 1 (Bilinéarité - Jacobi)

Soit Ω un ouvert non vide de \mathbb{R}^n .

1. $[\cdot, \cdot] : \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)^2 \rightarrow \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ est une application bilinéaire antisymétrique.

2. Soient $X, Y, Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ trois champs de vecteurs \mathcal{C}^2 . Alors :

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$$

Définition 8 (Itérés des crochets)

Soit Ω un ouvert non vide de \mathbb{R}^n , et $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux champs de vecteurs \mathcal{C}^∞ . On définit pour $k \in \mathbb{N}$, $ad_X^k(Y)$ par récurrence par :

$$ad_X^0(Y) = Y \text{ et } ad_X^{k+1}(Y) = [X, ad_X^k(Y)].$$

Exemple 2. Si $f_0(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \\ x_1^2 \end{pmatrix}$, et $f_1(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$, alors $ad_{f_0}^2(f_1)(x) = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ -(x_2 + 2x_1^3) \end{pmatrix}$.

Définition 9

Soient Ω un ouvert non vide de \mathbb{R}^n et \mathcal{F} une famille de champs de vecteurs de classe \mathcal{C}^∞ sur Ω . On note $Lie(\mathcal{F})$ l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs de \mathcal{F} , i.e. le plus petit sous-espace vectoriel E de $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tel que

$$\mathcal{F} \subset E \text{ et } (X \in E, Y \in E \Rightarrow [X, Y] \in E).$$

Si $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$, on notera $Lie(f_1, \dots, f_n)$ au lieu de $Lie(\{f_1, \dots, f_n\})$.

3.3.2 Une condition nécessaire de contrôlabilité

Voici quelques résultats (conditions nécessaires ou conditions suffisantes) de contrôlabilité des systèmes affines (voir [2]) :

Theorème 5 (Hermann, Nagano)

Soit Ω un ouvert non vide de \mathbb{R}^n , $f_0, \dots, f_m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, des fonctions analytiques, et (x_e, u_e) un point d'équilibre de (7). Si le système (7) est STLC (au sens de la définition 5) autour de (x_e, u_e) , alors la condition

$$\mathcal{A}(x_e, u_e) := \{g(x_e), g \in Lie(f_0, \dots, f_m)\} = \mathbb{R}^n$$

est remplie.

Remarques. 1. On appelle cette condition la Lie Algebra Rank Condition (LARC)

2. Ce théorème n'est pas propre aux systèmes affines, il reste vrai pour les systèmes $x' = f(x, u)$, avec f analytique, et $\mathcal{A}(x_e, u_e) = \left\{ g(x_e), g \in Lie \left(\left\{ \frac{\partial^\alpha f}{\partial u^\alpha}(\cdot, u_e), \alpha \in \mathbb{N}^m \right\} \right) \right\}$.

3. Ce théorème est mis en défaut sans hypothèse d'analyticité ; en effet : pour $n = m = 1$, $\Omega = \mathbb{R}$, $(x_e, u_e) = 0_{\mathbb{R}^2}$, et $f(x, u) := \begin{cases} ue^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, le système est contrôlable mais $\mathcal{A}(0, 0) = \{0\}$.

4. La réciproque est fautive ; en effet, pour le système $\begin{cases} x_1' = u \\ x_2' = x_1^2 \end{cases}$, on a $x_2(t) \geq x_2(0)$, donc le système n'est pas contrôlable. Néanmoins, en posant $f_0(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}$ et $f_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on constate que $f_1(0) = e_1$ et $ad_{f_1}^2(f_0)(0) = 2e_2$, donc $\mathcal{A}(0, 0) = \mathbb{R}^2$.

Exemple 3. Le système $\begin{cases} x_1' &= u \\ x_2' &= 2ux_1 \end{cases}$ est-il localement contrôlable en $(0, 0)$? On a affaire à un système affine sans dérive, et $f_1(0) = \left. \begin{pmatrix} 1 \\ 2x_1 \end{pmatrix} \right|_{x=(0,0)} = e_1$, et, $\mathcal{A}(0, 0) = \mathbb{R}e_1 \subsetneq \mathbb{R}^2$. On pouvait le démontrer directement en remarquant que $x_2'(t) = \frac{d}{dt}(x_1^2)(t)$, donc $x_2(t) = x_1^2(t) + C$, où $C \in \mathbb{R}$. La solution évolue dans la sous-variété stricte de \mathbb{R}^2 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 + C\}$.

3.3.3 Retour sur le cas des systèmes linéaires à coefficients constants

On considère le système linéaire :

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{10}$$

avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On remarque que (10) $\Leftrightarrow x'(t) = f_0(x(t)) + \sum_{j=1}^m \underbrace{(b_{i,j})_{1 \leq i \leq n}}_{:=f_j(x)} u_j(t)$, où $B = (b_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ et $f_0(x) = Ax$. C'est donc un système affine.

Lemme 4

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \text{ad}_{f_0}^k(f_j) = (-1)^k A^k f_j. \tag{11}$$

Démonstration : Soit $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on démontre le résultat par récurrence sur k . Il est clairement vrai pour $k = 0$. Supposons le acquis au rang k . Ainsi :

$$\text{ad}_{f_0}^{k+1}(f_j) = [f_0, \text{ad}_{f_0}^k(f_j)] \stackrel{H.R.}{=} (-1)^k [f_0, A^k f_j] = (-1)^k (0_{\mathbb{R}^n} - AA^k f_j) = (-1)^{k+1} A^{k+1} f_j,$$

en utilisant le fait que f_j est constant. ■

Ainsi, on obtient :

$$\mathcal{A}(x_e, 0) = \text{Vect} (A^i Bu, i \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, u \in \mathbb{R}^m).$$

En effet, l'inclusion \subseteq provient du théorème de Cayley-Hamilton et du fait que les f_j sont constants. Pour l'inclusion \supseteq , on utilise (11) : $\forall i \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, \forall u \in \mathbb{R}^m, A^i Bu = (-1)^i \sum_{j=1}^m \text{ad}_{f_0}^i(f_j)(0)u_j$. On déduit de cette égalité d'ensembles, que, dans notre situation, la LARC n'est qu'une reformulation du théorème de Kalman. C'est donc une équivalence.

3.3.4 Cas des systèmes affines sans drift

Theorème 6 (Chow, Rashevski, (voir [2]))

Soit Ω un ouvert non vide, et $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Supposons que $\mathcal{A}(0, 0) = \mathbb{R}^n$. Alors, le système

$$x' = \sum_{i=1}^m f_i(x)u_i \tag{12}$$

est STLC.

Remarque 8. Dans le cas des systèmes affines sans drift, il y a donc équivalence entre la LARC et la STLC comme dans cas des systèmes linéaires avec drift vu plus haut.

Exemple 4. Le système $\begin{cases} x'_1 = u_1 \\ x'_2 = u_2 \\ x'_3 = x_1 u_2 - u_1 x_2 \end{cases}$ est un système affine sans dérive, pour lequel $n = 3, m = 2, f_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -x_2 \end{pmatrix}$ et $f_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x_1 \end{pmatrix}$. On remarque que $f_1(0) = e_1, f_2(0) = e_2$ et $[f_1, f_2](0) = 2e_3$. Ainsi, la LARC est remplie, donc le système est STLC.

3.3.5 Retour sur la décomposition de Brunovsky

Si on considère un système sous forme de Brunovsky, de la forme :

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ \vdots \\ x'_n = v \end{cases},$$

alors il est linéaire, donc affine, avec $f_0(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Puisque $f_0(0) = 0$, on

démontre par récurrence immédiate sur $k \in \mathbb{N}^*$ que $ad_{f_0}^k(f_1)(0) = (-1)^k (df_0(0))^k(f_1(0))$. De plus,

on remarque que $df_0(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi on obtient que pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$ad_{f_0}^k(f_1)(0) = (-1)^k e_{p-k}$. Ainsi, on déduit de ce calcul simple que la LARC est vérifiée, étant dans le cas des systèmes linéaires à coefficients constants, le système est contrôlable. La réciproque du théorème de Brunovsky est donc vraie (pour $m = 1$, mais cette remarque se généralise facilement). Ainsi, être sous forme de Brunovsky (*i.e.* sous forme (4)) est équivalent à dire :

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{N}^*, \bigoplus_{i=1}^m \text{Vect} \left(\left(ad_{f_{0_i}}^k(f_i)(0) \right)_{0 \leq k \leq \alpha_i - 1} \right) = \mathbb{R}^n,$$

est une décomposition en sous-espaces vectoriels, dont on a fourni une base (avec les notations des systèmes linéaires, interprétés comme des systèmes affines). On remarque de plus que $df_{0_i}(0)$ est nilpotente d'ordre α_i , donc, $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \forall k \geq \alpha_i, ad_{f_{0_i}}^k(f_i)(0) = 0$.

4 Éléments d'algèbre

L'intégralité de cette partie est dédiée à l'introduction d'éléments algébriques nécessaires à l'étude de la contrôlabilité. Cette partie est largement inspirée du papier *On expansions for nonlinear systems error estimates and convergence issues*, de Karine Beauchard, Jérémy le Borgne, et Frédéric Marbach (voir [1]). Il s'agit donc d'une boîte à outils, qui se passera presque intégralement de démonstrations.

4.1 Premières définitions

Dans ce paragraphe, $X := \{X_i, i \in I\}$ désigne un ensemble d'indéterminées non commutatives, indexé par I , où I est un ensemble fini.

Définition 10 (Magma)

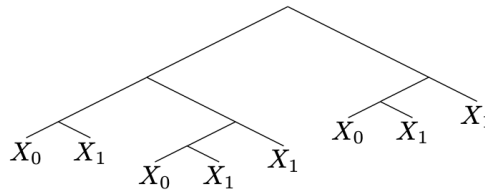
On considère $Br(X)$ le magma (i.e. un ensemble muni d'une loi de composition interne notée (\cdot, \cdot)) libre sur X . Il peut être défini par récurrence par : $X \subset Br(X)$ et pour tout $t_1, t_2 \in Br(X)$, $(t_1, t_2) \in Br(X)$. Cette loi est non commutative.

Définition 11 (Suite d'éléments de I)

On note I^* l'ensemble des suites finies d'éléments de I , muni de l'opérateur de concaténation, i.e. si $\sigma = (\sigma_i)_{1 \leq i \leq l}$, $\sigma' = (\sigma'_i)_{1 \leq i \leq l'}$ $\in I^*$, la concaténation de σ et σ' est la suite $\sigma'' = (\sigma''_i)_{1 \leq i \leq l+l'}$, avec $\sigma''_i = \sigma_i$ pour $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$ et $\sigma''_i = \sigma'_{i-l}$ pour $i \in \llbracket l+1, l+l' \rrbracket$.

Pour $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k) \in I^*$, on définit $X_\sigma := X_{\sigma_1} \cdots X_{\sigma_k}$.

Remarque 9. Les éléments de $Br(X)$ peuvent être vus comme des arbres binaires, dont les feuilles sont les éléments de X , en effet : $((X_0, X_1), ((X_0, X_1), X_1)), ((X_0, X_1), X_1) \in Br(\{X_0, X_1\})$ peut être interprété comme l'arbre suivant :



Définition 12 (Longueur, côté gauche/droit, nombre d'occurrences d'une indéterminée)

Pour $t \in Br(X)$, $|t|$ désigne la longueur de t , i.e. le nombre de feuilles de l'arbre. Si $|t| > 1$, t peut être écrit de manière unique sous la forme (t_1, t_2) avec $t_1, t_2 \in Br(X)$. On note $\lambda(t) = t_1$ et $\mu(t) = t_2$, où $\lambda, \mu : Br(X) \setminus X \rightarrow Br(X)$.

Pour $i \in I$ et $b \in Br(X)$, $n_i(b)$ désigne le nombre d'occurrence de l'indéterminée X_i dans b . Si $I = \llbracket 0, q \rrbracket$, on écrit $n(b) = \sum_{j=1}^q n_j(b) = |b| - n_0(b)$.

Exemple 5. Dans notre exemple, $|t| = 8$, $\lambda(t) = ((X_0, X_1), ((X_0, X_1), X_1))$, $\mu(t) = ((X_0, X_1), X_1)$.

Définition 13 (Algèbre libre)

On note $\mathcal{A}(X)$ l'algèbre associative libre générée par X sur le corps \mathbb{R} , i.e. l'algèbre unitaire associative des polynômes en les indéterminées X , non commutatives. On peut écrire :

$$\mathcal{A}(X) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n(X),$$

où $\mathcal{A}_n(X)$ désigne le sous-espace vectoriel de dimension finie engendré par les monômes de degré n sur X .

Introduisons l'élément qui va nous intéresser en particulier dans ce rapport, l'algèbre de Lie libre.

Définition 14 (Algèbre de Lie libre)

L'algèbre $\mathcal{A}(X)$ est naturellement munie d'une structure d'algèbre de Lie, l'opérateur de Lie étant $[a, b] := ab - ba$. On considère $\mathcal{L}(X)$, l'algèbre de Lie libre générée par X sur \mathbb{R} . Il peut être vu comme le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(X)$ contenant X et stable par crochet. On peut de même écrire :

$$\mathcal{L}(X) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}_n(X),$$

où $\mathcal{L}_n(X) = \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{A}_n(X)$.

Définition 15 (Évaluation)

Il existe une application évaluation, $E : Br(X) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ défini par $E(X_i) = X_i$ pour tout $X_i \in X$, et pour $t \in Br(X)$, $|t| > 1$, $E(t) = [E(\lambda(t)), E(\mu(t))]$.

Remarque 10. L'évaluation n'est pas injective puisque (X_0, X_0) et $(X_1, (X_0, X_0))$ sont deux éléments différents de $Br(X)$ envoyés sur 0 dans $\mathcal{L}(X)$.

Définition 16 (Séries formelles)

On définit l'algèbre associative unitaire $\hat{\mathcal{A}}(X)$ des séries formelles générées par $\mathcal{A}(X)$. Un élément $a \in \hat{\mathcal{A}}(X)$ est une suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $a_n \in \mathcal{A}_n(X)$. On définit également l'algèbre de Lie des séries formelles de Lie, $\hat{\mathcal{L}}(X)$ comme l'algèbre de Lie des séries formelles $a \in \hat{\mathcal{A}}$, avec $a_n \in \mathcal{L}_n(X)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

4.2 Bases de Hall**4.2.1 Définitions****Définition 17 (Ensemble de Hall)**

On appelle ensemble de Hall, un sous-ensemble \mathcal{B} de $Br(X)$ muni d'un ordre total vérifiant :

- $X \subset \mathcal{B}$.
- Pour tout $b_1, b_2 \in Br(X)$, $(b_1, b_2) \in \mathcal{B}$ ssi $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$, $b_1 < b_2$ et $(b_2 \in X \text{ ou } \lambda(b_2) \leq b_1)$.
- Pour tout $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$ tels que $(b_1, b_2) \in \mathcal{B}$, $b_1 < (b_1, b_2)$.

Toute l'importance des ensemble de Hall est contenue dans le théorème suivant, dû à Viennot. Elles permettent de déterminer des bases de $\mathcal{L}(X)$.

Théorème 7 (Viennot)

Soit $\mathcal{B} \subseteq Br(X)$ un ensemble de Hall. Alors, $E(\mathcal{B})$ est une base de $\mathcal{L}(X)$.

4.2.2 Une application

On suppose dans cette section que $X = \{X_0, X_1, X_2\}$.

Définition 18 ($\mathcal{L}_{*,1,1}(X)$)

On définit $\mathcal{L}_{*,1,1}(X)$ comme suit :

$$\mathcal{L}_{*,1,1}(X) = \text{Vect}(E(b), b \in Br(X), n_1(b) = n_2(b) = 1).$$

Notation. Pour $\nu \in \mathbb{N}$, $b \in Br(X)$, on notera $b0^\nu = \underbrace{((b, X_0), \dots, X_0)}_{\nu \text{ fois}} \in Br(X)$, défini formellement par récurrence par $b0^0 = b$ et $\forall \nu \in \mathbb{N}$, $b0^{\nu+1} = (b0^\nu, X_0)$.

On souhaite maintenant déterminer une base de $\mathcal{L}_{*,1,1}(X)$. Il faut construire un ordre cohérent, puis appliquer le théorème de Viennot. Plus précisément :

Proposition 2 (Base de $\mathcal{L}_{*,1,1}(X)$)

$$\left(E((X_1 0^\nu, X_2) 0^{\nu'}) \right)_{\nu, \nu' \in \mathbb{N}} \text{ est une base de } \mathcal{L}_{*,1,1}(X).$$

Démonstration : On suppose que $Br(X)$ est muni d'un ordre vérifiant $X_1 < X_2 < X_0$ et X_0 maximal. On définit $A = \{X_1 0^\nu, X_2, X_0\}$, muni de l'ordre total. Il est λ -stable. On étend l'ordre à un ordre total sur $Br(X)$ puis on considère \mathcal{B} ensemble de Hall pour cet ordre. On explicite les éléments de \mathcal{B} . Ce sont les $(X_1 0^\nu, X_2) 0^{\nu'}$. Ce sont de plus les seuls éléments de \mathcal{B} contenant exactement un X_1 et un X_2 . On déduit de théorème de Viennot que $E(\mathcal{B})$ est une base $\mathcal{L}(X)$, donc, $E(\mathcal{B}) \cap \mathcal{L}_{*,1,1}(X)$ forme une base de $\mathcal{L}_{*,1,1}(X)$. ■

On souhaite maintenant réussir à exprimer la solution d'une équation différentielle de type affine en fonction des crochets de Lie des champs de vecteurs $(f_i)_{0 \leq i \leq m}$. L'utilisation de cette base nous permettra de décomposer la solution sur une famille de crochets de Lie plus facile à manipuler. De telles formules existent, en voici une brève présentation.

4.3 Formules de Magnus, Sussmann, coordonnées de premières et de secondes espèces

4.3.1 Équations formelles et formule de Magnus

Définition 19 (Solution d'une équation formelle)

Soit $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $a_i \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et $a(t) = X_0 + \sum_{i=1}^q a_i(t) X_i$. Soit $x^* = (x_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{\mathcal{A}}(X)$. La solution de l'équation formelle :

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t)a(t) \\ x(0) &= x^* \end{cases} \tag{13}$$

est la fonction $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \hat{\mathcal{A}}(X)$ dont les composantes $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont les uniques fonctions continues vérifiant pour $t \geq 0$, $x_0(t) = x_0^*$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1}(t) = x_n^* + \int_0^t x_n(s)a(s)ds$.

On souhaite maintenant déterminer une formule permettant de développer la solution formelle d'une telle équation selon les crochets de Lie.

Définition 20 (Simplexe)

Pour $r \in \mathbb{N}^*$, et $t > 0$, on définit le simplexe :

$$\Delta^r(t) := \{(\tau_1, \dots, \tau_r) \in (0, t)^r, 0 < \tau_1 < \dots < \tau_r < t\}.$$

Définition 21 (Logarithme abstrait)

Soit $M \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $T > 0$, et F définie sur $[0, T]$ à valeurs dans une algèbre. On introduit :

$$\text{Log}_M(F)(t) = \sum_{r=1}^M \frac{1}{r} \sum_{m=1}^r \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_{s \in \mathbb{N}_r^m} \int_{\Delta^s(t)} [\dots, [F(\tau_1), F(\tau_2)], \dots, F(\tau_r)] d\tau. \tag{14}$$

où \mathbb{N}_r^m désigne l'ensemble des partitions ordonnées de l'entier r en m entiers,

$$\mathbb{N}_r^m := \{(r_1, \dots, r_m) \in (\mathbb{N}^*)^m, r = r_1 + \dots + r_m\},$$

et pour $r \in \mathbb{N}_r^m$ et $t > 0$,

$$\Delta^r(t) = \Delta^{r_1}(t) \times \dots \times \Delta^{r_m}(t).$$

Remarque 11. *Puisqu'on travaille au niveau abstrait, on ne se pose aucune question de convergence de série. Le facteur $\frac{(-1)^{m-1}}{m}$ provient du développement en série entière du logarithme.*

On peut maintenant énoncer le théorème qui nous intéresse. On remarque qu'il traite de solutions au niveau formel. Il faut encore démontrer que l'on peut évaluer en les champs de vecteurs.

Theorème 8

Pour $t \in \mathbb{R}^+$, et $x^* \in \hat{\mathcal{A}}(X)$, la solution de (13) s'écrit

$$x(t) = x^* \exp(tX_0) \exp(\mathcal{Z}_\infty(t, X, a)),$$

où $\mathcal{Z}_\infty(t, X, a) = \text{Log}_\infty(b_t)(t)$ et $b_t(s) = e^{-(t-s)X_0} \left(\sum_{i=1}^q a_i(s) X^i \right) e^{(t-s)X_0}$, i.e.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_\infty(t, X, a) = & \sum_{\substack{r \geq 1, 1 \leq m \leq r, s \in \mathbb{N}_r^m, \\ k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_r \in \llbracket 1, q \rrbracket}} \frac{(-1)^{m-1}}{mr} \int_{\Delta^s(t)} \frac{(\tau_1 - t)^{k_1}}{k_1!} \dots \frac{(\tau_r - t)^{k_r}}{k_r!} a_{i_1}(\tau_1) \dots a_{i_r}(\tau_r) d\tau \\ & [\dots [\text{ad}_{X_0}^{k_1}(X_{i_1}), \text{ad}_{X_0}^{k_2}(X_{i_2})], \dots, \text{ad}_{X_0}^{k_r}(X_{i_r})]. \end{aligned}$$

Remarque 12. $\mathcal{Z}_\infty(t, X, a)$ est une série formelle de Lie. On peut alors utiliser les bases de $\mathcal{L}(X)$ afin de décomposer cette quantité, et définir ses coordonnées, comme suit :

Définition 22 (Coordonnées de type pseudo-premier)

Il existe une unique famille de fonctionnelles, $(\eta_b)_{b \in \mathcal{B}}$, telle que pour tout $a_i \in L^1(\mathbb{R}^+)$, pour tout $t \geq 0$, on ait l'égalité suivante dans $\mathcal{L}(\hat{X})$:

$$\mathcal{Z}_\infty(t, X, a) = \sum_{b \in \mathcal{B}} \eta_b(t, a) b.$$

On appelle ces fonctions les coordonnées de type pseudo premier.

4.3.2 Formule de Sussmann

Définition 23 (Coordonnées de seconde espèce)

Soit \mathcal{B} une base de Hall de $\mathcal{L}(X)$. Les coordonnées de seconde espèce associées à \mathcal{B} sont l'unique famille de fonctionnelles $(\xi_b)_{b \in \mathcal{B}} : \mathbb{R}^+ \times L_{loc}^1(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par récurrence par : pour tout $t > 0$, pour tout $a \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^+)$,

- $\xi_{X_i}(t, a) = \int_0^t a_i(s) ds$

- pour $b \in \mathcal{B} \setminus X$, il existe une unique paire (b_1, b_2) d'éléments de \mathcal{B} tel que $b_1 < b_2$ et un

entier maximal $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = ad_{b_1}^m(b_2)$, et

$$\xi_b(t, a) = \frac{1}{m!} \int_0^t \xi_{b_1}^m(s, a) \xi_{b_2}'(s, a) ds. \quad (15)$$

Remarques. - On considère : $\mathcal{L}_{*,1,0}(X) = \text{Vect}(E(b), b \in \text{Br}(X), n_1(b) = 1, n_2(b) = 0)$. On suppose que $a_1 = u$. Avec l'ordre défini précédemment, on vérifie par le théorème de Viennot que $(E(X_1 0^\nu))_{\nu \in \mathbb{N}}$ définit une base de Hall de cet espace. Calculons les coordonnées de seconde espèce de ces éléments. On note $b_\nu = X_1 0^\nu \in \text{Br}(X)$. On remarque que $b_{\nu+1} = (b_\nu, X_0)$. En utilisant la formule, on en déduit :

$$\begin{aligned} \xi_{b_{\nu+1}}(t, a) &= \int_0^t \xi_{b_\nu}(s, a) \underbrace{\xi_{X_0}'(s, a)}_{= \frac{d}{ds} \int_0^1 ds = 1} ds = \int_0^t \xi_{b_\nu}(s, a) ds. \end{aligned}$$

Ainsi, par récurrence,

$$\xi_{b_\nu}(t, a) = \int_0^t \frac{(t-s)^\nu}{\nu!} u(s) ds = u_{\nu+1}(t).$$

- On calcule maintenant les coordonnées de seconde espèce (on suppose $a_1 = u, a_2 = v$) de $(E((X_1 0^\nu, X_2) 0^{\nu'}))_{\nu, \nu' \in \mathbb{N}}$ dont on a montré qu'il formait une base de Hall de $\mathcal{L}_{*,1,1}(X)$ en proposition 2. Pour $\nu, \nu' \in \mathbb{N}$, on a :

$$\xi_{(X_1 0^\nu, X_2) 0^{\nu'}}(t, a) = \int_0^t \xi_{(X_1 0^\nu, X_2) 0^{\nu'-1}}(s, a) \xi_{X_2}'(s, a) ds = \int_0^t \frac{(t-s)^{\nu'-1}}{(\nu'-1)!} \xi_{(X_1 0^\nu, X_2)}(s, a) ds.$$

De plus,

$$\xi_{(X_1 0^\nu, X_2)}(t, a) = \int_0^t \xi_{X_1 0^\nu}(s, a) \xi_{X_2}'(a, s) ds = \int_0^t u_{\nu+1}(s) v(s) ds$$

Ainsi, par IPP

$$\xi_{(X_1 0^\nu, X_2) 0^{\nu'}}(t, a) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\nu'-1}}{(\nu'-1)!} \left(\int_0^s u_{\nu+1}(\sigma) v(\sigma) d\sigma \right) ds = \int_0^t \frac{(t-s)^{\nu'}}{\nu'!} u_{\nu+1}(s) v(s) ds.$$

- Montrons que les $(\xi_b)_{b \in \mathcal{B}}$ ont une propriété d'homogénéité, i.e., pour tout $u \in L^\infty(0, T)$, et $t \in [0, T]$, $\lambda \in]0, 1]$, pour tout $b \in \mathcal{B}$,

$$\xi_b(\lambda t, u^\lambda) = \lambda^{|b|} \xi_b(t, u),$$

où $u^\lambda(\lambda t) = u(t)$, $t \in [0, T]$, 0 sinon. On raisonne par récurrence sur $|b|$. On suppose que $|b| = 1$. Alors

$$\xi_{X_i}(\lambda t, u^\lambda) = \int_0^{\lambda t} a_i^\lambda(s) ds = \lambda \int_0^t a_i^\lambda(\lambda \tau) d\tau = \lambda^{|X_i|} \xi_{X_i}(t, u).$$

Supposons le résultat acquis pour tout $b \in \mathcal{B}$ tel que $|b| \leq n$. Soit $b \in \mathcal{B}$ tel que $|b| = n+1$. On écrit de manière unique $b = ad_{b_1}^m(b_2)$ où $(b_1, b_2) \in \mathcal{B}^2$, $b_1 < b_2$, et $m \in \mathbb{N}^*$, maximal. Alors pour $t \in [0, T]$, $\lambda \in]0, 1]$,

$$\xi_b(\lambda t, u^\lambda) = \frac{1}{m!} \int_0^{\lambda t} \xi_{b_1}^m(s, a^\lambda) \xi_{b_2}'(s, a^\lambda) ds = \frac{\lambda}{m!} \int_0^t \xi_{b_1}^m(\lambda x, a^\lambda) \xi_{b_2}'(\lambda x, a^\lambda) dx.$$

$$\xi_b(\lambda t, u^\lambda) = \frac{\lambda^{mb_1+b_2}}{m!} \int_0^t \xi_{b_1}^m(x, a) \xi_{b_2}'(x, a) dx = \lambda^{|b|} \xi_b(t, a).$$

Theorème 9 (Sussmann)

Soit \mathcal{B} une base de Hall de $\mathcal{L}(X)$, $T > 0$ et pour $i \in I$, $a_i \in L^1(0, T)$. Pour tout $x^* \in \hat{\mathcal{A}}(X)$, la solution de (13) vérifie pour $t \in [0, T]$,

$$x(t) = x^* \prod_{b \in \mathcal{B}}^{\leftarrow} e^{\xi_b(a, t)b}.$$

Remarques. - la flèche sur le produit a pour but de donner le sens du produit, il est orienté par l'ordre de \mathcal{B} .

- faisons le lien entre les coordonnées de type pseudo premier, et les coordonnées de type 2. On utilise les deux formules donnant x ,

$$x(t) = x^* \prod_{b \in \mathcal{B}}^{\leftarrow} e^{\xi_b(a, t)b} = x^* e^{tX_0} e^{\mathcal{Z}_\infty(t, X, a)}.$$

Puisque, X_0 est maximal et $\xi_{X_0}(t, a) = t$, on a $\prod_{b \in \mathcal{B}}^{\leftarrow} e^{\xi_b(a, t)b} = e^{tX_0} \prod_{b \in \mathcal{B} \setminus \{X_0\}}^{\leftarrow} e^{\xi_b(a, t)b}$. Au

niveau formel, on obtient alors : $\prod_{b \in \mathcal{B} \setminus \{X_0\}}^{\leftarrow} e^{\xi_b(a, t)b} = e^{\mathcal{Z}_\infty(t, X, a)}$, i.e.,

$$\prod_{b \in \mathcal{B} \setminus \{X_0\}}^{\leftarrow} \left(1 + \xi_b(t, a)b + \frac{1}{2} \xi_b^2(t, a)b^2 + \dots \right) = 1 + \mathcal{Z}_\infty(t, X, a) + \frac{1}{2} \mathcal{Z}_\infty(t, X, a)^2 + \dots$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{b \in \mathcal{B}} \eta_b(t, a)b + \frac{1}{2} \sum_{\substack{b < b', \\ b, b' \in \mathcal{B}}} \eta_b(t, a)\eta_{b'}(t, a)(bb' + b'b) + \frac{1}{2} \sum_{b \in \mathcal{B}} \eta_b(t, a)^2 b^2 + \dots = \\ 1 + \sum_{b \in \mathcal{B}} \xi_b(t, a)b + \sum_{\substack{b < b', \\ b, b' \in \mathcal{B}}} \xi_b(t, a)\xi_{b'}(t, a)b'b + \frac{1}{2} \sum_{b \in \mathcal{B}} \xi_b(t, a)^2 b^2 + \dots \end{aligned}$$

On déduit de ce calcul, que pour b tel que $n(b) = 1$, $\eta_b = \xi_b$. Pour b tel que $n(b) = 2$, alors $\eta_b = \xi_b + \sum_{j+k=|b|} \alpha_{j,k} u_j(t) v_k(t)$ (pour $a_1 = u$ et $a_2 = v$).

Jusqu'à présent, les énoncés donnaient les solutions d'équations différentielles formelles. Il faut maintenant s'intéresser à la possibilité d'évaluer selon des champs de vecteurs.

4.3.3 Évaluation selon un champ de vecteurs

Soit $q \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation différentielle affine suivante :

$$x'(t) = f_0(x(t)) + \sum_{i=1}^q u_i(t) f_i(x(t)), \quad x(0) = p. \quad (16)$$

Theorème 10

Soient $M \in \mathbb{N}^*$, $T > 0$, $f_0, \dots, f_q \in \mathcal{C}^\infty(B_{\mathbb{K}^d}(0, 2\delta); \mathbb{K}^d)$ avec $f_0(0) = 0$ et $T \|f_0\| \leq \delta$. Soit $u \in L^1((0, T), \mathbb{K}^q)$, si $x(t; f, u, 0)$ est la solution du système (16) avec $p = 0$, alors :

$$x(t; f, u, 0) = \mathcal{Z}_M(t, f, u)(0) + \mathcal{O}\left(\|u\|_{L^1(0, t)}^{M+1}\right) + o(|x(t; f, u, 0)|).$$

5 Problème de moments

Définition 24 (*Matrice de Gram*)

Soit (x_1, \dots, x_n) une famille de vecteurs d'un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. On appelle matrice de Gram associée à cette famille, la matrice notée $G(x_1, \dots, x_n) := (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Proposition 3

Soit (x_1, \dots, x_n) une famille de vecteurs d'un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Alors :

$$\text{rg}(x_1, \dots, x_n) = \text{rg}(G(x_1, \dots, x_n)).$$

Démonstration : Soit $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, et (e_1, \dots, e_p) une base orthonormée de F . Soit A la matrice des coordonnées de (x_1, \dots, x_n) dans la base (e_1, \dots, e_p) , alors pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$(G(x_1, \dots, x_n))_{i,j} = \langle x_i, x_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^p a_{k,i} e_k, \sum_{l=1}^p a_{l,j} e_l \right\rangle = \sum_{k=1}^p a_{k,i} a_{k,j} = ({}^t A A)_{i,j}.$$

Ainsi, $G(x_1, \dots, x_n) = {}^t A A$, et puisque $\ker({}^t A A) = \ker(A)$, on obtient :

$$\text{rg}(G(x_1, \dots, x_n)) = \text{rg}({}^t A A) = \text{rg}(A) = \text{rg}(x_1, \dots, x_n). \quad \blacksquare$$

Corollaire 1

Soit (x_1, \dots, x_n) une famille de vecteurs d'un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Alors (x_1, \dots, x_n) est libre ssi $G(x_1, \dots, x_n) \in GL_n(\mathbb{R})$.

Afin de démontrer le théorème principal de ce rapport, nous aurons besoin de savoir résoudre des problèmes de moments. Plus précisément :

Lemme 5

Soit $l, p, q \in \mathbb{N}$, $T > 0$, et $a < b$, alors, il existe $u \in \mathcal{C}^\infty([a, b])$ telle que la famille

$$((T - \cdot)^i, i \in \llbracket 0, l \rrbracket, (T - \cdot)^r u_s, r \in \llbracket 0, p \rrbracket, s \in \llbracket 0, q \rrbracket)$$

soit libre, (avec $\|u\|_\infty^{[a,b]} \leq 1$) (où u_j désigne la $j^{\text{ième}}$ primitive de u , définie par récurrence par :

$$u_0 = u \text{ et } \forall t \in [a, b], u_{j+1}(t) = \int_0^t u_j(s) ds.$$

Démonstration : Première étape : on commence par montrer la propriété sur \mathbb{R} ($a = -\infty$, et $b = +\infty$). On introduit $y(t) = e^{e^t}$. Montrons par récurrence sur k que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists (\gamma_1^{(k)}, \dots, \gamma_k^{(k)}) \in \mathbb{R}_+^{*k} \text{ tel que } \forall t \in \mathbb{R}, y^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^k \gamma_j^{(k)} e^{j t} y(t).$$

Pour $k = 1$, $y'(t) = e^t e^{e^t}$, donc $\gamma_1^{(1)} = 1 > 0$ convient.

On suppose le résultat acquis au rang k , alors : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$y^{(k+1)}(t) = \frac{d}{dt} \left(y(t) \sum_{j=1}^k \gamma_j^{(k)} e^{j t} \right) = e^t y(t) \sum_{j=1}^k \gamma_j^{(k)} e^{j t} + y(t) \sum_{j=1}^k \gamma_j^{(k)} j e^{j t},$$

$$y^{(k+1)}(t) = \left(\underbrace{\gamma_1^{(k)}}_{=:\gamma_1^{(k+1)}} e^t + \sum_{j=2}^k \underbrace{(j \gamma_j^{(k)} + \gamma_{j-1}^{(k)})}_{=:\gamma_j^{(k+1)}} e^{j t} + \underbrace{\gamma_k^{(k)}}_{=:\gamma_{k+1}^{(k+1)}} e^{(k+1)t} \right) y(t),$$

ce qui conclut car les scalaires sont strictement positifs.

On pose $\Phi = y^{(q+1)}$, $\Phi_s = y^{(q+1-s)}$. Montrons que Φ convient : soient $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq l}$, $(\beta_{r,s})_{\substack{0 \leq r \leq p \\ 0 \leq s \leq q}}$ tels que :

$$\sum_{j=0}^l \alpha_j (T - \cdot)^j + \sum_{\substack{0 \leq r \leq p \\ 0 \leq s \leq q}} \beta_{r,s} (T - \cdot)^r y^{(s+1)} = 0.$$

i.e.

$$\sum_{j=0}^l \alpha_j (T - \cdot)^j + \underbrace{y \sum_{r=0}^p (T - \cdot)^r \left(\sum_{s=0}^q \beta_{r,s} \left(\sum_{i=1}^{s+1} \gamma_i^{(s+1)} e^{i \cdot} \right) \right)}_{\xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} 0} = 0.$$

Donc, le premier terme de l'équation (polynôme) admet une limite finie (par croissance comparée), donc il est constant, et de terme constant nul, donc nul. Ainsi, $\forall j \in \llbracket 0, l \rrbracket$, $\alpha_j = 0$. Puisque y ne s'annule pas, on a :

$$\sum_{r=0}^p \sum_{i=1}^{q+1} (T - \cdot)^r e^{i \cdot} \left(\sum_{s=i-1}^q \beta_{r,s} \gamma_i^{(s+1)} \right) = 0.$$

ou encore

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{r=0}^p \sum_{i=-q-1}^{-1} (T-t)^r e^{i(T-t)} \left(e^{-iT} \sum_{s=i-1}^q \beta_{r,s} \gamma_{-i}^{(s+1)} \right) = 0.$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{r=0}^p \sum_{i=-q-1}^{-1} t^r e^{it} \left(e^{-iT} \sum_{s=i-1}^q \beta_{r,s} \gamma_{-i}^{(s+1)} \right) = 0.$$

Puisque la famille $(\cdot^r, r \in \llbracket 0, p \rrbracket, e^{i \cdot}, i \in \llbracket -q-1, -1 \rrbracket)$ est une base de solutions de l'équation différentielle, $H \left(\frac{d}{dt} \right) = 0$, avec $H = \left(\prod_{j=-q-1}^{-1} (X-j) \right)^r$, il est connu que c'est une famille libre.

On en déduit :

$$\forall r \in \llbracket 0, p \rrbracket, \forall i \in \llbracket 1, q+1 \rrbracket, \sum_{s=i-1}^q \beta_{r,s} \gamma_i^{(s+1)} = 0.$$

Pour $i = q+1$, on a $\beta_{r,q} \underbrace{\gamma_{q+1}^{(q+1)}}_{>0} = 0$, donc, $\beta_{r,q} = 0$ pour tout $r \in \llbracket 0, p \rrbracket$.

Pour $i = q$, on a $\beta_{r,q-1} \underbrace{\gamma_{q-1}^{(q)}}_{>0} + \underbrace{\beta_{r,q} \gamma_{q+1}^{(q+1)}}_{=0} = 0$, donc, $\beta_{r,q-1} = 0$ pour tout $r \in \llbracket 0, p \rrbracket$. C'est un

système triangulaire, on conclut de proche en proche à la nullité des scalaires, donc à la liberté de la famille. Ainsi, $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ convient.

Seconde étape : en remarquant que, si on travaille sur $[a, b]$, et si les fonctions admettent une relation de dépendance linéaire sur cet intervalle, puisqu'elles sont toutes analytiques, on déduit du principe des zéros isolés que la relation est vraie sur \mathbb{R} . On se ramène à ce qui a été fait en étape 1 pour déduire la nullité des coefficients. Il suffit donc de considérer $u = \frac{\Phi|_{[a,b]}}{\|\Phi\|_\infty}$ pour conclure. ■

Theorem 11 (*Problème de moments*)

Soient $k, l, p, q \in \mathbb{N}$, $T > 0$, $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq k} \in \mathbb{R}^{k+1}$, $(\mu_i)_{0 \leq i \leq l} \in \mathbb{R}^{l+1}$, $(\alpha_{i,j})_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 0 \leq j \leq q}} \in \mathbb{R}^{(p+1)(q+1)}$, il existe $u, v \in C_c^\infty((0, T), \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket, \int_0^T u(t)(T-t)^i dt = \lambda_i, \quad (17)$$

$$\forall i \in \llbracket 0, l \rrbracket, \int_0^T v(t)(T-t)^i dt = \mu_i, \quad (18)$$

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, p \rrbracket \times \llbracket 0, q \rrbracket, \int_0^T v(t)(T-t)^i u_j(t) dt = \alpha_{i,j}, \quad (19)$$

où u_j désigne la $j^{\text{ième}}$ primitive de u , définie par récurrence par : $u_0 = u$ et $\forall t \in [0, T]$, $u_{j+1}(t) = \int_0^t u_j(s) ds$. De plus, l'estimée suivante est vérifiée : en notant $\eta = k+l+2+(p+1)(q+1)$, fixés,

alors : $\forall T > 0$, $\exists C(T) > 0$ tel que $\forall z = \begin{pmatrix} (\lambda_i)_{0 \leq i \leq k} \\ (\mu_i)_{0 \leq i \leq l} \\ (\alpha_{i,j})_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 0 \leq j \leq q}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^\eta$, $\|z\|_\infty \leq 1$, $\exists u, v \in \mathcal{C}_c^\infty((0, T), \mathbb{R})$

tel que (17) – (18) – (19) aient lieu, et

$$\left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_\infty^{[0, T]} \leq C(T) \|z\|_\infty^{1/2}.$$

Enfin, pour T assez petit, $C(T) = \frac{C}{T^{\max(k, l, p+q)+1}}$.

Démonstration : Première étape : Soit $z \in \mathbb{R}^\eta$ un second membre fixé. On résout le problème de moments en u , (17) en s'assurant de la liberté d'une certaine famille de fonctions. Ceci nous permettra de faciliter en étape 2 la résolution du problème de moments en v . On considère $\tilde{u} \in \mathcal{C}^\infty([0, \frac{T}{2}], \mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F} := ((T - \cdot)^j, j \in \llbracket 0, l \rrbracket, (T - \cdot)^r \tilde{u}_s, r \in \llbracket 0, p \rrbracket, s \in \llbracket 0, q \rrbracket)$ est une famille libre sur $[\frac{T}{8}, \frac{3T}{8}]$ (c'est possible, voir le lemme précédent). Soit $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty((0, \frac{T}{2}), \mathbb{R})$ telle que $\chi \equiv 1$ sur $[\frac{T}{8}, \frac{3T}{8}]$, $0 \leq \chi \leq 1$. On pose $u|_{[0, \frac{T}{2}]} = \chi \tilde{u}$. Ainsi, il faut définir u sur $[\frac{T}{2}, T]$, de classe \mathcal{C}^∞ à support compact pour que (17) soit vérifiée.

Soit $(\chi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0} \in \mathcal{C}_c^\infty(\frac{T}{2}, T)^\mathbb{R}$ telle que $\|\chi_\varepsilon - 1\|_{L^1(\frac{T}{2}, T)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, et $0 \leq \chi_\varepsilon \leq 1$. Puisque la famille $((T - \cdot)^i)_{i \in \llbracket 0, k \rrbracket}$ est échelonnée en degré, elle est libre, on peut résoudre ce problème dans $\mathbb{R}_k[X]$. Montrons que l'on peut utiliser une perturbation pour le résoudre dans \mathcal{C}_c^∞ : en notant $P_i := (T - \cdot)^i|_{[\frac{T}{2}, T]}$, on a, pour le produit scalaire L^2 sur $[\frac{T}{2}, T]$:

$$\| |G(\chi_\varepsilon P_0, \dots, \chi_\varepsilon P_k) - G(P_0, \dots, P_k)| \|_\infty = \sup_{0 \leq i, j \leq k} |(\chi_\varepsilon P_i | \chi_\varepsilon P_j) - (P_i | P_j)|$$

Ainsi,

$$\| |G(\chi_\varepsilon P_0, \dots, \chi_\varepsilon P_k) - G(P_0, \dots, P_k)| \|_\infty \leq 2 \|\chi_\varepsilon - 1\|_{L^1} \sup_{0 \leq i, j \leq k} T^{i+j} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Or, la famille $(P_i)_{0 \leq i \leq k}$ étant libre, le lemme affirme donc que $G(P_0, \dots, P_k) \in GL_{k+1}(\mathbb{R})$. Puisque $GL_{k+1}(\mathbb{R})$ est un ouvert, il existe ε_0 tel que la matrice $G(\chi_{\varepsilon_0} P_0, \dots, \chi_{\varepsilon_0} P_k)$ est inversible. Cherchons u sous la forme $\varphi \chi_{\varepsilon_0}$, avec $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\frac{T}{2}, T)$ à préciser.

$$(17) \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket, \int_{\frac{T}{2}}^T \varphi(t) \chi_{\varepsilon_0}(t) (T-t)^i dt = \lambda_i - \int_0^{\frac{T}{2}} u(t) (T-t)^i dt := \lambda'_i.$$

Ainsi, on peut trouver $\varphi \in \text{Vect}(\chi_{\varepsilon_0} P_0, \dots, \chi_{\varepsilon_0} P_k) \subseteq \mathcal{C}_c^\infty(\frac{T}{2}, T)$, solution de (17). On conclut en posant $u|_{[\frac{T}{2}, T]} = \varphi \chi_{\varepsilon_0}$. On a bien $u \in \mathcal{C}_c^\infty((0, T), \mathbb{R})$, et u est par construction solution du problème de moments.

Deuxième étape : la fonction $u \in \mathcal{C}_c^\infty((0, T), \mathbb{R})$ étant construite, on résout le problème de moment (18)-(19) en v . Afin de faciliter ensuite le calcul de la dépendance en $\|z\|_\infty$, on définit $v = 0$ sur $[\frac{T}{2}, T]$, et on résout le problème de moment sur $[0, \frac{T}{2}]$. On peut raisonner comme dans l'étape 1, à l'aide d'un argument perturbatif, puisque \mathcal{F} est une famille libre libre sur $[0, \frac{T}{2}]$, par construction. On trouve $v \in \mathcal{C}_c^\infty((0, T), \mathbb{R})$, solution. Ceci conclut.

Troisième étape : étudions la dépendance en $\|z\|_\infty$ de $\|u\|_\infty^{[0, T]}$; on commence par traiter le cas où $T = 1$. On suppose que $\|z\|_\infty$ est non nul (sinon, $u = v = 0$ conviennent et l'inégalité est trivialement vraie). Majorons $\|u\|_\infty^{[0, \frac{1}{2}]}$: pour $C > 0$,

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], |u(t)| \leq \underbrace{|\tilde{u}(t)|}_{= C \|z\|_\infty^{1/2} |f(t)| \text{ convient, pour } f \text{ définie par le lemme}} \underbrace{|\chi(t)|}_{\leq 1} \leq C \|z\|_\infty^{1/2}.$$

On estime maintenant $\|u\|_\infty^{[\frac{1}{2}, 1]}$; $\forall t \in [\frac{1}{2}, 1]$, $u(t) = \varphi(t)\chi_{\varepsilon_0}(t)$, où $\varphi(t) = \sum_{j=0}^k P_j(t)\chi_{\varepsilon_0}(t)\xi_j$, et $\xi = (\xi_j)_{0 \leq j \leq k}$ est l'unique solution de $G(\chi_{\varepsilon_0}P_0, \dots, \chi_{\varepsilon_0}P_k)\xi = (\lambda'_i)_{0 \leq i \leq k}$. Par suite, pour $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$,

$$|\lambda'_i| \leq |\lambda_i| + \int_0^{1/2} |u(t)|P_i(t)dt \leq \|z\|_\infty + \frac{C}{2} \|z\|_\infty^{1/2}.$$

Alors,

$$\|\xi\|_\infty \leq \|G(\chi_{\varepsilon_0}P_0, \dots, \chi_{\varepsilon_0}P_k)^{-1}\|_\infty \left(\|z\|_\infty + \frac{C}{2} \|z\|_\infty^{1/2} \right).$$

Et

$$\forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right], |u(t)| \leq \left(\underbrace{\|\chi_{\varepsilon_0}\|_\infty^{[\frac{1}{2}, 1]}}_{\leq 1} \right)^2 \sum_{j=0}^k \frac{1}{2^j} \|\xi\|_\infty.$$

Ainsi,

$$\|u\|_\infty^{[\frac{1}{2}, 1]} \leq 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{k+1} \right) \|G(\chi_{\varepsilon_0}P_0, \dots, \chi_{\varepsilon_0}P_k)^{-1}\|_\infty \left(\|z\|_\infty + \frac{C}{2} \|z\|_\infty^{1/2} \right).$$

En combinant les deux estimations, on obtient : pour tout $C > 0$,

$$\|u\|_\infty^{[0, 1]} \leq \max \left(2 \|G(\chi_{\varepsilon_0}P_0, \dots, \chi_{\varepsilon_0}P_k)^{-1}\|_\infty \left(\|z\|_\infty^{1/2} + \frac{C}{2} \right), C \right) \|z\|_\infty^{1/2}.$$

Pour $C = 2$, on obtient :

$$\|u\|_\infty^{[0, 1]} \leq 2 \max \left(\|G(\chi_{\varepsilon_0}P_0, \dots, \chi_{\varepsilon_0}P_k)^{-1}\|_\infty (1 + \|z\|_\infty^{1/2}), 1 \right) \|z\|_\infty^{1/2}.$$

Dépendance en temps : on utilise maintenant un argument de dilation du temps afin d'estimer $\|u\|_\infty^{[0, T]}$ pour $T > 0$. On définit pour $t \in [0, T]$, $u(t) = \bar{u}\left(\frac{t}{T}\right)$, $\bar{u} \in \mathcal{C}_c^\infty(0, 1)$. On obtient donc :

$$\|u\|_\infty^{[0, T]} = \|\bar{u}\|_\infty^{[0, 1]} \leq 2 \max \left(\|G(\chi_{\varepsilon_0}P_0, \dots, \chi_{\varepsilon_0}P_k)^{-1}\|_\infty (1 + \|\bar{z}\|_\infty^{1/2}), 1 \right) \|\bar{z}\|_\infty^{1/2},$$

où le second membre a été modifié en \bar{z} . Étudions la répercussion de ce changement de variables :

$$(z_i)_{0 \leq i \leq k} = \left(\int_0^T u(s)(T-s)^i ds \right)_{0 \leq i \leq k} \stackrel{x=s/T}{=} \left(T^{i+1} \int_0^1 \bar{u}(x)(1-x)^i dx \right)_{0 \leq i \leq k} = (T^{i+1} \bar{z}_i)_{0 \leq i \leq k}.$$

On conclut à :

$$\|u\|_\infty^{[0, T]} \leq 2 \max \left(\|G((\chi_{\varepsilon_0}P_i)_i)^{-1}\|_\infty \left(1 + \max_{i \in \llbracket 0, k \rrbracket} \left(T^{-\frac{i+1}{2}} \right) \|z\|_\infty^{1/2} \right), 1 \right) \max_{i \in \llbracket 0, k \rrbracket} \left(T^{-\frac{i+1}{2}} \right) \|z\|_\infty^{1/2}.$$

Ainsi, on obtient pour $\|z\|_\infty \leq 1$,

$$\|u\|_\infty^{[0, T]} \leq \underbrace{2 \max \left(\|G((\chi_{\varepsilon_0}P_i)_i)^{-1}\|_\infty \left(1 + \max_{i \in \llbracket 0, k \rrbracket} \left(T^{-\frac{i+1}{2}} \right) \right), 1 \right)}_{=: C'(T)} \max_{i \in \llbracket 0, k \rrbracket} \left(T^{-\frac{i+1}{2}} \right) \|z\|_\infty^{1/2}.$$

Quatrième étape : étudions la dépendance en $\|z\|_\infty$ de $\|v\|_\infty^{[0, T]}$; traitons le cas où $T = 1$. Estimons $\|v\|_\infty^{[0, 1]} = \|v\|_\infty^{[0, \frac{1}{2}]}$: on introduit pour $i \in \llbracket 0, l \rrbracket$, $Q_i = \|z\|_\infty^{1/2} (1 - \cdot)^i|_{[0, 1]}$. Ainsi,

$$(18) \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 0, l \rrbracket, \int_0^{\frac{1}{2}} v(t)Q_i(t)dt = \mu_i \|z\|_\infty^{1/2}$$

Par construction, la famille \mathcal{F} est libre, et en perturbant, on obtient $v(t) = \chi_{\varepsilon_0}(t)\psi(t)$, où $\psi(t) = \sum_{j=0}^l Q_j(t)\chi_{\varepsilon_0}(t)\rho_j + \sum_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 0 \leq j \leq q}} (1-t)^i u_j(t)\chi_{\varepsilon_0}(t)\tau_{i,j}$, où $\rho = \begin{pmatrix} (\rho_j)_{0 \leq j \leq l} \\ (\tau_{i,j})_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 0 \leq j \leq q}} \end{pmatrix}$ est l'unique solution de

$$\underbrace{G \left(Q_0 \chi_{\varepsilon_0}, \dots, Q_l \chi_{\varepsilon_0}, \left((1 - \cdot)^i u_j \chi_{\varepsilon_0} \right)_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 0 \leq j \leq q}} \right)}_{:=G} \rho = \begin{pmatrix} (\mu_i \|z\|_{\infty}^{1/2})_{0 \leq i \leq l} \\ (\alpha_{i,j})_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 0 \leq j \leq q}} \end{pmatrix}.$$

Puisque : $\|u\|_{\infty}^{[0, \frac{1}{2}]} \leq 2 \|z\|_{\infty}^{1/2}$, et $u_{i+1}(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^i}{i!} u(s) ds$, on obtient $\|u_{i+1}\|_{\infty}^{[0, \frac{1}{2}]} \leq \frac{\|z\|_{\infty}^{1/2}}{2^i i!}$, donc, pour $t \in [0, \frac{1}{2}]$,

$$|v(t)| \leq \left(\sum_{j=0}^l \|z\|_{\infty}^{1/2} + \sum_{i=0}^p \|u\|_{\infty}^{[0, \frac{1}{2}]} + \|z\|_{\infty}^{1/2} \underbrace{\sum_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \frac{1}{2^{j-1}(j-1)!}}_{\leq \sqrt{\varepsilon}(p+1) \leq 2(p+1)} \right) \|G^{-1}\|_{\infty} \max(\|z\|_{\infty}^{3/2}, \|z\|_{\infty}).$$

$$\|v\|_{\infty}^{[0,1]} \leq (l+4p+5) \|z\|_{\infty}^{1/2} \|G^{-1}\|_{\infty} \max(\|z\|_{\infty}^{3/2}, \|z\|_{\infty}).$$

Il ne reste plus qu'à constater que $G = \|z\|_{\infty} A$ où $A \in \mathcal{M}_{l+1+(p+1)(q+1)}(\mathbb{R})$ est une matrice indépendante de z pour conclure que :

$$\|v\|_{\infty}^{[0,1]} \leq (l+4p+5) \|A^{-1}\|_{\infty} \max(\|z\|_{\infty}^{1/2}, \|z\|_{\infty}).$$

Dépendance en temps : on utilise à nouveau un argument de dilation du temps afin d'estimer $\|v\|_{\infty}^{[0,T]}$ pour $T > 0$. On définit pour $t \in [0, T]$, $v(t) = \bar{v}\left(\frac{t}{T}\right)$, $\bar{v} \in C_c^{\infty}(0, 1)$. Alors :

$$\|v\|_{\infty}^{[0,T]} = \|\bar{v}\|_{\infty}^{[0,1]} \leq (l+4p+5) \|A^{-1}\|_{\infty} \max(\|\bar{z}\|_{\infty}^{1/2}, 1) \|\bar{z}\|_{\infty}^{1/2},$$

où le second membre a été modifié en \bar{z} .

$\forall i \in \llbracket 0, l \rrbracket$,

$$\int_0^T v(s)(T-s)^i ds \underset{x=s/T}{=} T^{i+1} \int_0^1 \bar{v}(x)(1-x)^i dx$$

$\forall (i, j) \in \llbracket 0, p \rrbracket \times \llbracket 0, q \rrbracket$,

$$\int_0^1 \bar{v}(x)(1-x)^i \bar{u}_j(x) dx = T^{-j} \int_0^1 \bar{v}(x)(1-x)^i u_j(Tx) dx \underset{s=xT}{=} T^{-j-i-1} \int_0^T v(s)(T-x)^i u_j(s) ds$$

Enfin, en posant $T_1 = \max_{j \in \llbracket 0, l \rrbracket} \left(T^{-\frac{j+1}{2}} \right)$, et $T_2 = \max_{j \in \llbracket 0, p+q \rrbracket} \left(T^{-\frac{j+1}{2}} \right)$,

$$\|v\|_{\infty}^{[0,T]} \leq (l+4p+5) \|A^{-1}\|_{\infty} \max(\max(T_1, T_2) \|z\|_{\infty}^{1/2}, 1) \max(T_1, T_2) \|z\|_{\infty}^{1/2}.$$

Pour $\|z\|_{\infty} \leq 1$, on a :

$$\|v\|_{\infty}^{[0,T]} \leq \underbrace{(l+4p+5) \|A^{-1}\|_{\infty} \max(\max(T_1, T_2), 1) \max(T_1, T_2)}_{=: C''(T)} \|z\|_{\infty}^{1/2}.$$

Ainsi, $C(T) = \max(C'(T), C''(T))$ convient. On a de plus, pour T assez petit, la formule suivante :

$$C(T) \leq \frac{\max(4 \|G((\chi_{\varepsilon_0} P_i)_i)^{-1}\|_{\infty}, (l+4p+5) \|A^{-1}\|_{\infty})}{T^{\max(k, l, p+q)+1}}. \quad \blacksquare$$

Remarque 13. On a en fait plus précisément, avec la même démonstration, l'estimation suivante :

$$\forall T > 0, \exists C(T) > 0 \text{ tel que } \forall \varepsilon \in]0, 1[, \forall z = \begin{pmatrix} (\lambda_i)_{0 \leq i \leq k} \\ (\mu_i)_{0 \leq i \leq l} \\ (\alpha_{i,j})_{\substack{0 \leq i \leq p \\ 0 \leq j \leq q}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k+l+2+(p+1)(q+1)}, \|z\|_{\infty} \leq 1,$$

$\exists u, v \in C_c^{\infty}((0, T), \mathbb{R})$ tel que (17) – (18) – (19) aient lieu, et

$$\|u\|_{\infty}^{[0,T]} \leq C(T) \|z\|_{\infty}^{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \|v\|_{\infty}^{[0,T]} \leq C(T) \|z\|_{\infty}^{1-\varepsilon}.$$

6 Vers un nouveau résultat

Les travaux que nous menons en ce moment ont pour vocation de démontrer un résultat positif de contrôlabilité d'un système à deux contrôles. Malheureusement, ce rapport à dû être produit avant d'être arrivé au bout de la démonstration du théorème en question. Les grandes lignes de la preuve ont été explorées, même si nous faisons encore face à quelques difficultés techniques. Ainsi, dans cette section, je vais énoncer le théorème que l'on conjecture être vrai, et les idées de preuve. Au cours de la fin du stage, et du début de la thèse, nous finirons ce travail. Ainsi, l'énoncé de ce théorème pourrait être modifié en fonction des avancements des travaux.

Theorème 12 (*Conjecture (Work in progress..)*)

Soient $f_0, f_1, f_2 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ des champs de vecteurs de classe C^∞ . On suppose que $f_0(0) = 0$, que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_{ad_{X_1}^{2k}}(0) = f_{ad_{X_2}^{2k}}(0) = 0$. Enfin, on suppose que

$$\text{Vect}(f_b(0), n(b) \leq 2) = \mathbb{R}^d.$$

Alors le système $x' = f_0(x) + uf_1(x) + vf_2(x)$ est STLC autour de $(0, 0)$.

Quelques idées de démonstration : il suffit de montrer que pour $z \in \mathbb{R}^d$, assez petit, alors il existe u_z, v_z des contrôles dépendant continûment de z tels que $x(T, (u_z, v_z), 0) = z + o(z)$, et $\|(u_z, v_z)\|_\infty^{[0, T]} \leq \|z\|^{1/2}$. On pourra conclure par le théorème du point fixe de Brouwer. En effet : soit z une cible. On considère : $F : b \in \mathbb{R}^d \mapsto b - x(T, (u_b, v_b), 0) + z \in \mathbb{R}^d$. La fonction est bien définie sur un voisinage de 0, elle clairement continue, par la dépendance des contrôles en la cible. De plus, pour $\|b\| \leq r$, pour $\|z\| \leq \frac{1}{2}r$,

$$\|F(b)\| = \|o(b) + z\| \leq \frac{1}{2}r + \|z\| \leq r.$$

Ainsi $F(\overline{B_{\mathbb{R}^d}(0, r)}) \subset \overline{B_{\mathbb{R}^d}(0, r)}$. Par suite, F , admet un point fixe, *i.e.*, il existe $b \in \mathbb{R}^d$ tel que $F(b) = b - x(T, (u_b, v_b), 0) + z = b$ donc $x(T, (u_b, v_b), 0) = z$. On peut donc atteindre toute cible assez petite, d'où la STLC.

Pour ce faire, on utilise le théorème 10, et on obtient ce développement de la solution par la formule de Magnus :

$$x(T, (u, v), 0) = \mathcal{Z}_2(T, (u, v))(0) + \mathcal{O}(\|(u, v)\|_\infty^3) + o(\|x(T, (u, v))\|).$$

On fixe une cible $z \in \mathbb{R}^d$. Le terme $\mathcal{O}(\|(u, v)\|_\infty^3)$ ne pose pas de problème si on parvient à trouver des contrôles u, v tels que $\|(u, v)\|_\infty^{[0, T]} \leq \|z\|^{1/2}$, on aura alors : $\mathcal{O}(\|(u, v)\|_\infty^3) = \mathcal{O}(\|z\|^{3/2}) = o(\|z\|)$.

De même, le terme $o(\|x(T, (u, v))\|)$ ne pose pas de problème. En effet, si on trouve des contrôles u, v tels que $\mathcal{Z}_2(t, (u, v))(0) = z + o(\|z\|)$, alors $o(\|x(T, (u, v))\|) = o(\|z\|)$.

Il suffit donc de montrer que pour $T > 0$ assez petit, et $\|z\|$ assez petit, il existe u, v des contrôles tels que $\mathcal{Z}_2(t, (u, v))(0) = z + o(\|z\|)$ et $\|(u, v)\|_\infty^{[0, T]} \leq \|z\|^{1/2}$.

Heuristiquement, on considère la base de Hall introduite précédemment, et :

$$\mathcal{Z}_2(T, (u, v))(0) = \sum_{b \in \mathcal{B}} \eta_b(T, (u, v)) f_b(0).$$

Soient $\underbrace{b_1, \dots, b_k}_{n(b_i)=1}, \underbrace{b_{k+1}, \dots, b_d}_{n_1(b_i)=n_2(b_i)=1}$ tels que $\text{Vect}(f_{b_i}(0), 1 \leq i \leq d) = \mathbb{R}^d$.

Les k premières directions sont linéairement contrôlables. Il faut :

- montrer que les directions perdues au niveau du linéaire peuvent être rattrapées du point de vue quadratique

- montrer que l'on peut effectuer le contrôle linéaire et quadratique simultanément.

Pour la première étape : on travaille sur $\sum_{\substack{b \in \mathcal{B}, \\ |b| \leq L, \\ n(b)=1 \text{ ou } 2}} \eta_b(T, {}^t(u, v)) f_b(0)$, la série tronquée, et on

montre que le reste de la série est petit (quantifiée en fonction de T) : pour cela il faut utiliser l'homogénéité des fonctionnelles de seconde espèce. On utilise alors le lien entre η_b et ξ_b , et on montre que les termes d'erreur sont aussi petit que voulu, une fois que l'on est parvenu à annuler les premiers. Puisqu'ils s'écrivent comme une série en $u_j(T)v_k(T)$, on choisit u et v comme des dérivées (d'ordre assez grand) de fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(0, T)$. Enfin, au vu de la forme des fonctions ξ_b calculées précédemment, on utilise le lemme sur la résolution du problème de moments pour que la somme partielle vaille exactement la projection sur la cible de $\text{Vect}(f_{b_i}(0), k+1 \leq i \leq d)$. On sera donc parvenu à rattraper les directions perdues au linéaire à l'aide du quadratique, à $o(\|z\|)$ près.

Pour la seconde étape : on utilise un problème de moments linéaires et on voit le terme quadratique comme une perturbation du terme linéaire (que l'on traite par théorème d'inversion locale). Cette partie n'a pour l'instant été que peu explorée, et simplement sous l'hypothèse du système dont le linéarisé est sous forme de Brunovsky.

Références

- [1] Karine Beauchard, Jérémy Le Borgne, and Frédéric Marbach. *On expansions for nonlinear systems, error estimates and convergence issues*, arXiv : 2012.15653v2, 2022.
- [2] Jean-Michel Coron. *Control and Nonlinearity*, American Mathematical Society, 2007.
- [3] Mégane Bournoissou. *Contrôlabilité locale de l'équation bilinéaire de Schrödinger 1D*, Manuscrit de thèse, 2022.
- [4] Frédéric Marbach. *Finite dimension*, Cours de M2 de contrôle, UFR de Mathématiques de Rennes, 2022.
- [5] Matthias Kawski. *High-Order Small-Time Local Controllability*, 1987.
- [6] Krener. *On the equivalence of control systems and the linearization of nonlinear systems*, SIAM J. Control Optim., 1973.
- [7] Ronald Douglas. *On majorization, factorization, and range inclusion of operators on hilbert space*