19 Calcul différentiel

Exercice 19.1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0.$$

Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$ mais que les applications partielles en ce point le sont. De plus, montrer que f admet des dérivées partielles premières en $(0,0)$ mais qu'elle n'admet pas de dérivée suivant tous les vecteurs en $(0,0)$.

Exercice 19.2

Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on pose $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
1. f admet-elle un prolongement continu à $\mathbb{R}^2$?
2. f admet-elle un prolongement $\mathcal{C}^1$ à $\mathbb{R}^2$?
3. f admet-elle un prolongement $\mathcal{C}^2$ à $\mathbb{R}^2$?

Exercice 19.3

Soit $\alpha > 0$. Étudier, en fonction de α, la continuité puis la différentiabilité à l'origine de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2+3y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Exercice 19.4

Déterminer la différentielle du det sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 19.5

Déterminer la différentielle de $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^{-1} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 19.6

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $f(M) = (\mathrm{tr}(M), ..., \mathrm{tr}(M^n))$. Montrer que f est différentiable pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser $df(M)$.

Exercice 19.7

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle$ et u un endomorphisme symétrique continu de E.
1. Montrer que l'application $x \in E \mapsto \langle u(x), x \rangle \in \mathbb{R}$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle.
2. Soit $\varphi : x \in E \backslash \{0\} \mapsto \frac{\langle u(x), x\rangle}{\|x\|^2} \in \mathbb{R}$. Établir qu'il s'agit d'une application différentiable et calculer sa différentielle. Montrer que pour tout élément non nul a de E, $d\varphi(a) = 0$ si et seulement si a est un vecteur propre de u.

Exercice 19.8

Extrema de la fonction $f:(x,y)\mapsto -2(x-y)^2+x^4+y^4$.

Exercice 19.9

Déterminer les extrema locaux des fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ suivantes :
1. $f(x,y)=x^2+xy+y^2-3x-6y$.
2. $f(x,y)=x^2+2y^2-2xy-2y+1$.
3. $f(x,y)=x^3+y^3$.
4. $f(x,y)=(x-y)^2+(x+y)^3$.

Exercice 19.10

Pour chacun des exemples suivants, démontrer que f admet un maximum sur K, et déterminer ce maximum.
1. $f(x,y)=xy(1-x-y)$ et $K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x,y\geq 0,\quad \text{et}\quad x+y\leq 1\right\}$.
2. $f(x,y)=x-y+x^3+y^3$ et $K=[0,1]^2$.
3. $f(x,y)=\sin(x)\sin(y)\sin(x+y)$ et $K=[0,\pi/2]^2$.

Exercice 19.11

Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :
1. $2\partial_x f-\partial_y f=0$ en posant $u=x+y$ et $v=x+2y$.
2. $x\partial_y f-y\partial_x f=0$ en passant en polaire.
3. $x^2\partial^2_{x,x}f+2xy\partial^2_{x,y}f+y^2\partial^2_{y,y}f=0$ sur $]0,+\infty[$ en posant $x=u$ et $y=uv$.

Exercice 19.12

Chercher toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\partial_x f-3\partial_y f=0$.

Exercice 19.13 (Équation des ondes)

Soit $c\neq 0$. Chercher les solutions de classe $\mathcal{C}^2$ de l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$c^2\partial^2_{xx}f=\partial^2_{tt}f,$$

à l'aide d'un changement de variables de la forme $u=x+at$, $v=x+bt$.

Exercice 19.14

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a $|f(x)-f(y)|\leq\|x-y\|^2$. Démontrer que f est constante.

Exercice 19.15 (Généralisation du théorème de Rolle)

Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ différentiable. On note S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ et B la boule unité ouverte. On suppose que f est constante sur S. Démontrer l'existence de $x_0\in B$ tel que $df(x_0)=0$.