7 Convexité

Exercice 7.1

1. $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est-il un convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques (matrices $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall (i,j) \in \{1,\dots n\}^2, a_{i,j} \geq 0$ et $\forall i \in \{1,\dots,n\}, \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$) est un convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-il un convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 7.2 (Inégalités de Hölder et de Minkowski)

Soient $(p,q) \in [1,+\infty[^2$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$

1. Montrer que pour $(x,y) \in [1,+\infty[^2,\ xy \leq \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$.
2. En déduire que $\forall ((a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$,

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q}$$

2. En déduire que $\forall ((a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q}$$

Exercice 7.3

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue, telle que : $\forall (x,y) \in I^2,\ f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leq \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$

Montrer que f est convexe.

Exercice 7.4

Soit $f : I \to J$ convexe et strictement monotone. Étudier la convexité de f^{-1}.

Exercice 7.5

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ convexes. Les fonctions $\inf(f,g)$ et $\sup(f,g)$ sont-elles convexes ?

Exercice 7.6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et majorée. Montrer que f est constante.

Exercice 7.7 (Inégalité de Jensen intégrale)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction convexe continue et $g : [a,b] \to I$, continue. Montrer que

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\mathrm{d}t\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(g(t))\mathrm{d}t.$$