24 Équations différentielles linéaires

24.1 Révisions de sup

Exercice 24.1

Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. $x\ln(x)y' + y = x$ sur $I =]1, +\infty[$.
2. $xy' + 3y = \frac{1}{1+x^2}$ sur $I =]0, \infty[$.
3. $(1-x)^2y' = (2-x)y$ sur $I =]-\infty, 1[$.
4. $x(xy' + y - x) = 1$ sur $I =]-\infty, 0[$.
5. $y'\sin(x) - y\cos(x) + 1 = 0$ sur $I =]0, \pi[$.
6. $y' + y = e^{2x}$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 24.2

Déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ de l'E.D.O. $y' + y\tanh(x) = 0$ prenant la valeur 1 en 0.

Exercice 24.3

Résoudre l'équation différentielle $(1-x^2)y' - 2xy = x^2$ sur chacun des intervalles I suivants : $I =]1, +\infty[$, $I =]-1, 1[$, $I =]-1, +\infty[$ et $I = \mathbb{R}$.

Exercice 24.4

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 2y' + 2y = \cos(x)\cosh(x)$.
2. $y'' + 6y' + 9y = e^{2x}$
3. $y'' - 2y' + y = \cosh(x)$.
4. $y'' - 2ky' + (1+k^2)y = e^x\sin(x)$, pour $k \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Exercice 24.5

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T \neq 0$. Montrer que l'équation différentielle $y' + ay = f$ admet une et une seule solution périodique sur $\mathbb{R}$, de période T.

Exercice 24.6

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 24.7

Résoudre les équations différentielles suivantes :
1. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$, sur $\mathbb{R}_+^*$. On pourra introduire le changement de variables $z(t) = y(e^t)$.
2. $xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$ sur $\mathbb{R}$. On pourra introduire $z(t) = y(t)t$.

Exercice 24.8

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x$.

Exercice 24.9

L'accroissement de la population P d'un pays est proportionnel à cette population. La population double tous les 50 ans. En combien de temps triple-t-elle ?

24.2 Programme de spé

24.2.1 Résolution explicite

Exercice 24.10

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les systèmes différentiels

$$\begin{cases} x' &= 4x - 2y + e^t \\ y' &= 3x - y + 2e^t \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' &= 3x + y \\ y'' &= 2x + 2y \end{cases}$$

Exercice 24.11

Résoudre sur $I =]0, +\infty[$ l'équation $t^2 y'' + ty' - y = 0$ en cherchant des solutions sous la forme $y(t) = t^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 24.12

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(t^2 + 2t + 2)y'' - 2(t + 1)y' + 2y = 0$ en cherchant des solutions polynomiales.

Exercice 24.13

Résoudre sur $]-1, 1[$ l'équation $(1 - t^2)y'' - 4ty' - 2y = 0$ en cherchant des solutions développables en série entière.

Exercice 24.14

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^t}{1 + t^2}$.

Exercice 24.15

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(1+e^x)y''+2e^x y'+(2e^x+1)y = e^x$ en posant $z(x) = (1+e^x)y(x)$.

Exercice 24.16

Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation $x^2 y'' + xy' - \left(x^2 + \dfrac{1}{4}\right) y = 0$ en posant $y(x) = x^\alpha z(x)$.

Exercice 24.17

Résoudre sur $]0, 1[$ l'équation $x(1 - x)y'' + (1 - 3x)y' - y = 0$ en cherchant une solution développable en série entière.

Exercice 24.18

Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$ en posant $x = e^t$.

Exercice 24.19

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(x^2 + 1)^2 y'' + 2x(x^2 + 1)y' + 4y = 0$ en posant $t = \arctan(x)$.

Exercice 24.20

Résoudre sur des intervalles à préciser l'équation $y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}$.

24.2.2 Étude qualitative

Exercice 24.21

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que A est antisymétrique ssi chaque solution X de $X' = AX$ est de norme (euclidienne) constante.

Exercice 24.22

Soient $p, q : [0,1] \to \mathbb{R}$, continues. On étudie l'équation différentielle sur $[0,1]$, $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$. Montrer que si une solution possède une infinité de racines, elle est nulle.

Exercice 24.23

On étudie l'équation différentielle $y'' + e^{-x}y = 0$. Soit f une solution bornée sur $[0, +\infty[$.
1. Montrer que la dérivée, f', admet une limite finie en $+\infty$. Quelle est cette limite ?
2. Soit g une solution bornée sur $[0 + \infty[$. En étudiant le wronskien de f et de g, établir que les fonctions f et g sont liées. Qu'en déduire ?

Exercice 24.24

On considère l'équation différentielle $y'' - q(x)y = 0$, avec q, continue et positive sur $\mathbb{R}$.
1. Soit y une solution sur $\mathbb{R}$. Étudier la convexité de y^2. En déduire que si $y(0) = y(1) = 0$, alors la solution est nulle sur $\mathbb{R}$.
2. Soient y_1 et y_2 deux solutions telles que $(y_1(0), y_1'(0)) = (0,1)$ et $(y_2(1), y_2'(1)) = (0,1)$. Démontrer que (y_1, y_2) forme une base de l'espace des solutions.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Démontrer que l'équation $y'' - q(x)y = f(x)$ admet une unique solution vérifiant $y(0) = y(1) = 0$.

Exercice 24.25

Soient $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues telles que pour $x \in \mathbb{R}$, $a(x) \geq 1$.
1. On suppose ici que la limite en $\lim\limits_{x \to +\infty} b(x) = 0$. Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}$ de $y' + ay = b$ admet la limite 0 en $+\infty$.
2. On suppose ici que la limite en $\lim\limits_{x \to -\infty} b(x) = 0$. Montrer qu'il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$ de $y' + ay = b$ admet la limite 0 en $-\infty$.

Exercice 24.26

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + f'(x)) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Exercice 24.27

Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue non identiquement nulle. Soit f une solution de $y'' + p(x)y = 0$, on suppose qu'elle ne s'annule pas
1. Justifier que f est de signe constant. On supposera $f > 0$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Justifier que la courbe de f est en-dessous de sa tangente en $(a, f(a))$.
3. Conclure.