19 Développements limités

Exercice 19.1

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\pi/2}(\sin(x))^{1/(2x-\pi)} \qquad \lim_{x\to\pi/2}|\tan(x)|^{\cos(x)} \qquad \lim_{x\to 0}(\cos(x))^{\ln(|x|)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right)+\sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right)^n \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)\ln(1+x^2)}{x\tan(x)} \qquad \lim_{x\to 0}(\cos(x))^{1/\sin^2(x)} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x-\frac{3}{2}\sin(2x)}$$

$$\lim_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\tan\left(\frac{x\pi}{2a}\right)},\ \text{où } a\neq 0 \qquad \lim_{x\to\pi/6}\left(\tan\left(\frac{3x}{2}\right)\right)^{\tan(3x)} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin(x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}+c^{1/x}}{3}\right)^x \ \text{où } a,b,c>0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))},\ b\neq 0.$$

Exercice 19.2

Soit $f : x \in\ ]-1,0[\,\cup\,]0,+\infty[\ \mapsto \dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{\ln(x+1)}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0.

Exercice 19.3

Déterminer $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{\ln(x+1)}+\frac{\alpha}{x}+\beta\right)=0$ et déterminer alors un équivalent de l'expression ci-dessus au voisinage de 0.

Exercice 19.4

Soit $f : x\in\ ]-\pi/2,\pi/2[\ \mapsto \dfrac{e^{\sqrt{1+\sin(x)}}-e}{\tan(x)}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0. Préciser la position de la tangente à f en 0 par rapport à sa courbe au voisinage de 0.

Exercice 19.5

Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x)=x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 19.6

Étudier les banches infinies de l'application f définie par $f(x)=x^2\arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$.

Exercice 19.7

On considère l'application $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt[3]{x^3+ax^2+1}$. Déterminer le réel a tel que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$. Déterminer alors un équivalent de f en $-\infty$.

Exercice 19.8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2+2x+2)$. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 et étudier la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de ce point.

Exercice 19.9

Calculer les développements limités suivants :
1. $\dfrac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3 en 0.
2. $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ à l'ordre 4 en 0.
3. $\sin(x)\cos(2x)$ à l'ordre 6 en 0.
4. $(x^3+1)\sqrt{1-x}$ à l'ordre 3 en 0.
5. $(\ln(1+x))^2$ à l'ordre 4 en 0.
6. $\dfrac{1}{x^2+x+1}$ à l'ordre 4 en 0.
7. $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0.
8. $\dfrac{\sin(x)-1}{\cos(x)+1}$ à l'ordre 2 en 0.
9. $(\cos(x))^{\sin(x)}$ à l'ordre 5 en 0.
10. $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\mathrm{dt}$ à l'ordre 5 en 0.
11. $\dfrac{1}{x}$ à l'ordre 3 en 2.
12. $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \ln(x)$ à l'ordre 4 en $+\infty$.

Exercice 19.10

1. Soit $n \geq 1$. Montrer que l'équation $\tan(x) = x$ possède une solution unique x_n dans l'intervalle $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.
2. Quelle relation lie x_n et $\arctan(x_n)$?
3. Montrer que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$. En déduire un développement asymptotique à 4 termes.