29 Groupe symétrique

Exercice 29.1

On considère la permutation σ suivante de $\mathcal{S}_{12}$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 12 & 1 & 10 & 9 & 11 & 4 & 3 & 2 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Décomposer σ en produits de cycles à supports disjoints.
2. Décomposer σ en produits de transpositions.
3. Quelle est la parité de σ ?
4. Calculer l'entier minimum n non nul, tel que $\sigma^n = I_d$. En déduire σ^{2022}.

Exercice 29.2

Pour $n \geq 1$, on note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}_n$ de signature égale à 1
1. Démontrer que $\mathcal{A}_n$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$.
2. Énumérer tous les éléments de $\mathcal{A}_3$ et de $\mathcal{A}_4$.
3. On suppose désormais que $n \geq 2$ et on fixe τ une transposition de $\mathcal{S}_n$. Démontrer que $\varphi : \sigma \in \mathcal{S}_n \mapsto \sigma \circ \tau \in \mathcal{S}_n$ est une bijection. En déduire le cardinal de $\mathcal{A}_n$.

Exercice 29.3

Soit $n \geq 2$.
1. Démontrer que $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions $(12), (1,3), \cdots, (1,n)$.
2. Démontrer que $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions $(12), (2,3), \cdots, (n-1,n)$.
3. On considère la transposition $t = (12)$ et le cycle $c = (123\cdots n)$. Calculer $c^k t c^{-k}$. En déduire que $\mathcal{S}_n$ est engendré par t et c.