22 Intégration

Exercice 22.1

1. Montrer que $x \mapsto \cos(x^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 22.2

Soient f, g deux fonctions uniformément continues et bornées sur $I \subset \mathbb{R}$. Montrer que fg est uniformément continue. Contre-exemple quand f, g ne sont plus supposées bornés ?

Exercice 22.3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ existent dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 22.4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe $a, b \geq 0$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq a|x| + b$.

Exercice 22.5

Soient f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$. On pose $M(\alpha) = \max\limits_{x\in[a,b]} (f(x)+\alpha g(x))$. Montrer que M est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Exercice 22.6

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) = 0$.

Exercice 22.7

Soient f, g continues sur $[0, 1]$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

Exercice 22.8

Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{1/n} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \lfloor\sqrt{k}\rfloor \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{1+e^{nt}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n \ln(1+x)\mathrm{d}x \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(\left(1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right) \cdots \left(1+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)\right)^{1/n}.$$

Exercice 22.9

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n \int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = f(1)$

Exercice 22.10

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$. Que dire sur f ?

Exercice 22.11

Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

Exercice 22.12 (Jensen)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que

$$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g \circ f(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 22.13

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet au moins un point fixe dans $[0, 1]$.

Exercice 22.14

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et positive. Calculer $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f(x)^n\mathrm{d}x\right)^{1/n}$.

Exercice 22.15 (Théorème de la moyenne)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 22.16

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $u_n = \int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$. Calculer la limite de $(u_n)_n$. On suppose $f(1) \neq 0$ et $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Déterminer un équivalent de $(u_n)_n$.

Exercice 22.17

Soit $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$. Déterminer le domaine de définition de f, son imparité, étudier ses variations, puis l'existence de ses limites au bord de l'intervalle de définition.

Exercice 22.18

Montrer que pour $n \geq 2$, $\int_{n-1}^{n} \ln(t)\mathrm{d}t \leq \ln(n) \leq \int_n^{n+1} \ln(t)\mathrm{d}t$. En déduire un équivalent de $\ln(n!)$ en $+\infty$.