4 Nombres complexes (2)

Exercice 4.1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
1. $z^2 - (6+i)z + 11 + 13i = 0$.
2. $2z^2 - (7+3i)z + (2+4i) = 0$.
3. $z^2 - 2iz + 2 - 4i = 0$.
4. $z^3 - i = 6(z+i)$.
5. $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$.

Exercice 4.2

Résoudre $(z+1)^n = \cos(2na) + i\sin(2na)$.
En déduire
$$P_n = \sin(a)\sin\left(a+\frac{\pi}{n}\right)\ldots\sin\left(a+\frac{\pi(n-1)}{n}\right).$$

Exercice 4.3

Soit $\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}$ les racines $n-$ième de l'unité. Pour $p \in \mathbb{Z}$, calculer $S_p = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^p$.

Exercice 4.4

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation, pour $n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{R}$:
$$\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}.$$

Exercice 4.5

Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{C}$:
$$1 + 2z + 2z^2 + \cdots + 2z^k + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0.$$

Exercice 4.6

Nature et éléments caractéristiques de la transformation d'expression complexe :
1. $z' = z + 3 - i$
2. $z' = 2z + 3$
3. $z' = iz + 1$
4. $z' = (1-i)z + 2 + i$

Exercice 4.7

Résoudre l'équation $z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = 0$ sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.

Exercice 4.8

Résoudre l'équation $4iz^3 + 2(1+3i)z^2 - (5+4i)z + 3(1-7i) = 0$ sachant qu'elle admet une solution réelle.