Exercice (X - Algèbre)

Soit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire $(X|Y) = {}^tXY$ et de sa norme euclidienne associée. On note $\mathcal{U}$ l'ensemble des vecteurs unitaires. Soit $A = (a_{i,j})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique dont on note $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres rangées dans un ordre croissant, $(X_1, \cdots, X_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associées. On note $V_0 = \{0\}$ et $\forall 1 \leq k \leq n$, $V_k =$Vect$(X_1, \cdots, X_k)$. Enfin, pour $X \in \mathcal{U}$, $\varphi(X) = (AX|X)$. Soit $1 \leq k \leq n$.
1. Montrer que $\lambda_k = \max\limits_{X \in V_k \cap \mathcal{U}} \varphi(X) = \min\limits_{X \in V_{k-1}^{\perp} \cap \mathcal{U}} \varphi(X)$.
2. Montrer que $\lambda_1 \leq a_{k,k} \leq \lambda_n$.
3. Soit $\mathcal{W}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de E. Montrer que

$$\lambda_k = \min_{W \in \mathcal{W}} \left(\max_{X \in W \cap \mathcal{U}} \varphi(X) \right).$$

Exercice (X - Algèbre)

Soit $n \geq 2$. Déterminer le spectre de la comatrice de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en fonction de celui de A.

Exercice (X - Algèbre)

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$. On définit :

$$I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] | P(u)(x) = 0\}.$$

1. Montrer l'existence d'un unique polynôme unitaire $\pi_{u,x} \in \mathbb{K}[X]$ tel que $I_x = \pi_{u,x}\mathbb{K}[X]$. Montrer que $\pi_{u,x} | \pi_u$.
2. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$.
3. On dit qu'un endomorphisme est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E = \text{Vect}(x^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$. Montrer l'équivalence :

$$u \text{ est cyclique } \Leftrightarrow \pi_u = \chi_u.$$

Exercice (X - Algèbre)

Calculer $\det(A)$ où $A = (\text{pgcd}(i,j))_{i,j}$.

Exercice (X - Analyse)

1. Soit $(f_n)_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions $M-$lipschitzienne qui converge simplement vers f. Montrer que la convergence est uniforme. Même question dans le cas de fonctions convexes.

On considère $(E, ||.||_E)$ un espace vectoriel normé, et K une partie compacte non vide de E.
2.a. Soit $(F_n)_n$ une suite décroissante de fermés, non vides, de K. Montrer que :

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} F_n = \emptyset.$$

2.b. Soit $f_n : K \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues qui converge simplement sur K vers une fonction continue f. Montrer que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, alors la convergence est uniforme.

Exercice (X - Analyse)

Soit $n \geq 1$, et $u_n = \left(\prod_{k=n}^{2n} k^k\right)^{1/n}$. Donner un équivalent de u_n.

Exercice (X - Analyse)

Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 0} \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$?

Exercice (Centrale - Algèbre)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, et V et W deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = V \oplus W$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorsphime $V-$stable et $W-$stable.
1. Montrer que u induit un endomorphisme sur V, noté u', et sur W, noté u''.
2. On note $\chi_u, \chi_{u'}, \chi_{u''}$ les polynômes caractéristiques des endomorphismes respectifs u, u' et u''. Montrer que $\chi_u = \chi_{u'}\chi_{u''}$.
3. On note $\pi_u, \pi_{u'}, \pi_{u''}$ les polynômes minimaux des endomorphismes respectifs u, u' et u''. Montrer que $\pi_u = \mathrm{ppcm}(\pi_{u'}, \pi_{u''})$.
4. Montrer que si P est un polynôme irréductible unitaire et si P^α annule u, alors $\chi_u = P^\beta$.
5. On considère la décomposition en produit de facteurs premiers :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{r} P_i^{\alpha_i}.$$

Montrer que $\dim(\ker((P_i^{\alpha_i}(u))) = \alpha_i \deg(P_i)$.
6. Montrer que $\chi_u = \pi_u$ ssi $\forall k \leq \alpha_i$, $\dim(\ker(P_i^k(u))) = k\deg(P_i)$.

Exercice (Centrale - Algèbre)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $x \in E$, on définit :

$$I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] | P(u)(x) = 0\}.$$

1. Montrer qu'il existe $\pi_{u,x} \in \mathbb{K}[X]$ tel que $I_x = (\pi_{u,x})$.
2. Montrer que si x, y sont deux vecteurs de E, tels que $\mathrm{pgcd}(\pi_{u,x}, \pi_{u,y}) = 1$, alors $\pi_{u,x+y} = \pi_{u,x}\pi_{u,y}$.
3. Montrer que si $\pi_u = P^\alpha A$ où P est irréductible et $\mathrm{pgcd}(P, A) = 1$, alors, il existe $x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = P^\alpha$.
4. En déduire qu'il existe $x \in E$ tel que $\pi_u = \pi_{u,x}$.

Exercice (Centrale - Algèbre)

Soit $n \geq 1$, on définit

$$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mid \forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tXAX \geq 0\right\}.$$

1. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ ssi $Sp(A) \subset \mathbb{R}^+$.
2. On considère $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, et $\alpha > 0$. Définissons :

$$S_\alpha = \left\{M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \mid \det(M) \geq \alpha\right\}.$$

Le but est de démontrer que :

$$\inf_{M \in S_\alpha} \mathrm{tr}(AM) = n\left(\alpha \det(A)\right)^{1/n}.$$

Démontrer la formule dans le cas où $A = I_n$.
3. Montrer que toute matrice A symétrique réelle positive peut s'écrire $A = {}^tPP$ avec P matrice carrée de taille n.
4. Démontrer la formule.
5. Le résultat est-il encore vrai si $\alpha = 0$? Si A n'est plus que symétrique réelle ?

Exercice (Centrale - Algèbre)

1. Soit u un endomorphisme inversible d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E de dimension finie. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant

$$u^{-1} = Q(u).$$

2. Montrer que $\forall P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P(u) \in \mathcal{GL}(E) \Leftrightarrow \ \text{pgcd}(\pi_u, P) = 1.$$

3. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ qui envoie le polynôme $P(X)$ sur $P(2X)$. Montrer que u est un automorphisme et déterminer ses éléments propres. Existe-t-il $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $u^{-1} = Q(u)$?

Exercice (Centrale - Algèbre)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
1. Montrer que si A et B sont inversibles, alors com(AB)=com(A)com(B). Et sinon ?
2. Si A et B sont semblables, montrer que com(A) et com(B) sont semblables.
3. Déterminer tr(com(A)) en fonction du polynôme caractéristique de A.

Exercice (Centrale - Algèbre)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Discuter du rang de la comatrice de A en fonction du rang de A. Résoudre ensuite l'équation $A = \text{com}(A)$.

Exercice (Centrale - Algèbre)

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie n, et $u \in \mathcal{L}(E)$.
1. On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée. Montrer que u est une homothétie.
2. Montrer que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice à diagonale nulle.
3. Montrer que sont équivalentes les assertions suivantes pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$(i) : \ \text{tr}(A) = 0.$$

$$(ii) : \ \exists (U, V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \ A = UV - VU.$$

Exercice (Centrale - Analyse)

Soit $n > 0$ et $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n(t)\mathrm{d}t$.
1. Trouver la limite de $(a_n)_n$.
2. Trouver une relation simple entre a_{n+2} et a_n.
3. On pose

$$u_n(x) = \frac{a_n}{n^\alpha} x^n.$$

Donner la nature de la série de terme général $u_n(x)$ en fonction de x et de α.

4. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice (Centrale - Analyse)

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$.
1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.
2. Étudier la convergence en $-R$ et en R.
3. Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \mapsto 1^-$.
4. Montrer que quand $x \mapsto 1^-$, $(1-x)f(x) \mapsto 0$.

Exercice (Centrale - Probabilités)

Chez le marchand de journaux, on peut acheter des pochettes contenant chacune une image. La collection complète comporte N images distinctes.
1. Montrer qu'il est presque sûr d'obtenir la collection complète en un nombre fini d'achats.
On limite l'étude à un espace probabilisé dans lequel la collection complète est toujours obtenue en un nombre fini d'achats. Pour $k \in \{1, \dots, N\}$, on note $X_k \in \mathbb{N}^*$ le nombre d'achats ayant permis d'obtenir k images distinctes.
2. Pour $k \in \{1, \dots, N-1\}$, quelle est la loi de $X_{k+1} - X_k$?
3. En déduire une expression de l'espérence de X_N.

Exercice (Centrale 2)

On définit sur $\mathbb{N}^*$ la fonction μ ainsi :

- si $n = 1$, $\mu(n) = 1$.
- si n a un facteur carré, $\mu(n) = 0$.
- sinon, en notant $n = p_1 \cdots p_k$ la décomposition en facteurs premiers de n, on a $\mu(n) = (-1)^k$.

1) Écrire une fonction Python **liste_P** qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoie la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à n.
2) Écrire une fonction **mu** qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoie $\mu(n)$.
3) Montrer que μ est une fonction multiplicative, c'est-à-dire que pour tout entiers $n, m \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux, $\mu(nm) = \mu(n)\mu(m)$.
4) On considère désormais la fonction S définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$S(n) = \sum_{d|n} \mu(d).$$

a. À l'aide de la fonction de la quesion 2, conjecturer une formule pour calculer S. (On pourra afficher $S(k)$ pour $k \in \{1, \cdots, 10\}$).
b. Démontrer cette conjecture.
5. Soient f, g deux fonctions sur $\mathbb{N}^*$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ g(n) = \sum_{d|n} f(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

6. On admet que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ où φ désigne la fonction indicatrice d'Euler. En déduire une manière de calculer $\varphi(n)$ et l'implémenter sur Python.

Exercice (Centrale 2)

1) Soit G un groupe de cardinal $n \geq 1$. Montrer que G est cyclique si et seulement s'il existe un élément de G d'ordre n.
2) Programmer en **Python** une fonction qui renvoie le pgcd de deux entiers fournis en argument.
3. Créer une fonction qui renvoie dans une liste les générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Afficher les résultats pour n allant de 2 à 25.

On considère p un nombre premier impair, m un entier impair.

4) Calculer le cardinal de $(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^*$. Implémenter un algorithme qui calcule ce cardinal.
5) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $\lambda_k \in \mathbb{N}^*$ tel que $(p+1)^{p^k} = 1 + \lambda_k p^{k+1}$ où λ_k est premier avec p. En déduire que $(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^*$ possède un élément d'ordre p^{m-1}.
6) On admet que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est cyclique. Montrer qu'il existe un élément d'ordre $p-1$ dans $(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^*$.
7) En déduire que $(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^*$ est cyclique.

Exercice (Centrale 2)

Soit $p \in]0,1[$ et $n \geq 1$.
Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes de même loi $\mathbb{P}(X=1)=p$ et $\mathbb{P}(X=-1)=1-p$.

On pose $X_0 = 0$ et $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} X_i$.

1) Déterminer la loi de S_n.
2) Sur Python, créer une fonctin **marche_alea** prenant deux paramètres p et n qui simule une expérience aléatoire et renvoie une liste $[S_0(\omega), \cdots, S_n(\omega)]$ pour ω dans Ω.

3) Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements. Soit $B_n = \displaystyle\bigcup_{n=m}^{+\infty} A_m$. Montrer que $(B_m)_m$ est une suiste décroissante.

4) Si la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge, montrer que $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{m=0}^{+\infty} B_m\right) = 0$.

5) Désormais, on suppose que $p = \frac{1}{2}$. En utilisant la question 2, tracer une marche aléatoire pour $n = 100$. Tracer sur le même graphe les fonctions $x \mapsto \pm\sqrt{4x\ln(x)}$. Que conjecture-t-on ?

6) Comparer pour $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x^2/2)$ et $\cosh(x)$.

7)a) Soit $a > 0$, $u > 0$, et $n \geq 1$. Montrer que $\mathbb{P}(S_n \geq a) \leq \dfrac{\mathbb{E}(e^{uS_n})}{e^{ua}}$.

b) Montrer que $\mathbb{P}(S_n \geq a) \leq \exp\left(\dfrac{-a^2}{2n}\right)$, puis que $\mathbb{P}(|S_n| \geq a) \leq 2\exp\left(\dfrac{-a^2}{2n}\right)$.

8) Conclure en montrant que la probabilité qu'il y ait une infinité de $|S_n|$ plus grand que $\sqrt{4n\ln(n)}$ vaut 0.

Exercice (Centrale 2)

Soit (u_n) une suite de complexes, on notera R le rayon de convergence de la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et on note $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$.
1) Montrer que le rayon de convergence R' de g est $+\infty$ si $R > 0$.
2) On suppose à partir de maintenant que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = (n+2)u_{n+1} - (n+1)u_n.$$

a) Écrire un programme python qui calcule le terme d'ordre n de la suite en fonction de n, u_0 et u_1. Afficher les premiers termes pour $u_0 = u_1 = -1$ puis quand $u_0 = 1, u_1 = 2$. Déterminer f dans le cas où $u_0 = u_1$.
b) Montrer que R est non nul *ssi* $u_0 = u_1$ (on pourra utiliser une équation différentielle vérifiée par g).
3) On pose maintenant pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$. Trouver une relation entre v_{n+1} et v_n, en déduire une expression de u_n en fonction de n, u_0 et u_1, puis un équivalent. Vérifier-le numériquement.

Exercice (Mines - Algèbre)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est nilpotente ssi

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^2) = \cdots = \mathrm{tr}(A^n) = 0.$$

Exercice (Mines - Algèbre)

Montrer que deux matrices réelles somblables sur $\mathbb{C}$ sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice (Mines - Algèbre)

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel complexe E de dimension finie $n \geq 1$.
1. On suppose que f est diagonalisable. Montrer que f^2 est diagonalisable et que les noyaux de f et f^2 sont égaux.
2. Par un exemple, montrer que si f^2 est diagonalisable, f ne l'est pas forcément.
3. On suppose que f^2 est diagonalisable et inversible. Montrer que f est diagonalisable.
4. On suppose que f^2 est diagonalisable et $\ker(f) = \ker(f^2)$. Montrer que f l'est.
Application : soit $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que M est diagonalisable ssi AB l'est.

5. On suppose désormais que le corps de base est $\mathbb{R}$. On suppose que u^2 est diagonalisable. Montrer que

$$u \text{ est diagonalisable ssi } \mathrm{Sp}(u^2) \subset \mathbb{R}^+ \text{ et } \ker(u) = \ker(u^2).$$

Exercice (Mines - Algèbre)

Une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ admet-elle nécessairement une limite ?

Exercice (Mines - Algèbre)

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dont les déterminants sont premiers entre eux. Montrer qu'il existe $(U, V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})^2$ telles que $AU + BV = I_n$.

Exercice (Mines - Algèbre)

Déterminer les entiers naturels non nuls n pour lesquels il existe $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $f^3 + f^2 - Id_{\mathbb{R}^n} = 0$, et $\mathrm{tr}(f) \in \mathbb{Q}$.

Exercice (Mines - Algèbre)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n+1})$ tels que $u^3 = u$ et $\mathrm{tr}(u) = 0$ et $\mathrm{tr}(u^2) = 2n$.
1. Quelle est la dimension de $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n+1}),\ uv = vu\}$.
2. A-t-on $C(u) = \mathbb{R}[u]$?

Exercice (Mines - Analyse)

Développer en série entière la fonction suivante au voisinage de 0 :

$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t + t^2} \in \mathbb{R}.$$

Exercice (Mines - Analyse)

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2}\mathrm{d}t$.

Exercice (Mines - Analyse)

Soit (u_n) une série à termes positifs convergente. Peut-on préciser la nature de la série de terme général $v_n = u_0 u_1 ... u_n$?

Exercice (Mines - Analyse)

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x > 0,\ f'(x) = f(1/x).$$

Exercice (Mines - Analyse)

Pour $n \geq 0$, on définit :

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin(x)\right)\right)^n \mathrm{d}x.$$

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
2. Quelle est la nature de la série de terme général (u_n) ?

Exercice (Mines - Probabilités)

Un restaurant possède une infinité de tables, infinement longues. Les clients arrivent les uns après les autres. Le premier client choisit une table au hasard. Le $(n+1)$ ème client choisit une table (indépendamment du passé) : déjà occupée avec la probabilité $n/(n+\alpha)$, non occupé avec la probabilité $\alpha/(n+\alpha)$ où α est un réel strictement positif fixé. Soit A_n la variable aléatoire qui compte le nombre de tables occupées après que le $n$ème client se soit assis. On note $p_{n,k} = \mathbb{P}(A_n = k)$. pour $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
1. Calculer $p_{n,1}$, pus $p_{n+1,k}$ en fonction de $p_{n,k}$ et $p_{n,k-1}$.
2. Exprimer A_n comme somme de variables de Bernoulli.
3. Calculer l'espérence et la variance de A_n.
4. Trouver un équivalent de $\mathbb{E}[A_n]$. Montrer que $\mathbb{V}[A_n]$ admet le même équivalent.

Exercice (Analyse)

On définit, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\mathrm{d}t \quad \text{et } J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\mathrm{d}t$$

0. Montrer que l'intégrale suivante est convergente.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$$

1. Monter qu'elles sont bien définies, puis que $(I_n)_n$ est constante.
2. Montrer que si $\phi : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \phi(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t = 0$.
3. Montrez que $t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}$ se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$, et déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} (I_n - J_n) = 0$.
4. Conclure.

Exercice (Analyse)

On définit, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t(t+n)}\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est bien définie, puis que $\forall A > 0$,

$$\int_0^A \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t(t+n)}\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\left(\int_0^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t}\mathrm{d}t - \int_A^{A+n} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t}\mathrm{d}t\right)$$

2. En déduire une nouvelle expression intégrale de u_n.
3. On définit $v_n = nu_n$. Montrer que la série de terme général $v_n - v_{n-1} - \frac{1}{2n}$ converge. En déduire un équivalent de u_n.

Exercice (Analyse)

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, avec $\alpha < \beta$, et (f_n), une suite de fonctions $M-$lipschitzienne de $[\alpha, \beta]$. Montrer que si (f_n) converge simplement vers f sur $[\alpha, \beta]$, cette convergence est en fait uniforme. On pourra introduire une subdivison de l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

Exercice (Analyse)

Soit $\alpha > 0$. Étudier, en fonction de α, la continuité puis la différentiabilité à l'origine de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x, y) = \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Exercice (Analyse)

Montrer qu'une fonction localement lipschitzienne sur une partie compacte K de $\mathbb{R}^n$ l'est en fait globalement.

Exercice (Analyse)

Soit $(E, \|.\|)_E$ un espace vectoriel normé, et K une partie compacte non vide de E.
1. Soit $(F_n)_n$ une suite décroissante de fermé, non vides, de K. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.
2. Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction g continue de K dans $\mathbb{R}$. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice (Analyse)

1. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente, on définit $B(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} t^k N^k$, et $S(t) = e^{B(t)}$. Calculer $B'(t)$.
2. En déduire que $S''(t) = 0$, puis que $e^{B(1)} = I_n + N$.
3. En déduire que $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$, il existe $B \in \mathbb{C}$ tel que $e^B = \lambda I_n + N$.
4. En utilisant le théorème de réduction de Jordan, en déduire que $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective.
5. Montrer qu'elle n'est pas injective.
6. Montrer que $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \left\{M^2,\ M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})\right\}$.

Exercice (Analyse)

Soit n et k des entiers avec $n \geq 1$, et $0 \leq k \leq n$, on note $D_{n,k}$ le nombre de permutations de $\{1, \ldots n\}$ ayant k points fixes.
1. Montrer que $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$
2. Montrer que $D_n, k = \displaystyle\binom{n}{k} D_{n-k,0}$
3. On considère f la somme de la série génératrice de $\left(\frac{D_{n,0}}{n!}\right)$. Montrer que son rayon de convergence vaut au moins 1, puis calculer $e^x f(x)$, pour tout réel x de l'intervalle $]-1, 1[$.
4. En déduire une expression de $D_{n,0}$. Soit p_n la probabilité pour qu'une permutation prise au hasard soit un dérangement. Quelle est la limite de p_n ?