ALBI
L3, semestre 1 (2025-2026) - Groupe magistère
Université de Rennes - ENS Rennes

Solutions de deux exercices du TD 1

Exercice 12

Soit E, E' des K-espaces vectoriels, et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Montrer que $F \otimes E'$ s'identifie naturellement à un sous-espace vectoriel de $E \otimes E'$ et que :

$$(E \otimes E')/(F \otimes E') \simeq (E/F) \otimes E'.$$

Solution. Commençons par présenter un raisonnement très tentant, mais malheureusement erroné :

— $F \otimes E'$ est engendré par les éléments de la forme $x \otimes x'$ pour $x \in F$ et $x' \in E'$;
— $E \otimes E'$ est engendré par les éléments de la forme $x \otimes x'$ pour $x \in E$ et $x' \in E'$;
— Comme $F \subseteq E$, la première famille génératrice est contenue dans la seconde, donc elle engendre un sous-espace de $E \otimes E'$. Ceci montre que $F \otimes E'$ est un sous-espace vectoriel de $E \otimes E'$.

Où est l'erreur ? Elle se trouve dans le caractère imparfait de la notation $x \otimes x'$. En effet, cette notation ne désigne pas le même élément quand on l'écrit pour parler d'un tenseur élémentaire dans $F \otimes E'$ ou d'un tenseur élémentaire dans $E \otimes E'$. Donc les $x \otimes x'$ de la première ligne du raisonnement ne vivent pas dans le même espace que ceux de la deuxième ligne. Cela n'a donc aucun sens de parler d'inclusion entre ces parties génératrices. Une manière de se convaincre du fait que l'identification de $F \otimes E'$ à un sous-espace de $E \otimes E'$ n'est vraiment pas claire est (pour une fois !) de se souvenir de la construction du produit tensoriel. L'espace $E \otimes E'$ est obtenu en quotientant l'espace $K^{(E \times E')}$ des fonctions à support fini sur $E \times E'$ (dont une base est donnée par les fonctions $\delta_{(x,x')}$ qui valent 1 en (x, x') et 0 partout ailleurs) par le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions de la forme

$$\delta_{(x+\lambda y,x')} - \delta_{(x,x')} - \lambda\delta_{(y,x')} \quad \text{ou} \quad \delta_{(x,x'+\lambda y')} - \delta_{(x,x')} - \lambda\delta_{(x,y')} \tag{1}$$

pour $x, y \in E$ et $x', y' \in E'$. Ainsi, dans la construction de $F \otimes E'$, ce n'est pas le même espace qu'on quotiente, car on part de $K^{(F \times E')}$ au lieu de $K^{(E \times E')}$, et ce ne sont pas tout à fait les mêmes fonctions que l'on cherche à rendre nulles par passage au quotient, puisque cette fois ci on ne quotiente que par l'espace engendré par les fonctions de la forme (1) pour des $x, y \in F$, et pas pour tous les $x, y \in E$.

Heureusement, comme souvent avec les produits tensoriels, il ne sera pas nécessaire de revenir à cette construction pour démontrer le résultat demandé. Nous allons plutôt nous appuyer sur les propriétés du cours qui découlent de la propriété universelle du produit tensoriel. Pour montrer que $F \otimes E'$ s'identifie à un sous-espace de $E \otimes E'$, il nous suffit de construire une application linéaire injective de $F \otimes E'$ vers $E \otimes E'$. Pour cela, on peut s'appuyer sur le cours, qui nous permet de construire, étant données deux applications linéaires $u \in \mathcal{L}(V, W)$ et $v \in \mathcal{L}(V', W')$, leur produit tensoriel $u \otimes v \in \mathcal{L}(V \otimes V', W \otimes W')$.

Le choix le plus naturel est de considérer $\iota\colon F \to E$ l'inclusion canonique, et $\mathrm{id}_{E'}\colon E' \to E'$. Le produit tensoriel de ces deux application linéaires fournit

$$f := \iota \otimes \mathrm{id}_{E'}\colon F \otimes E' \to E \otimes E'$$

qui agit sur les tenseurs élémentaires comme suit : $f(x \otimes x') = \iota(x) \otimes \mathrm{id}_{E'}(x') = \iota(x) \otimes x'$. Il est essentiel de comprendre que le symbole $\otimes$ ne veut pas dire la même chose lorsque l'on écrit $x \otimes x'$ (où il désigne un élément de $F \otimes E'$) que lorsqu'on écrit $\iota(x) \otimes x'$ (où il désigne un élément de $E \otimes E'$). Dans la suite, nous allons donc garder la notation $\iota(x)$ pour clarifier à quel moment nous travaillons dans $F \otimes E'$, et à quel moment nous travaillons dans $E \otimes E'$.

Montrons que f est injective. Soit $t \in \ker(f)$. D'après le cours, si $(f_i)_{i\in I}$ désigne une base de F et $(e'_j)_{j\in J}$ une base de E', alors $(f_i \otimes e'_j)_{i\in I, j\in J}$ est une base de $F \otimes E'$. On peut donc décomposer t dans cette base et l'écrire

$$t = \sum_{i,j} \lambda_{i,j}(f_i \otimes e'_j)$$

où seul un nombre fini de $\lambda_{i,j}$ sont non nuls. Par linéarité de f, le fait que $t \in \ker(f)$ se traduit donc par

$$\sum_{i,j} \lambda_{i,j} f(f_i \otimes e'_j) = 0$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i,j} \lambda_{i,j} \iota(f_i) \otimes e'_j = 0. \tag{2}$$

Maintenant, la famille $\{\iota(f_i),\ i \in I\}$ est une famille libre de E (c'est une base du sous-espace F), donc elle peut être complétée en une base de E, disons

$$\mathcal{B} := \{\iota(f_i),\ i \in I\} \cup \{g_\ell,\ \ell \in L\}$$

où $\{g_\ell,\ \ell \in L\}$ forme une base d'un supplémentaire de F dans E (tous ces faits classiques en dimension finie sont aussi vrais en dimension infinie si l'on accepte d'utiliser le lemme de Zorn, ce que l'on fait dans ce cours). Alors d'après le cours,

$$\{b \otimes e'_j,\ b \in \mathcal{B}, j \in J\}$$

est une base de $E \otimes E'$, donc la famille $\{\iota(f_i) \otimes e'_j,\ i \in I, j \in J\}$, qui en est extraite, est libre. Ainsi, (2) implique que tous les $\lambda_{i,j}$ sont nuls, et donc $t = 0$, ce qui conclut la preuve de l'injectivité. On a donc f qui est linéaire et injective de $F \otimes E'$ dans $E \otimes E'$, et c'est via cette flèche qu'on peut identifier $F \otimes E'$ à un sous-espace vectoriel de $E \otimes E'$ (explicitement, il s'agit du sous-espace $f(F \otimes E')$).

Maintenant, nous pouvons rendre l'énoncé plus rigoureux : en effet, même si $F \otimes E'$ n'est pas rigoureusement un sous-espace vectoriel de $E \otimes E'$, on nous demande de quotienter l'un par l'autre, ce qui n'a pas vraiment de sens ! Pour corriger ce léger abus de notation, il faut donc plutôt montrer que $(E \otimes E')/f(F \otimes E')$ est isomorphe à $(E/F) \otimes E'$, et cette fois-ci cela a un sens.

Pour montrer cela, nous allons tout d'abord construire une application linéaire surjective de $E \otimes E'$ vers $(E/F) \otimes E'$, et il ne restera plus qu'à montrer que son noyau est $f(F \otimes E')$ pour conclure d'après le théorème d'isomorphisme. Or nous disposons de l'application linéaire $\pi \colon E \to E/F$ et de $\mathrm{id}_{E'} \colon E' \to E'$, donc il suffit de considérer $\varphi := \pi \otimes \mathrm{id}_{E'}$ pour obtenir une application linéaire de $E \otimes E'$ dans $(E/F) \otimes E'$.

— Montrons que φ est surjective. Comme $(E/F) \otimes E'$ est engendré par les tenseurs élémentaires $\alpha \otimes x'$ pour $\alpha \in E/F$ et $x' \in E'$, il suffit de montrer que les éléments de cette forme sont dans l'image de φ. Or comme π est surjective, il existe $x \in E$ tel que $\alpha = \pi(x)$, de sorte que le tenseur élémentaire $x \otimes x' \in E \otimes E'$ fournit un antécédent de $\alpha \otimes x'$ par φ. En effet, $\varphi(x \otimes x') = (\pi \otimes \mathrm{id}_{E'})(x \otimes x') = \pi(x) \otimes x' = \alpha \otimes x'$.

— Montrons que $\ker \varphi = f(F \otimes E')$. Les éléments de $f(F \otimes E')$ sont des combinaisons linéaires d'éléments de la forme $f(x \otimes x')$ où $x \in F$ et $x' \in E'$. Si on montre que ces $f(x \otimes x')$ appartiennent au noyau de φ, on aura donc démontré une des inclusions. Or $\varphi(f(x \otimes x')) = \varphi(\iota(x) \otimes x') = \pi(\iota(x)) \otimes x' = 0 \otimes x' = 0$ car $\iota(x) \in F$. Ceci montre que $f(F \otimes E') \subseteq \ker \varphi$.

  Réciproquement, si $t \in \ker \varphi$, décomposons le dans la base $\{b \otimes e'_j,\ b \in \mathcal{B}, j \in J\}$ de $E \otimes E'$:

$$t = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} \iota(f_i) \otimes e'_j + \sum_{\ell,j} \mu_{\ell,j} g_\ell \otimes e'_j.$$

  (où les sommes sont finies). En appliquant φ à cet élément, toute la première somme donnera 0 dans $(E/F) \otimes E'$ par le même argument que précédemment, car π s'annule sur les $\iota(f_i)$, car ce sont des vecteurs de F. Ainsi, si $t \in \ker \varphi$, alors

$$\sum_{\ell,j} \mu_{\ell,j} \pi(g_\ell) \otimes e'_j = 0. \tag{3}$$

  Or d'après un exercice vu en TD, comme les g_ℓ forment une base d'un supplémentaire de F dans E, les $\pi(g_\ell)$ forment une base de E/F. Donc la famille

$$\{\pi(g_\ell) \otimes e'_j,\ \ell \in L, j \in J\}$$

  est une base de $(E/F) \otimes E'$. Ainsi, l'égalité (3) implique que tous les $\mu_{k,j}$ sont nuls, et donc

$$t = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} \iota(f_i) \otimes e'_j = f\left(\sum_{i,j} \lambda_{i,j} f_i \otimes e'_j\right) \in f(F \otimes E'),$$

  ce qui conclut la preuve.

□

Remarque culturelle : dans la preuve précédente, nous avons utilisé une base du produit tensoriel pour montrer que l'inclusion de F dans E permettait de définir une injection de $F \otimes E'$ dans $E \otimes E'$. Par contre pour montrer la surjectivité de φ ci-dessus, c'était bien plus facile et ne nécessitait pas de base. Ceci reflète un fait général : le produit tensoriel est une construction qui préserve la surjectivité dans des contextes assez généraux, tandis qu'elle ne préserve pas toujours l'injectivité. Par exemple, dans le cadre de la théorie des modules sur un anneau commutatif A (qui généralise la théorie des espaces vectoriels en autorisant les scalaires à vivre dans un anneau qui n'est pas forcément un corps), il existe une définition analogue du produit tensoriel de deux modules M et M', qui est un A-module noté $M \otimes_A M'$. Dans le langage des catégories, on dit que $(-) \otimes_A M'$ est un *foncteur*, car il permet d'associer à un A-module M un autre A-module $M \otimes_A M'$ (c'est l'action de ce foncteur au niveau des *objets* de la catégorie des A-modules), mais également à un morphisme de A-module $f\colon M \to N$, un morphisme $f \otimes \mathrm{id}_{M'}\colon M \otimes_A M' \to N \otimes_A M'$ (c'est l'action de ce foncteur au niveau des *flèches* de cette catégorie). Un foncteur est dit *exact à droite* s'il préserve la surjectivité des flèches, et *exact à gauche* s'il préserve l'injectivité (cette terminologie vient de la position des flèches injectives et surjectives dans une *suite exacte*). Il est facile de montrer que pour n'importe quel A-module M', le foncteur $(-)\otimes_A M'$ est exact à droite (c'est la même preuve que celle que l'on a donnée plus haut, cela dit que si f est surjective, alors $f \otimes \mathrm{id}_{M'}$ est surjective). Par contre il faut faire attention car $(-) \otimes_A M'$ n'est pas toujours un foncteur exact à gauche. Ce qu'on a montré dans l'exercice n'est pas loin de montrer que c'est vrai dans les espaces vectoriels (étant donnée une flèche injective de F dans E, dans notre cas l'inclusion canonique, on a montré que la flèche induite en tensorisant avec $\mathrm{id}_{E'}$ restait injective). C'est vrai plus généralement pour les A-modules *libres*, qui sont précisément ceux qui admettent une base (car dans la théorie des A-modules il peut arriver qu'il n'y ait pas existence de bases, pas d'existence de supplémentaire etc. ce qui en fait une théorie bien plus compliquée). Pour ces modules libres la preuve que l'on a faite marche encore. Les modules M' pour lesquels $(-) \otimes_A M'$ est exact à gauche sont appelés les modules *plats*. Cependant il existe des modules qui ne sont pas plats ! C'est-à-dire qu'on peut avoir une inclusion de A-modules $M \subseteq N$ telle que $M \otimes_A M'$ ne puisse pas s'identifier à un sous-A-module de $N \otimes_A M'$.

Exercice 14

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(E', F')$. On fixe des bases de E, F, E', F' (supposés de dimension finie) ainsi que les matrices de u et v dans ces bases.

1. Décrire la matrice de $u \otimes v$ dans les bases associées de $E \otimes E'$ et $F \otimes F'$.

2. On suppose désormais que $E = F$ et $E' = F'$. Déduire du calcul précédent que $\mathrm{Tr}(u \otimes v) = \mathrm{Tr}(u)\mathrm{Tr}(v)$.

3. Calculer $\det(u \otimes v)$.

Indication : on pourra commencer par montrer que $u \otimes v = (\mathrm{id}_E \otimes v) \circ (u \otimes \mathrm{id}_{E'})$.

Solution. Pour deviner le résultat et comprendre l'énoncé de l'exercice, on peut commencer par traiter le cas d'applications linéaires en petite dimension. Par exemple, considérons deux applications linéaires u et v de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Disons que leurs matrices respectives dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ sont

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

D'après le cours $\mathcal{B} = (e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$. Déterminons la matrice de $u \otimes v$ (qui est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$) dans la base $\mathcal{B}$. Pour cela, on calcule l'image des vecteurs de base en revenant à la définition de $u \otimes v$ et en utilisant la bilinéarité de $\otimes$, puis on les exprime dans la base $\mathcal{B}$. Par exemple, pour le premier :

$$\begin{aligned}(u \otimes v)(e_1 \otimes e_1) &= u(e_1) \otimes v(e_1) = (ae_1 + ce_2) \otimes (\alpha e_1 + \gamma e_2) \\ &= a\alpha(e_1 \otimes e_1) + a\gamma(e_1 \otimes e_2) + c\alpha(e_2 \otimes e_1) + c\gamma(e_2 \otimes e_2)\end{aligned}$$

ce qui montre que la première colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u \otimes v)$ est

$$\begin{pmatrix} a\alpha \\ a\gamma \\ c\alpha \\ c\gamma \end{pmatrix}$$

En procédant de la même manière pour les autres vecteurs de base, on finit par obtenir la matrice par blocs

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u \otimes v) = \begin{pmatrix} aV & bV \\ cV & cV \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$

Remarque : nous avons fait un choix au moment d'ordonner les vecteurs de la base $\mathcal{B}$. En fait, si on avait plutôt choisi la base $\mathcal{C} = (e_1 \otimes e_1, e_2 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_2)$, on aurait obtenu

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u \otimes v) = \begin{pmatrix} \alpha U & \beta U \\ \gamma U & \delta U \end{pmatrix}.$$

Cet exemple en petite dimension nous suggère que la matrice de $u \otimes v$ dans une base ordonnée judicieusement sera toujours une matrice par blocs, dont les blocs sont des copies de la matrice de u multipliées par des coefficients de la matrice de v (ou la même chose en échangeant les rôles de u et v, quitte à réordonner les bases). C'est ce que nous allons démontrer dans la première question.

1. On note

— $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E
— $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_m)$ une base de F
— $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_s)$ une base de E'
— $\mathcal{C}' = (f'_1, \ldots, f'_t)$ une base de F'

puis $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = (u_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n} =: U$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(v) = (v_{k,\ell})_{1 \leqslant k \leqslant t,\ 1 \leqslant \ell \leqslant s} =: V$. Enfin, on note

$$\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}' := (e_1 \otimes e'_1, \ldots, e_1 \otimes e'_s, e_2 \otimes e'_1, \ldots, e_2 \otimes e'_s, \ldots)$$

la base de $E \otimes E'$ ordonnée dans l'ordre « e_1 contre tous les e'_j, puis e_2 contre tous les e'_j etc. » et

$$\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}' := (f_1 \otimes f'_1, \ldots, f_1 \otimes f'_t, f_2 \otimes f'_1, \ldots, f_2 \otimes f'_t, \ldots)$$

la base de $F \otimes F'$ ordonnée de la même manière. Afin de déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}',\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}'}(u \otimes v)$, on calcule l'image d'un vecteur de la base de départ $e_i \otimes e'_j$ et on l'exprime dans la base d'arrivée :

$$(u \otimes v)(e_i \otimes e'_j) = u(e_i) \otimes v(e'_j) = \left(\sum_{k=1}^{m} u_{k,i} f_k\right) \otimes \left(\sum_{\ell=1}^{t} v_{\ell,j} f'_j\right)$$

d'où par bilinéarité de $\otimes$:

$$(u \otimes v)(e_i \otimes e'_j) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{t} u_{k,i} v_{\ell,j} (f_k \otimes f'_\ell) \tag{4}$$

Pour chaque bloc correspondant à une partie de la base $\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}'$ de la forme $(e_i \otimes e'_1, \ldots, e_i \otimes e'_s)$ (c'est-à-dire avec e_i fixé et les e'_j qui varient) et une partie de la base $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}'$ de la forme $(f_k \otimes f'_1, \ldots, f_k \otimes f'_t)$, l'égalité ci-dessus montre que les coefficients de la matrice de $u \otimes v$

dans ce bloc sont les $u_{k,i}v_{\ell,j}$. Ainsi, on peut factoriser tout le bloc par $u_{k,i}$ et la matrice restante est exactement la matrice V. On a donc l'écriture par blocs

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}',\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}'}(u\otimes v) = \begin{pmatrix} u_{1,1}V & u_{1,2}V & & \\ u_{2,1}V & u_{2,2}V & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{m,n}V \end{pmatrix}$$

où chaque bloc appartient à $\mathcal{M}_{t,s}(\mathbb{R})$ (la taille de la matrice de V).

Remarque : si on ordonnait plutôt $\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}'$ dans l'ordre « tous les e_i contre e'_1, puis tous les e_i contre e'_2, etc. » et la base $\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}'$ dans l'ordre « tous les f_k contre f'_1, puis tous les f_k contre f'_2 etc. », l'égalité (4) donnerait alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}',\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}'}(u\otimes v) = \begin{pmatrix} v_{1,1}U & v_{1,2}U & & \\ v_{2,1}U & v_{2,2}U & & \\ & & \ddots & \\ & & & v_{t,s}U \end{pmatrix}$$

où tous les blocs appartiennent à $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ (la taille de la matrice de U).

2. Puisque l'on suppose que $E = F$ et que $E' = F'$, il est naturel de prendre les mêmes bases et donc de supposer que $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ et que $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'$. Ainsi, $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(U)$, $\mathrm{Tr}(v) = \mathrm{Tr}(V)$ et surtout $\mathrm{Tr}(u\otimes v) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}',\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}'}(u\otimes v))$ puisque les bases au départ et à l'arrivée sont les mêmes. Pour répondre à cette question, il suffit donc de sommer les coefficients diagonaux dans une des deux écritures par blocs de la question précédente. Par exemple, avec le premier choix d'ordre des bases du produit tensoriel, on obtient

$$\mathrm{Tr}(u\otimes v) = u_{1,1}\mathrm{Tr}(v) + \cdots + u_{n,n}\mathrm{Tr}(v) = (u_{1,1} + \cdots + u_{n,n})\mathrm{Tr}(v) = \mathrm{Tr}(u)\mathrm{Tr}(v).$$

3. Pour tout $(x, x') \in E \times E'$, on a

— $(u\otimes v)(x\otimes x') = u(x)\otimes v(x')$

— $(\mathrm{id}_E \otimes v)\circ(u\otimes \mathrm{id}_{E'})(x\otimes x') = (\mathrm{id}_E\otimes v)(u(x)\otimes x') = u(x)\otimes v(x')$

Ainsi, les deux applications linéaires de l'indication coïncident sur une partie génératrice de $E\otimes E'$, donc elles sont égales. On en déduit que

$$\det(u\otimes v) = \det(\mathrm{id}_E\otimes v)\det(u\otimes \mathrm{id}_{E'}).$$

Or en choisissant judicieusement l'ordre des vecteurs de base de $E\otimes E'$, on a vu que la matrice de $\mathrm{id}_E\otimes v$ pouvait être rendue diagonale par blocs, avec des blocs tous égaux à la matrice V, et de même pour la matrice de $u\otimes\mathrm{id}_{E'}$. En tenant compte du nombre de blocs diagonaux, on obtient finalement :

$$\det(u\otimes v) = \det(v)^{\dim(E)}\det(u)^{\dim(E')}.$$

Remarque : cette preuve a l'avantage de fonctionner sur n'importe quel corps. Une autre piste à explorer lorsqu'on travaille sur $\mathbb{C}$ serait de trigonaliser l'une des matrices pour se ramener à un calcul de déterminant d'une matrice triangulaire par blocs. $\square$